Statistics for Business and Economics

7th Edition

Aula 06 -Capítulo 4

Variáveis Aleatórias Discretas e Distribuições de Probabilidade

Objetivos

Depois de concluir este capítulo, você deverá ser capaz de:

Interpretar a média e o desvio padrão para uma variável aleatória discreta

Usar a distribuição de probabilidade binomial para encontrar probabilidades

Descrever quando aplicar a distribuição binomial

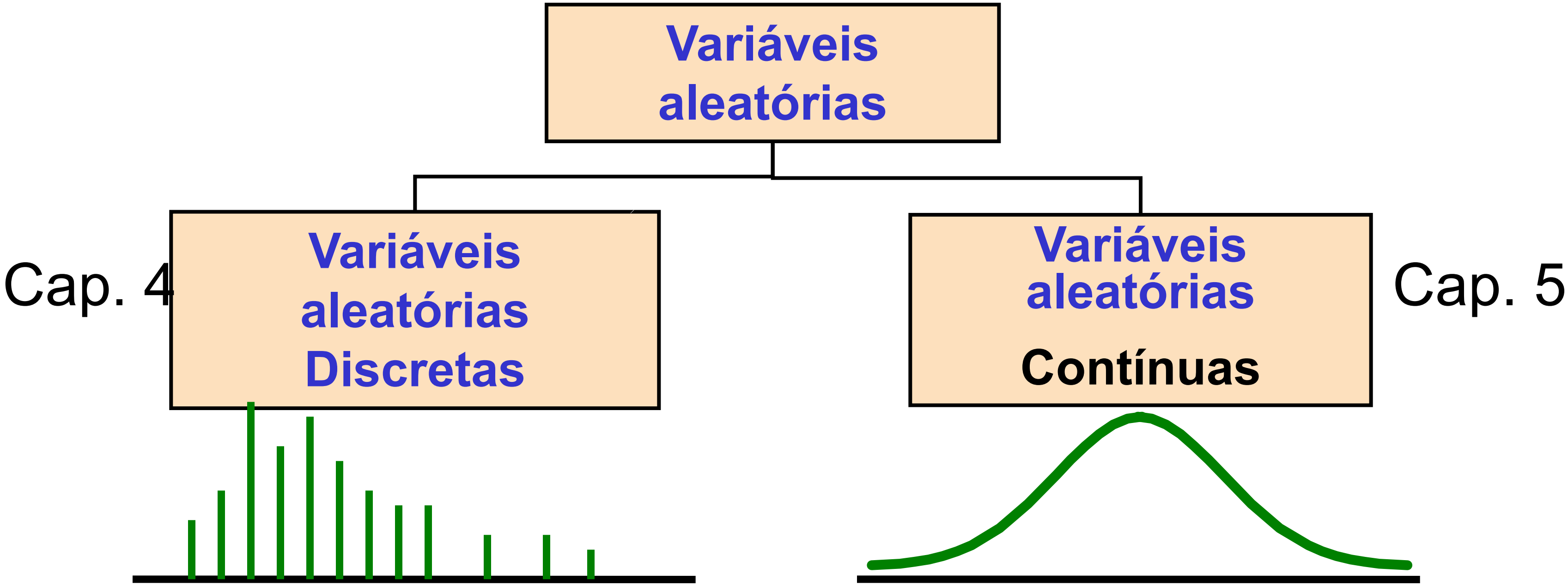
Usar as distribuições de probabilidade discreta hipergeométrica e de Poisson para encontrar probabilidades

Explicar covariância e correlação para variáveis aleatórias discretas distribuídas conjuntamente

4.1

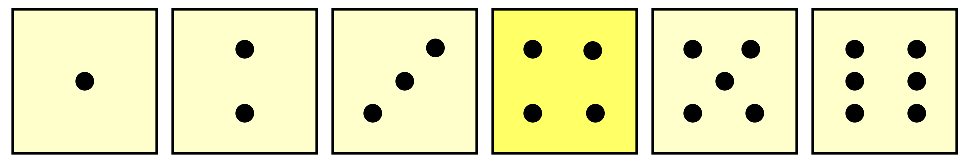
Introdução às distribuições de probabilidade

- **Variável aleatória**
- **Representa um possível valor numérico de um experimento aleatório**



Variáveis aleatórias Discretas

- Só pode assumir um número contável de valores



- Exemplos:
  - **Jogue um dado duas vezes**
  - **Seja X o número de vezes que 4 aparece**
  - **(então X pode ser 0, 1 ou 2 vezes)**

X é a variável aleatória

  - **Jogue uma moeda 5 vezes.**
  - **Seja X o número de caras**
  - **(então X = 0, 1, 2, 3, 4 ou 5)**

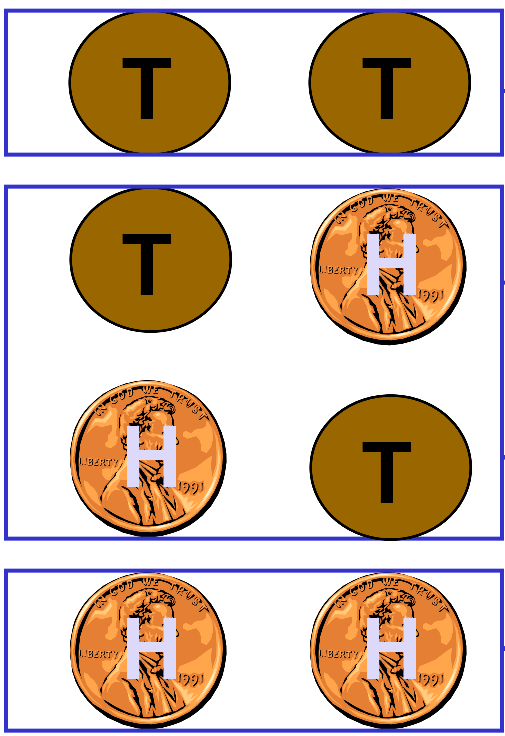
4.2

Distribuição de probabilidade discreta

Experiência: Jogue 2 Moedas. Seja X = # caras.

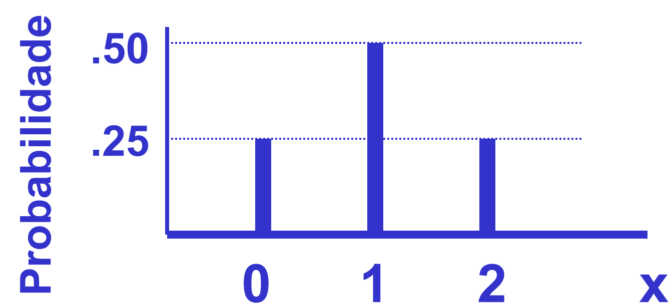
Mostre P(x) , ou seja, P(X = x) , para todos os valores de x:

4 Possíveis resultados



Distribuição de probabilidade

Valor de x	Probabilidade
0	1/4 = .25
1	2/4 = .50
2	1/4 = .25



Propriedades necessárias de distribuição de probabilidade

- $\boxed{P(x) \geq 0}$ para qualquer valor de x

- As probabilidades individuais somam 1;

$$\boxed{\sum_{x} P(x) = 1}$$

- (A notação indica a soma de todos os valores x possíveis)

Função de Probabilidade Acumulada

- A função de probabilidade acumulada, denotada $F(x_0)$, mostra a probabilidade de que X seja menor ou igual a x_0

$$F(x_0) = P(X \leq x_0)$$

- Em outras palavras,

$$F(x_0) = \sum_{x \leq x_0} P(x)$$

Valor esperado

- Valor esperado (ou média) de um valor discrete distribuição (Média Ponderada)

$$\mu = E(X) = \sum_x xP(x)$$

- Exemplo: Jogue 2 moedas,
- x = # de caras,
- calcular o valor esperado de x:

x	P(x)
0	.25
1	.50
2	.25

E(x) = (0 x .25) + (1 x .50) + (2 x .25)
= 1.0

Variância e Desvio Padrão

- Variância de uma variável aleatória discreta X

$$\sigma^2 = E(X-\mu)^2 = \sum_x (x-\mu)^2 P(x)$$

- Desvio padrão de uma variável aleatória discreta X

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\sum_x (x-\mu)^2 P(x)}$$

Exemplo de desvio padrão

Exemplo: Jogue 2 moedas, X = # caras, calcular o desvio padrão (lembre-se de E(x) = 1)

$$\sigma = \sqrt{\sum_{x} (x - \mu)^2 P(x)}$$

$$\sigma = \sqrt{(0-1)^2(.25) + (1-1)^2(.50) + (2-1)^2(.25)} = \sqrt{.50} = .707$$

Número possível de cabeças = 0, 1, or 2

Funções de Variáveis Aleatórias

- Se P(x) é a função de probabilidade de uma variável aleatória discreta X , e g(X) é alguma função de X , então o valor esperado da função g é

$$\boxed{E[g(X)] = \sum_{x} g(x)P(x)}$$

Funções Lineares de Variáveis Aleatórias

- Sejam a e b quaisquer constantes.
- a) $\boxed{E(a) = a \qquad \text{and} \qquad Var(a) = 0}$
- ou seja, se uma variável aleatória sempre assume o valor a, terá média a e variância 0

- b) $\boxed{E(bX) = b\mu_X \qquad \text{and} \qquad Var(bX) = b^2\sigma_X^2}$
- ou seja, o valor esperado de $b \cdot X$ é $b \cdot E(x)$

Funções Lineares de Variáveis Aleatórias

(cont.)

- Seja uma variável aleatória X com media μ_x e variância σ^2_x
- Sejam a e b quaisquer constantes.
- Seja Y = a + bX
- Então a media e a variância de Y são

$$\boxed{\mu_Y = E(a + bX) = a + b\mu_X}$$

$$\boxed{\sigma^2_Y = Var(a + bX) = b^2\sigma^2_X}$$

- de modo que o desvio padrão de Y é $\boxed{\sigma_Y = |b|\sigma_X}$

Distribuições de probabilidade

- **Distribuições de probabilidade**
  - **Distribuições de probabilidade Discretas** — Ch. 4
    - Binomial
    - Hipergeométrica
    - Poisson
  - **Distribuições de probabilidade Contínuas** — Ch. 5
    - Uniforme
    - Normal
    - Exponencial

A Distribuição Binomial

- **Distribuições de probabilidade**
  - Ch. 4 — **Distribuições de probabilidade Discretas**
    - Binomial
    - Hipergeométrica
    - Poisson
  - **Distribuições de probabilidade Contínuas** — Ch. 5
    - Uniforme
    - Normal
    - Exponencial

Distribuição de Bernoulli

- Considere apenas dois resultados: “sucesso” ou “fracasso”
- Seja P denotando a probabilidade de sucesso
- Seja (1 – P) a probabilidade de falha
- Defina variável aleatória X:
- x = 1 se sucesso, x = 0 se falha
- Então a função de probabilidade de Bernoulli é

$$\boxed{P(0) = (1-P) \quad \text{and} \quad P(1) = P}$$

Média e Variância da Distribuição de Bernoulli

- A Média é $\boxed{\mu = P}$

$$\mu = E(X) = \sum_X xP(x) = (0)(1-P) + (1)P = P$$

- A Variância é $\boxed{\sigma^2 = P(1 - P)}$

$$\sigma^2 = E[(X-\mu)^2] = \sum_X (x-\mu)^2 P(x)$$

$$= (0-P)^2(1-P) + (1-P)^2 P = P(1-P)$$

Sequências de x sucessos em n tentativas

- O número de sequências com x sucessos em n tentativas independentes é:

$$\boxed{C_x^n = \frac{n!}{x!(n-x)!}}$$

Sendo $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1$ and $0! = 1$

Essas sequências são mutuamente exclusivas, pois não podem ocorrer duas ao mesmo tempo

Distribuição de probabilidade binomial

Um número fixo de observações, n

* exemplo, 15 lançamentos de uma moeda; dez lâmpadas retiradas de um armazém

Duas categorias mutuamente exclusivas e coletivamente exaustivas

* exemplo, cara ou coroa em cada lançamento de uma moeda; lâmpada defeituosa ou não defeituosa

Geralmente chamado de “sucesso” e “fracasso”

A probabilidade de sucesso é P , a probabilidade de falha é 1 – P.   Probabilidade constante para cada observação

* exemplo, a probabilidade de obter coroa é a mesma sempre que jogamos a moeda

As observações são independents: o resultado de uma observação não afeta o resultado da outra

Possíveis configurações de distribuição binomial

- Uma fábrica rotula itens como defeituosos ou aceitáveis
- Uma firma solicitando contrato obterá um contrato ou não
- Uma empresa de pesquisa de marketing recebe respostas de pesquisa de “sim, vou comprar” ou “não, não vou”
- Novos candidatos a emprego aceitam a oferta ou a rejeitam

Fórmula de Distribuição Binomial

$$P(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} P^{x}(1-P)^{n-x}$$

P(x) = probabilidade de **x** sucessos em **n** tentativas,
com probabilidade de sucesso **P** em cada tentativa

x = número de 'sucessos' na amostra,
(x = 0, 1, 2, ..., n)

n = tamanho da amostra (número de tentativas ou observações)

P = probabilidade de "sucesso"

Exemplo: jogar uma moeda quatro vezes,

seja x = # caras:

n = 4

P = 0.5

1 - P = (1 - 0.5) = 0.5

x = 0, 1, 2, 3, 4

Exemplo: Calculando uma Probabilidade Binomial

Qual é a probabilidade de um sucesso em cinco observações se a probabilidade de sucesso é 0,1?

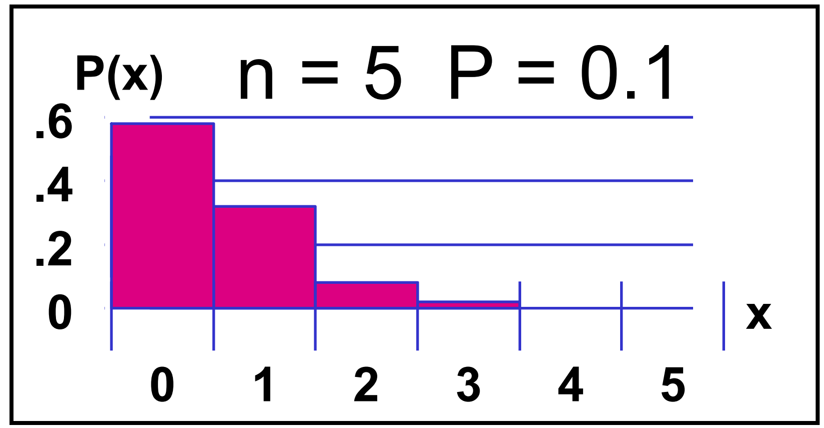
x = 1, n = 5, and P = 0.1

$$
\begin{aligned}
P(x=1) &= \frac{n!}{x!(n-x)!} P^X (1-P)^{n-X} \\
&= \frac{5!}{1!(5-1)!} (0.1)^1 (1-0.1)^{5-1} \\
&= (5)(0.1)(0.9)^4 \\
&= .32805
\end{aligned}
$$

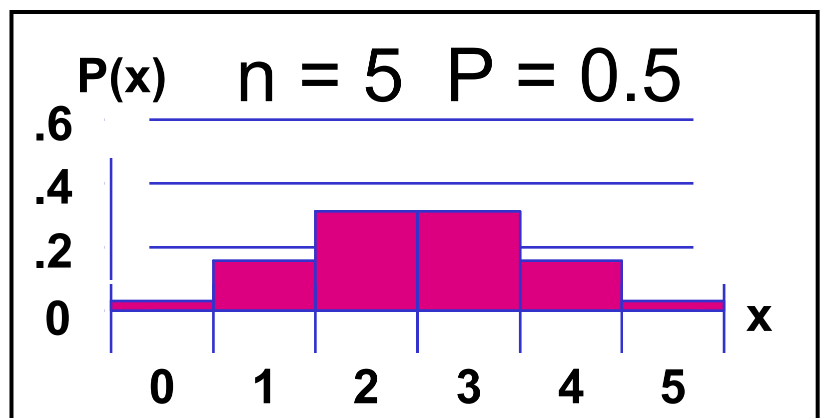
Distribuição Binomial

- A forma da distribuição binomial depende dos valores de P e n

- Aqui, n = 5 e P = 0.1



- Aqui, n = 5 e P = 0.5



Binomial Distribution Mean and Variance

- Mean

$$\boxed{\mu = E(x) = nP}$$

- Variance and Standard Deviation

$$\boxed{\sigma^2 = nP(1-P)}$$

$$\boxed{\sigma = \sqrt{nP(1-P)}}$$

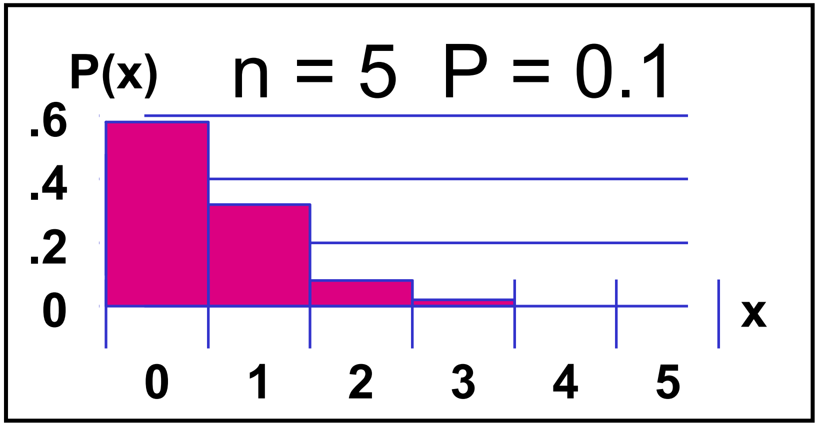
Where n = sample size
P = probability of success
(1 – P) = probability of failure

Binomial Characteristics

Examples

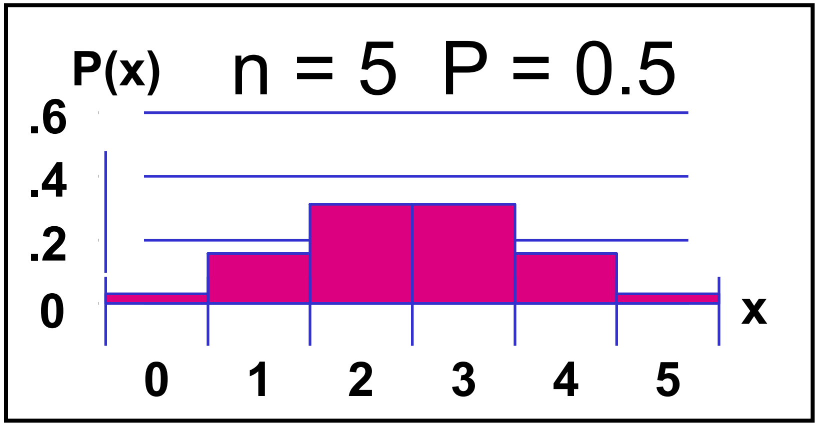
$$\mu = nP = (5)(0.1) = 0.5$$

$$\sigma = \sqrt{nP(1-P)} = \sqrt{(5)(0.1)(1-0.1)} = 0.6708$$



$$\mu = nP = (5)(0.5) = 2.5$$

$$\sigma = \sqrt{nP(1-P)} = \sqrt{(5)(0.5)(1-0.5)} = 1.118$$



Usando Tabelas Binomiais

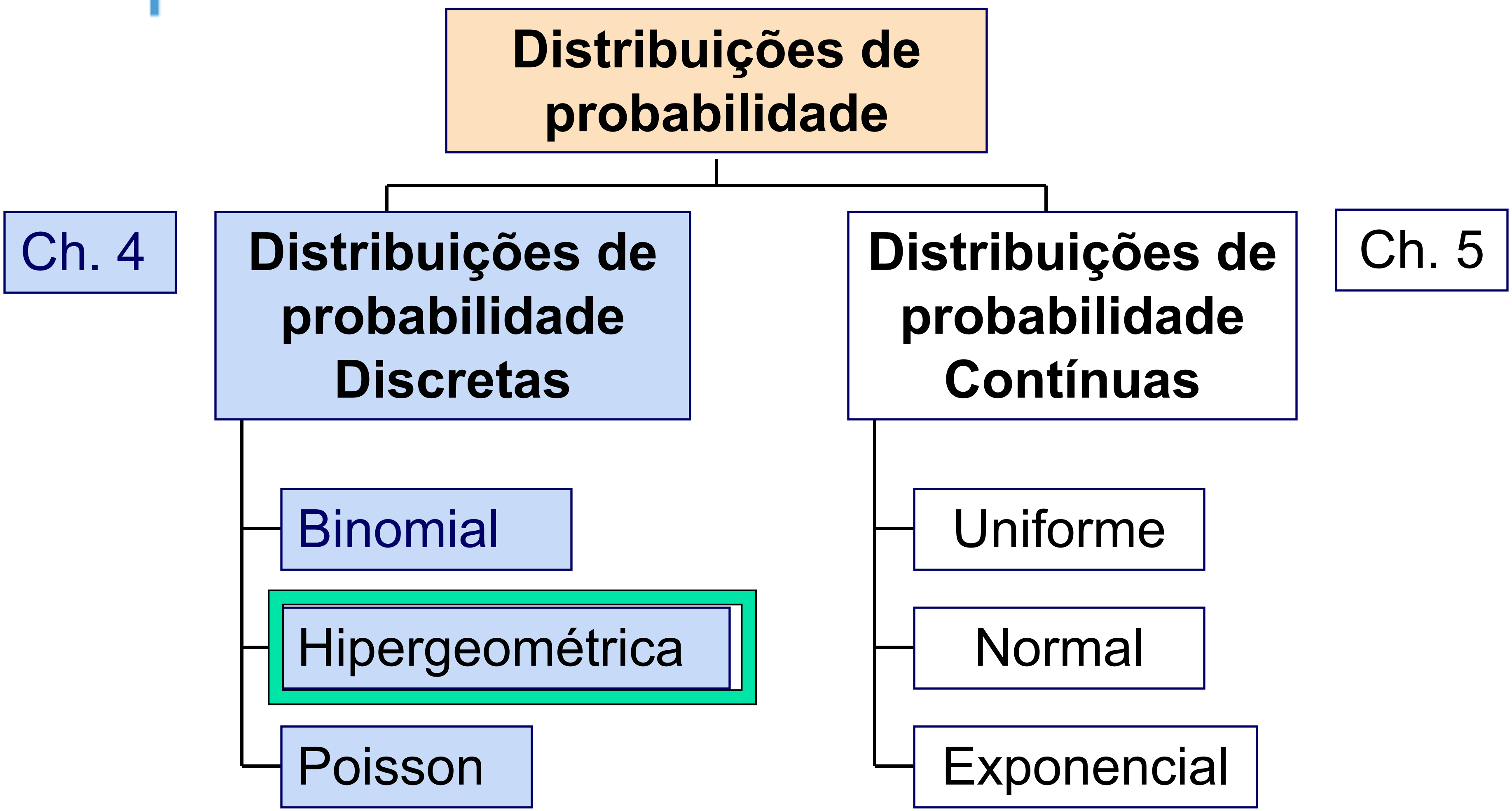
N	x	…	p=.20	p=.25	p=.30	p=.35	p=.40	p=.45	p=.50
10	0	…	0.1074	0.0563	0.0282	0.0135	0.0060	0.0025	0.0010
	1	…	0.2684	0.1877	0.1211	0.0725	0.0403	0.0207	0.0098
	2	…	0.3020	0.2816	0.2335	0.1757	0.1209	0.0763	0.0439
	3	…	0.2013	0.2503	0.2668	**0.2522**	0.2150	0.1665	0.1172
	4	…	0.0881	0.1460	0.2001	0.2377	0.2508	0.2384	0.2051
	5	…	0.0264	0.0584	0.1029	0.1536	0.2007	0.2340	0.2461
	6	…	0.0055	0.0162	0.0368	0.0689	0.1115	0.1596	0.2051
	7	…	0.0008	0.0031	0.0090	0.0212	0.0425	0.0746	0.1172
	8	…	0.0001	0.0004	0.0014	0.0043	0.0106	**0.0229**	0.0439
	9	…	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0016	0.0042	0.0098
	10	…	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0010

Exemplos:

n = 10, x = 3, P = 0.35: $P(x = 3|n = 10, p = 0.35) = .2522$

n = 10, x = 8, P = 0.45: $P(x = 8|n = 10, p = 0.45) = .0229$

A Distribuição Hipergeométrica



A Distribuição Hipergeométrica

- “n” tentativas numa amostra de uma população finita de tamanho N
- Amostra sem reposição
- Resultados das tentativas são dependentes
- Se refere a encontrar a probabilidade de “X” sucessos na amostra que possui “S” sucessos na população

Fórmula da A Distribuição Hipergeométrica

$$P(x) = \frac{C_x^S C_{n-x}^{N-S}}{C_n^N} = \frac{\dfrac{S!}{x!(S-x)!} \times \dfrac{(N-S)!}{(n-x)!(N-S-n+x)!}}{\dfrac{N!}{n!(N-n)!}}$$

Sendo

N = tamanho da população

S = número de sucessos na população

N – S = número de fracassos na população

n = tamanho da amostra

x = número de sucessos na amostra

n – x = número de fracassos na amostra

Usando a Distribuição Hipergeométrica

- Exemplo: 3 em 10 computadores são verificados num departamento. 4 dos 10 computadores têm software ilegal. Qual é a probabilidade de que 2 dos 3 computadores verificados tenham software ilegal?

N = 10	n = 3
S = 4	x = 2

$$P(x=2)=\frac{C_x^S C_{n-x}^{N-S}}{C_n^N}=\frac{C_2^4 C_1^6}{C_3^{10}}=\frac{(6)(6)}{120}=0.3$$

A probabilidade de que 2 dos 3 computadores selecionados tenham software ilegal é de 0,30 ou 30%.

A distribuição de Poisson

- **Distribuições de probabilidade**
  - Ch. 4 — **Distribuições de probabilidade Discretas**
    - Binomial
    - Hipergeométrica
    - Poisson
  - **Distribuições de probabilidade Contínuas** — Ch. 5
    - Uniforme
    - Normal
    - Exponencial

A distribuição de Poisson

- Use a distribuição de Poisson quando:

  Você deseja contar o número de vezes que um evento ocorre em um determinado intervalo contínuo

  A probabilidade de um evento ocorrer em um subintervalo é muito pequena e é a mesma para todos os subintervalos

  O número de eventos que ocorrem em um subintervalo é independente do número de eventos que ocorrem nos outros subintervalos

  Não pode haver mais de uma ocorrência em cada subintervalo

  O número esperado de eventos por unidade é λ (lambda)

Fórmula da A distribuição de Poisson

$$P(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

sendo:

x = número de sucessos por unidade

λ = número esperado de sucessos por unidade

e = base do sistema logaritmo natural (2.71828...)

Características da distribuição de Poisson

- Média

$$\boxed{\mu = E(X) = \lambda}$$

- Variância e Desvio Padrão

$$\boxed{\sigma^2 = E[(X-\mu)^2] = \lambda}$$

$$\boxed{\sigma = \sqrt{\lambda}}$$

sendo λ = número esperado de sucessos por unidade

Usando Tabelas de Poisson

X	λ								
	0.10	0.20	0.30	0.40	**0.50**	0.60	0.70	0.80	0.90
0	0.9048	0.8187	0.7408	0.6703	0.6065	0.5488	0.4966	0.4493	0.4066
1	0.0905	0.1637	0.2222	0.2681	0.3033	0.3293	0.3476	0.3595	0.3659
2	0.0045	0.0164	0.0333	0.0536	**0.0758**	0.0988	0.1217	0.1438	0.1647
3	0.0002	0.0011	0.0033	0.0072	0.0126	0.0198	0.0284	0.0383	0.0494
4	0.0000	0.0001	0.0003	0.0007	0.0016	0.0030	0.0050	0.0077	0.0111
5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0004	0.0007	0.0012	0.0020
6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0003
7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Exemplo: Encontre $P(X = 2)$ if $\lambda = .50$

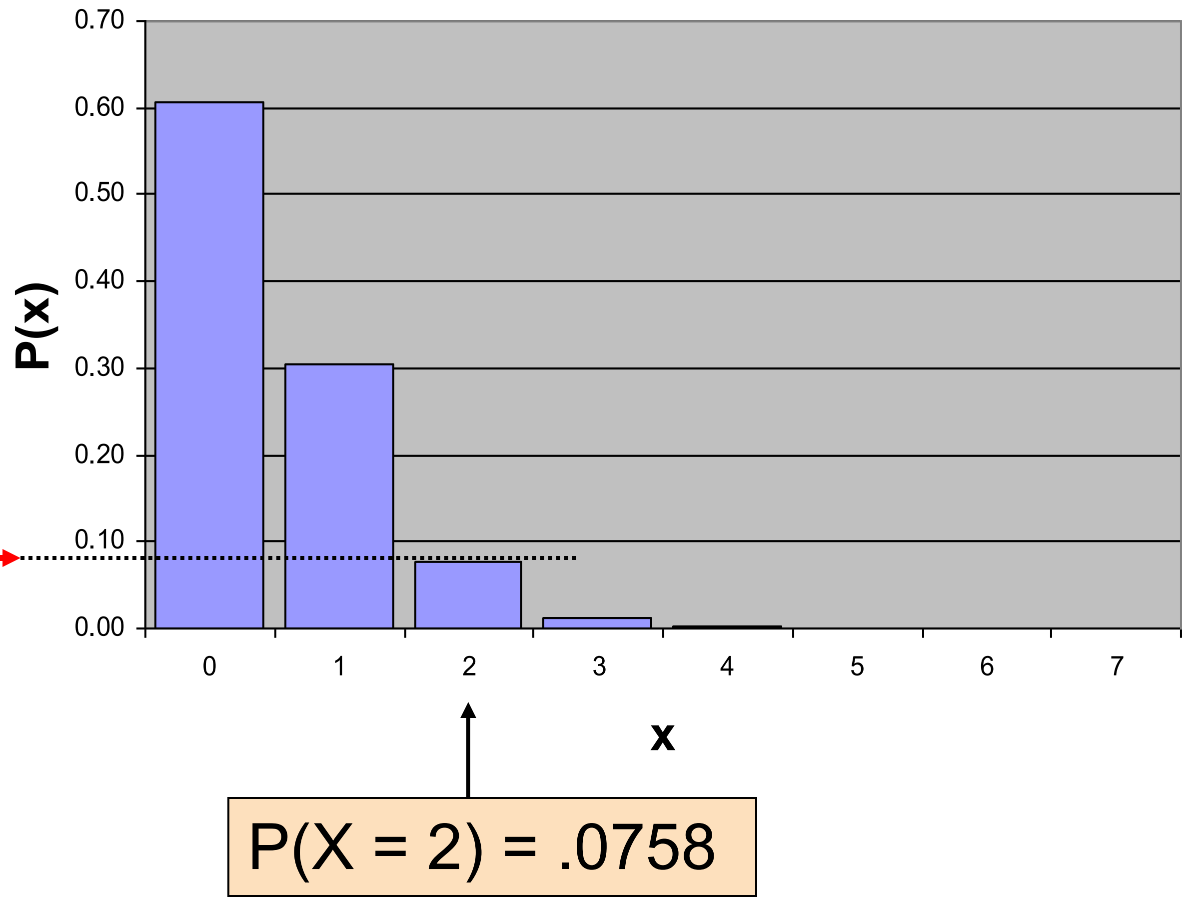
$$\boxed{P(X = 2) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^X}{X!} = \frac{e^{-0.50}(0.50)^2}{2!} = .0758}$$

Gráfico de Probabilidade Poisson

Graficamente:

λ = .50

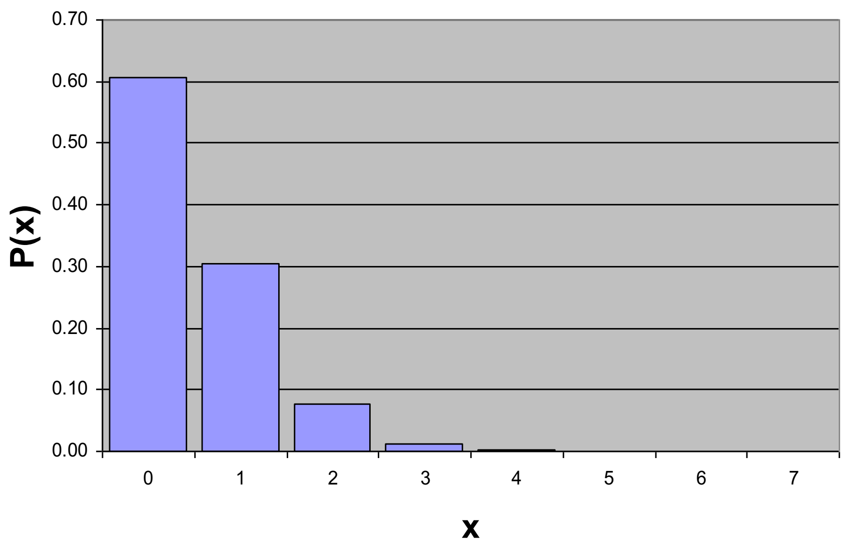
X	**λ = 0.50**
0	0.6065
1	0.3033
2	0.0758
3	0.0126
4	0.0016
5	0.0002
6	0.0000
7	0.0000



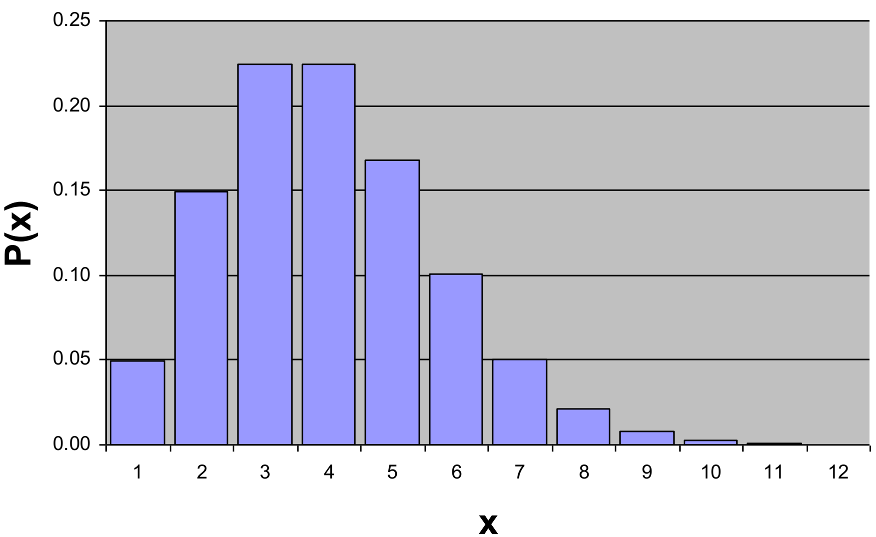
Formato da Distribuição de Poisson

- O Formato da Distribuição de Poisson depende do parâmetro λ :

$\lambda = 0.50$



$\lambda = 3.00$



4.7

Joint Probability Functions

- Uma função de probabilidade conjunta é usada para expressar a probabilidade de X assumir um valor específico x e simultaneamente Y assumir o valor y, como numa função de x e y

$$\boxed{P(x,y) = P(X = x \cap Y = y)}$$

- As probabilidades marginais são

$$\boxed{P(x) = \sum_y P(x,y)}$$

$$\boxed{P(y) = \sum_x P(x,y)}$$

Funções de probabilidade condicional

- A função de probabilidade condicional da variável laeatória Y expressa a probabilidade que Y assuma o valor y quando o valor x é especificado para X.

$$\boxed{P(y \mid x) = \frac{P(x, y)}{P(x)}}$$

- Similarmente, a função de probabilidade condicional de X, dado Y = y é:

$$\boxed{P(x \mid y) = \frac{P(x, y)}{P(y)}}$$

Independência

- As variáveis aleatórias distribuídas conjuntamente X e Y são ditas independentes se e somente se sua função de probabilidade conjunta for o produto de suas funções de probabilidade marginal:

$$\boxed{P(x,y) = P(x)P(y)}$$

  para todos os pares possíveis de valores x e y

- Um conjunto de k variáveis aleatórias são independentes se e somente se

$$\boxed{P(x_1, x_2, \cdots, x_k) = P(x_1)P(x_2)\cdots P(x_k)}$$

Média e variância condicional

- A média condicional é

$$\mu_{Y|X} = E[Y \mid X] = \sum_{Y} (y \mid x) P(y \mid x)$$

- A variância condicional é

$$\sigma^2_{Y|X} = E[(Y - \mu_{Y|X})^2 \mid X] = \sum_{Y} [(y - \mu_{Y|X})^2 \mid x] P(y \mid x)$$

Covariância

- Seja X e Y variáveis aleatorias discretas com médias μ_X e μ_Y

- O valor esperado de $(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)$ é chamado covariância entre X e Y

- Para variáveis aleatórias discretas

$$Cov(X,Y) = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] = \sum_x \sum_y (x-\mu_x)(y-\mu_y)P(x,y)$$

- Uma expressão equivalente é

$$Cov(X,Y) = E(XY) - \mu_x\mu_y = \sum_x \sum_y xyP(x,y) - \mu_x\mu_y$$

Covariância e Independencia

- A covariância mede a força da relação linear entre duas variáveis

- Se duas variáveis aleatórias são estatisticamente independentes, a covariância entre elas é 0

A recíproca não é necessariamente verdadeira

Correlação

- A correlação entre X e Y é:

$$\boxed{\rho = \mathrm{Corr}(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}}$$

- $\rho = 0 \rightarrow$ nenhuma relação linear entre X e Y
- $\rho > 0 \rightarrow$ relação linear positiva entre X e Y
  - quando X é alto (baixo), então Y provavelmente será alto (baixo)
  - $\rho = +1 \rightarrow$ dependência linear positiva perfeita
- $\rho < 0 \rightarrow$ relação linear negativa entre X e Y
  - quando X é alto (baixo), é provável que Y seja baixo (alto)
  - $\rho = -1 \rightarrow$ dependência linear negativa perfeita

Analise de portfólio

- Seja a variável aleatória X o preço da ação A
- Seja a variável aleatória Y o preço da ação B
- O valor de mercado, W, para a carteira é dado pela função linear

$$\boxed{W = aX + bY}$$

(a é o número de ações da ação A,

b é o número de ações do estoque B)

Analise de portfólio

(cont.)

- O valor médio de W é

$$\boxed{\begin{aligned}\mu_W &= E[W] = E[aX + bY] \\ &= a\mu_X + b\mu_Y\end{aligned}}$$

- A variância para W é

$$\boxed{\sigma_W^2 = a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2 + 2ab\mathrm{Cov}(X,Y)}$$

- ou usando a fórmula de correlação

$$\boxed{\sigma_W^2 = a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2 + 2ab\mathrm{Corr}(X,Y)\sigma_X\sigma_Y}$$

Exemplo: retornos de investimento

Retorno por $ 1.000 para dois tipos de investimentos

		Investimento	
$P(x_i y_i)$	**Condição Econômica**	**Fundo Passivo X**	**Fundo Agressivo Y**
.2	Recessão	- $ 25	- $200
.5	Estabilidade	+ 50	+ 60
.3	Expansão	+ 100	+ 350

$E(x) = \mu_x = (-25)(.2) + (50)(.5) + (100)(.3) = 50$

$E(y) = \mu_y = (-200)(.2) + (60)(.5) + (350)(.3) = 95$

Calculando o desvio padrão para retornos de investimento

$P(x_i y_i)$	Condição Econômica	Investimento Fundo Passivo X	Investimento Fundo Agressivo Y
.2	Recessão	- $ 25	- $200
.5	Estabilidade	+ 50	+ 60
.3	Expansão	+ 100	+ 350

$$\sigma_X = \sqrt{(-25-50)^2(0.2)+(50-50)^2(0.5)+(100-50)^2(0.3)}$$
$$= 43.30$$

$$\sigma_y = \sqrt{(-200-95)^2(0.2)+(60-95)^2(0.5)+(350-95)^2(0.3)}$$
$$= 193.71$$

Covariância para retornos de investimento

$P(x_i y_i)$	Condição Econômica	Investimento	
		Fundo Passivo X	Fundo Agressivo Y
.2	Recessão	- \$ 25	- \$200
.5	Estabilidade	+ 50	+ 60
.3	Expansão	+ 100	+ 350

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y) &= (-25-50)(-200-95)(.2)+(50-50)(60-95)(.5)\\ &\quad +(100-50)(350-95)(.3)\\ &= 8250\end{aligned}$$

Exemplo de Portfólio

Investimento X: $\mu_x = 50$ $\sigma_x = 43.30$

Investimento Y: $\mu_y = 95$ $\sigma_y = 193.21$

$\sigma_{xy} = 8250$

Suponha que 40% do portifólio (P) é no Investimento X e 60% é no Investimento Y:

$$E(P) = .4(50) + (.6)(95) = 77$$

$$\sigma_P = \sqrt{(.4)^2(43.30)^2 + (.6)^2(193.21)^2 + 2(.4)(.6)(8250)}$$
$$= 133.04$$

O retorno e a variabilidade da carteira estão entre os valores dos investimentos X e Y considerados individualmente

Interpretando os resultados para retornos de investimento

- O fundo agressivo tem um retorno esperado maior, mas muito mais risco

$$\mu_y = 95 \;>\; \mu_x = 50$$

but

$$\sigma_y = 193.21 \;>\; \sigma_x = 43.30$$

- A Covariância de 8250 indica que os dois investimentos estão positivamente relacionados e irão variar na mesma direção