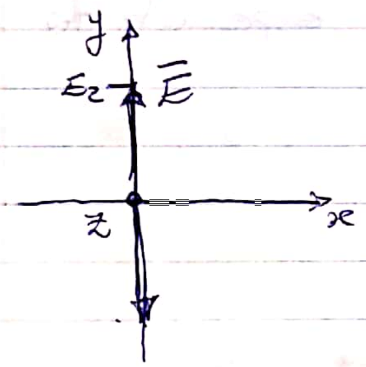
Polarização de onda

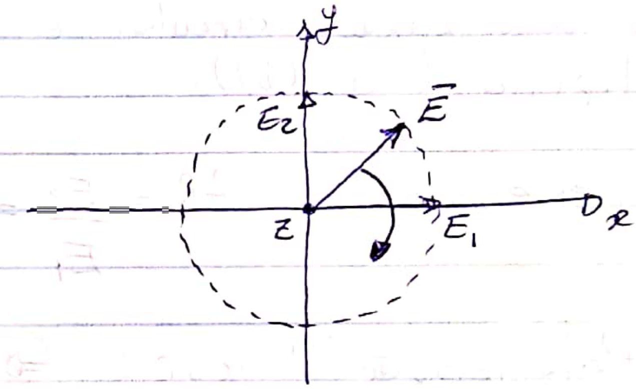
A polarização de campo é definida como a trajetória traçada pela extremidade de um vetor de campo variante no tempo em um dado ponto de observação.

- Plano de polarização é ortogonal à direção de propagação.

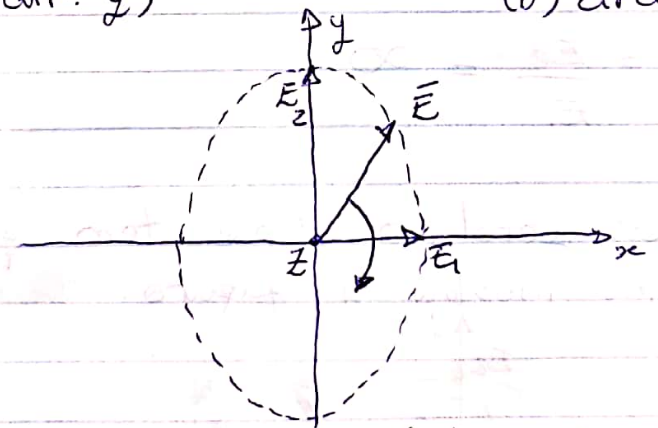
- tipos de polarização: linear, circular e elíptica



(a) linear (dir. y)



(b) circular (esquerda)



(c) elíptica (polariz. à esquerda)

O campo E de uma onda linearmente polarizada propagando em +z:

$$E_y = E_2 \sin(\omega t - \beta z) \quad (1)$$

O estado de polariz. pode ser visto em (a).

O caso mais geral $\Rightarrow$ $\bar{E}$ possui E_x e E_y

No caso mais geral, em um dado ponto z, o vetor $\bar{E}$ gira em função do tempo, e sua ponta descreve uma elipse (polarização elíptica).

A razão do eixo maior para o eixo menor:

Razão axial $\quad AR = \dfrac{E_2}{E_1}$

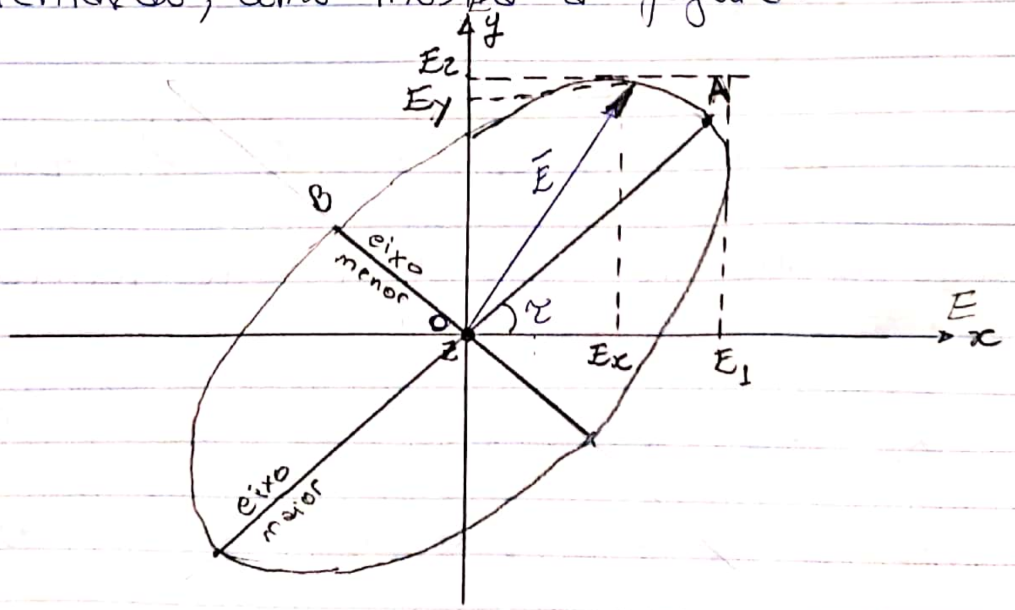
- A polarização circular é um caso especial da elíptica (ver (b)).

Nesse caso $\quad AR = \dfrac{E_2}{E_1} = 1$

- Polarização linear: $\Rightarrow E_1 = 0$

$$AR = \frac{E_2}{E_1} = \infty$$

No caso mais geral, a elipse tem qualquer orientação, como mostra a figura.



Representando uma onda elipticamente polarizada em termos de duas ondas linearmente polarizadas.

$$E_x = E_1 \sin(\omega t - \beta z) \quad (2)$$

$$E_y = E_2 \sin(\omega t - \beta z + \delta) \quad (3)$$

E_1 : amplitude L.P. dir. x

E_2 : " L.P. " y

δ : ângulo pelo qual E_y está avançado de E_x

$\delta = \delta_x - \delta_y$

Combinando (2) e (3):

$$\bar{E} = \hat{x} E_1 \sin(\omega t - \beta z) + \hat{y} E_2 \sin(\omega t - \beta z + \delta) \quad (4)$$

@ $z = 0$:

$$E_x = E_1 \operatorname{sen}(\omega t)$$

$$E_y = E_2 \operatorname{sen}(\omega t + \delta)$$

Expandindo E_y : usando $\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}(a)\cos(b) + \operatorname{sen}(b)\cos(a)$

$$E_y = E_2 \left[\operatorname{sen}(\omega t)\cos(\delta) + \cos(\omega t)\operatorname{sen}(\delta) \right] \quad (5)$$

da relação p/ E_x, temos:

$$\operatorname{sen}(\omega t) = \frac{E_x}{E_1}$$

Logo: $$\cos(\omega t) = \sqrt{1 - \left(\frac{E_x}{E_1}\right)^2}$$

Substituindo essas relações em (5):

$$\frac{E_y}{E_2} = \frac{E_x}{E_1}\cos(\delta) + \cos(\omega t)\sin(\delta)$$

$$\cos(\omega t) = \left[\frac{E_y}{E_2} - \frac{E_x}{E_1}\cos(\delta)\right]\frac{1}{\sin(\delta)}$$

$$\sqrt{1 - \frac{E_x^2}{E_1^2}} = \left[\frac{E_y}{E_2} - \frac{E_x}{E_1}\cos(\delta)\right]\frac{1}{\sin(\delta)}$$

elevando os dois lados ao quadrado:

$$1 - \frac{E_x^2}{E_1^2} = \left[\frac{E_y^2}{E_2^2} - 2\frac{E_y E_x}{E_1 E_2}\cos(\delta) + \frac{E_x^2}{E_1^2}\cos^2(\delta)\right]\frac{1}{\sin^2(\delta)}$$

$$\sin^2(\delta) - \sin^2(\delta)\frac{E_x^2}{E_1^2} = \frac{E_y^2}{E_2^2} - 2\frac{E_y E_x}{E_1 E_2}\cos(\delta) + \frac{E_x^2}{E_1^2}\cos^2(\delta)$$

$$\sin^2(\delta) = \frac{E_y^2}{E_2^2} - 2\frac{E_y E_x}{E_1 E_2}\cos(\delta) + \frac{E_x^2}{E_1^2}\left[\sin^2(\delta) + \cos^2(\delta)\right]$$

$$\boxed{\frac{E_x^2}{E_1^2} - 2\frac{E_x E_y}{E_1 E_2}\cos(\delta) + \frac{E_y^2}{E_2^2} = \sin^2(\delta)} \qquad (6)$$

ou

$$a E_x^2 - b E_x E_y + c E_y^2 = 1 \qquad (7)$$

onde:

$$a = \frac{1}{E_1^2 \sin^2\delta} \qquad b = \frac{2\cos(\delta)}{E_1 E_2 \sin^2(\delta)} \qquad c = \frac{1}{E_2^2 \sin^2(\delta)}$$

A equação (7) descreve a <u>elipse de polarização</u>.

O segmento OA é o semieixo maior
" OB é o " menor.

Ângulo de inclinação: τ

Razão axial:

$$AR = \frac{OA}{OB} \qquad (1 \leq AR \leq \infty)$$

Se $E_1 = 0 \Rightarrow$ onda linearmente polarizada dir. y

$E_2 = 0 \Rightarrow$ " " " " x

Se $\delta = 0$ e $E_1 = E_2 \Rightarrow$ linearmente polarizada com $\tau = 45°$

Se $E_1 = E_2$ e $\delta = \pm 90° \Rightarrow$ circularmente polarizada

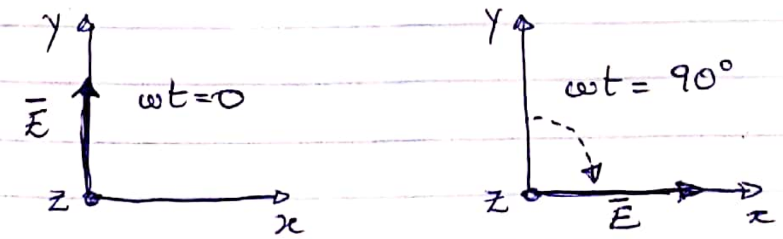
$\delta = +90° \Rightarrow$ circ. polariz. à esquerda

$\delta = -90° \Rightarrow$ " " " direita

Para $\delta = 90°$ e $z = 0$ e $t = 0$, temos de ② e ③:

$$\bar{E} = \hat{y} E_2. \qquad (a)$$

um quarto de ciclo depois $(\omega t = 90°) \Rightarrow \bar{E} = \hat{x} E_1$ (b)



Orientação instantânea p/ vetor $\bar{E}$ em dois instantes de tempo p/ onda polariz. à esquerda.

O ângulo de inclinação é dado por:

$$\tan(2\tau) = \frac{2E_1E_2}{E_1^2 - E_2^2}\cos(\delta) \tag{8}$$

Os semi-eixos da elipse (A e B):

$$A = \sqrt{\frac{1}{2}(E_1^2 + E_2^2) + \frac{s}{2}\sqrt{(E_1^2 - E_2^2)^2 + 4E_1^2E_2^2\cos^2(\delta)}} \tag{9}$$

$$B = \sqrt{\frac{1}{2}(E_1^2 + E_2^2) - \frac{s}{2}\sqrt{(E_1^2 - E_2^2)^2 + 4E_1^2E_2^2\cos^2(\delta)}} \tag{10}$$

onde:

$$s = \text{sign}(E_1 - E_2)$$

Scanned with CamScanner

Exemplos: Orfanides, Exemplo 2.5.1

Determine o estado de polarização dos seguintes campos: em $z=0$, restaurando $e^{j\omega t}$

a) $\bar{E}(z) = -3j\,\hat{x}\,e^{-jkz}$

$E_x(t) = 3\cos(\omega t - \pi/2)$ $\qquad \delta = \delta_x - \delta_y$

$E_y(t) = 0$

Precisamos determinar:

E_1, E_2, δ, A, B, τ, sentido de rotação, tipo poloriz.

Assim:

$\boxed{E_1 = 3}$ $\qquad \boxed{E_2 = 0}$

$\delta = -\pi/2 - 0 \Rightarrow \boxed{\delta = -90^\circ}$

de (9):

$$A = \sqrt{\frac{1}{2}(3^2+0) + \frac{1}{2}\sqrt{(3^2-0)^2 + 4\cdot 3^2\cdot 0\cdot \cos^2(-90^\circ)}}$$ semi-eixo

$$A = \sqrt{\frac{1}{2}\cdot 9 + \frac{1}{2}9} \qquad \boxed{A = 3}$$

de (10):

$$B = \sqrt{\frac{1}{2}(3^2-0) - \frac{1}{2}\sqrt{(3^2-0)^2 + 4\cdot 3^2\cdot 0\cdot \cos^2(-90^\circ)}}$$ semi-eixo

$$B = \sqrt{\frac{1}{2}9 - \frac{1}{2}9} \qquad \boxed{B = 0}$$

de (8): $\tan(2\tau) = \dfrac{2\cdot 3\cdot 0}{3^2 - 0^2}\cdot\cos(-90^\circ) \Rightarrow \boxed{\tau = 0^\circ}$

sentido de rotação : +x $\longrightarrow$

polariz. : linear / p/ frente

b) $\bar{E}(z) = (3\hat{x} + 4\hat{y})\, e^{+jkz}$

$E_x(t) = 3\cos(\omega t)$ $E_y(t) = 4\cos(\omega t)$

$\boxed{E_1 = 3}$ $\boxed{E_2 = 4}$ $\boxed{\delta = 0°}$

$$A = \sqrt{\frac{1}{2}(9+16) - \frac{1}{2}\sqrt{(9-16)^2 + 4.9.16\cos^2(0)}}$$

$\boxed{A = 0}$ * * a elipse colapsa ao longo desse semi-eixo

$$B = \sqrt{\frac{1}{2}(9+16) + \frac{1}{2}\sqrt{(9-16)^2 + 4.9.16.\cos^2(0)}}$$

$\boxed{B = 5}$ * * e torna-se uma linha reta ao longo do semi-eixo B

$\tan(2\tau) = \dfrac{2.3.4}{3^2 - 4^2}\cos(0)$ $\boxed{\tau = -36{,}87°}$

—X—

A direção de fato do campo $\bar{E}$ será:

$90 - 36{,}87 = 53{,}13°$

q/ é igual ao ângulo de inclinação $\operatorname{atan}(E_2/E_1) = \operatorname{atan}(4/3) = 53{,}13°$

sentido de rotação : $\nearrow$ 53,13°

polariz: linear / p/ trás

c) $\bar{E}(z) = (-4\hat{x} + 3\hat{y})\, e^{-jkz}$

$E_x = 4\cos(\omega t + \pi)$ $\qquad$ $E_y = 3\cos(\omega t)$

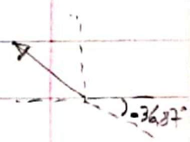
$\boxed{E_1 = 4}$ $\qquad$ $\boxed{E_2 = 3}$ $\qquad$ $\boxed{\delta = +\pi}$

$\boxed{A = 5}$ linha reta ao longo desse semi-eixo

$\boxed{B = 0}$ colapsa nesse semi-eixo

$$\tan(2\tau) = \frac{2 \cdot 4 \cdot 3}{4^2 - 3^2} \cos(\pi)$$

$\boxed{\tau = -36,87°}$ coincide c/ a inclinação de $\bar{E}$



polariz. : linear / p/ frente

d) $\bar{E}(z) = (3e^{j\pi/3}\,\hat{x} + 3\hat{y})\, e^{+jkz}$

$E_x(t) = 3\cos(\omega t + \pi/3)$ $\qquad$ $E_y = 3\cos(\omega t)$

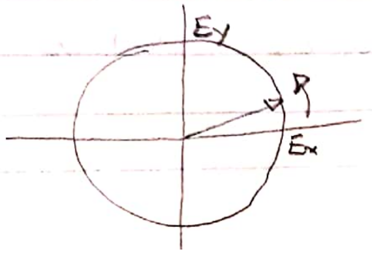
$\boxed{E_1 = 3}$ $\qquad$ $\boxed{E_2 = 3}$ $\qquad$ $\boxed{\delta = \pi/3}$

$\boxed{A = 3,674}$ $\qquad$ $\boxed{B = 2,121}$

$\boxed{\tau = 45°}$

sentido : $E_x(t) = 3\cos(\omega t + \pi/3) = 0,5\cos(\omega t) - 0,866\sin(\omega t)$

$E_y(t) = \cos(\omega t)$



como a prop é em $-\hat{z}$

rotação : elíptica

polarização : esquerda / p/ trás.

e) $E(z) = (4\hat{x} + 3e^{-j\pi/4}\hat{y})\, e^{-jkz}$

$E_x(t) = 4\cos(\omega t)$ $\qquad$ $E_y(t) = 3\cos(\omega t - \pi/4)$

$\boxed{E_1 = 4}$ $\qquad$ $\boxed{E_2 = 3}$ $\qquad$ $\boxed{\delta = +\pi/4}$

$\boxed{A = 4{,}656}$ $\qquad$ $\boxed{B = 1{,}822}$

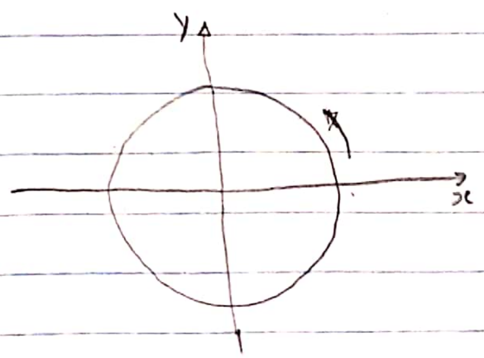
$\boxed{\tau = 33{,}792°}$

Determinando o sentido :

$E_x(t) = 4\cos(\omega t)$

$E_y(t) = 3\left[\cos(\omega t)\frac{\sqrt{2}}{2} + \sin(\omega t)\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

$E_y(t) = \frac{3\sqrt{2}}{2}\left[\cos(\omega t) + \sin(\omega t)\right]$



prop. $+\hat{z}$:
rotação elíptica

polariz. : direita / p/ frente

f) $\bar{E}(z) = \left(3e^{-j\pi/8}\,\hat{x} + 4e^{j\pi/8}\,\hat{y}\right) e^{+jkz}$

$E_x(t) = 3\cos(\omega t - \pi/8)$ $\quad E_y(t) = 4\cos(\omega t + \pi/8)$

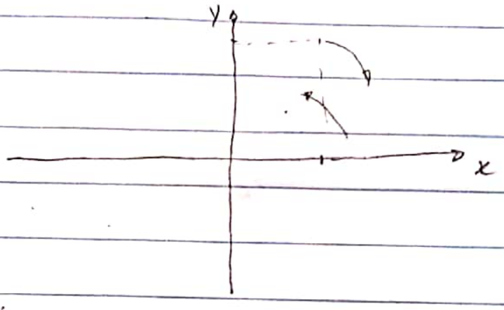
$\boxed{E_1 = 3}$ $\quad \boxed{E_2 = 4}$ $\quad \boxed{\delta = -\pi/4}$

$\boxed{A = 1{,}822}$ $\quad \boxed{B = 4{,}656}$ $\quad \boxed{\tau = -33{,}79°}$

Determ. o sentido:

$E_x = 3\left[\cos(\omega t) \cdot 0{,}924 + \sin(\omega t) \cdot 0{,}383\right]$

$E_y = 4\left[\cos(\omega t) \cdot 0{,}924 - \sin(\omega t) \cdot 0{,}383\right]$



rotação elíptica
polariz.: direita / p/ trás

g) $\bar{E}(z) = \left(4e^{j\pi/4}\,\hat{x} + 3e^{-j\pi/2}\,\hat{y}\right) e^{-jkz}$

$E_x = 4\cos(\omega t + \pi/4)$ $\quad E_y = 3\cos(\omega t - \pi/2)$

$\boxed{E_1 = 4}$ $\quad \boxed{E_2 = 3}$ $\quad \boxed{\delta = 3\pi/4}$

$\boxed{A = 4{,}656}$ $\quad \boxed{B = 1{,}822}$ $\quad \boxed{\tau = -33{,}79°}$

sentido:

$E_x = 4\left[\cos(\omega t)\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin(\omega t)\frac{\sqrt{2}}{2}\right] = 2\sqrt{2}\left[\cos(\omega t) - \sin(\omega t)\right]$

$E_y = 3\left[\cos(\omega t) \cdot 0 + \sin(\omega t) \cdot 1\right] = 3 \cdot \left[\sin(\omega t)\right]$

Elíptico, direita / p/ frente

Scanned with CamScanner

h) $\bar{E}(z) = \left(3e^{-j\pi/2}\hat{x} + 4e^{j\pi/4}\hat{y}\right)e^{+jkz}$

$E_x = 3\cos(\omega t - \pi/2)$ $\qquad E_y = 4\cos(\omega t + \pi/4)$

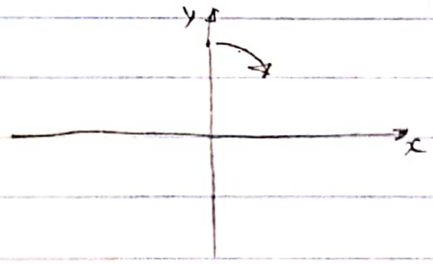
$\boxed{E_1 = 3}$ $\qquad \boxed{E_2 = 4}$ $\qquad \boxed{\delta = -3\pi/4}$

$\boxed{A = 1{,}822}$ $\qquad \boxed{B = 4{,}656}$ $\qquad \boxed{\tau = 33{,}79°}$

sentido:

$E_x = 3\left[\cos(\omega t)\cdot 0 + \sin(\omega t)\cdot 1\right] = 3\sin(\omega t)$

$E_y = 4\left[\cos(\omega t)\cdot \sqrt{2}/2 - \sin(\omega t)\sqrt{2}/2\right] = 2\sqrt{2}\left[\cos(\omega t) - \sin(\omega t)\right]$



Elíptica, direita / p/ trás.