Teorema de Bayes

Estatística 1 – Barrow – capítulo2

Bayes' theorem

Bayes' theorem is a factual statement about probabilities which in itself is uncontroversial. However, the use and interpretation of the result is at the heart of the difference between **classical** and **Bayesian statistics**. The theorem itself is easily derived from first principles. Equation (2.23) is similar to equation equation (2.14) covered earlier when discussing the multiplication rule:

$$\Pr(A \text{ and } B) = \Pr(A \mid B) \times \Pr(B) \tag{2.23}$$

hence,

$$\Pr(A \mid B) = \frac{\Pr(A \text{ and } B)}{\Pr(B)} \tag{2.24}$$

Expanding both top and bottom of the right-hand side,

$$\Pr(A \mid B) = \frac{\Pr(B \mid A) \times \Pr(A)}{\Pr(B \mid A) \times \Pr(A) + \Pr(B \mid \text{not } A) \times \Pr(\text{not } A)} \tag{2.25}$$

Equation (2.25) is known as **Bayes' theorem** and is a statement about the probability of the event A, conditional upon B having occurred. The following example demonstrates its use.

Exercício

A (6R e 4Y) B (3R e 7Y)

- Duas sacolas contêm bolas vermelhas e amarelas. A sacola A contém seis bolas vermelhas e quatro amarelas, e a sacola B contém três bolas vermelhas e sete amarelas. Uma bola é retirada ao acaso de um saco e revela-se vermelha. Qual é a probabilidade de ter vindo da sacola A?

- Como a sacola A tem relativamente mais bolas vermelhas do que as amarelas do que a sacola B, parece que a sacola A deve ser favorecida. A probabilidade deve ser superior a 0,5. Podemos verificar se está correto.

Solução. P(A/R)? Probabilidade de ter vindo da sacola A dado que é Vermelha

P(A)=0,5; P(B)=0,5 (Probabilidade de vir da sacola A ou B)

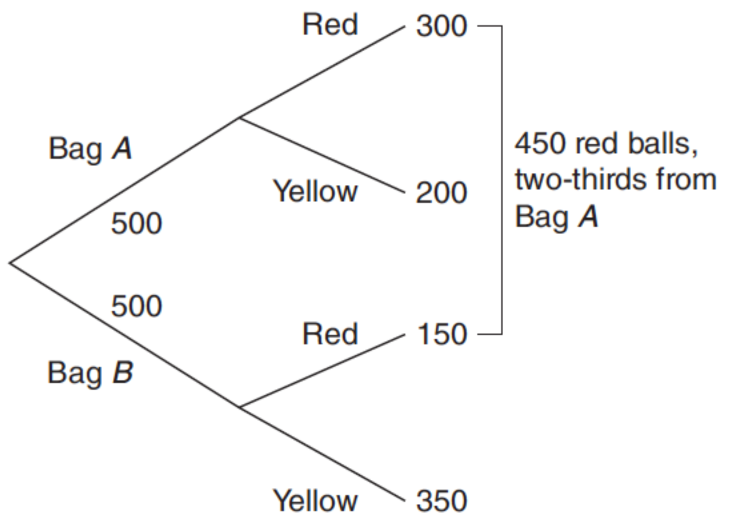
P(R/A)=0,6; P(R/B)=0,3

$$P(A/R) = \frac{P(R/A)\times P(A)}{P(R/A)\times P(A) + P(R/B)\times P(B)}$$

$$P(A/R) = \frac{0{,}6\times 0{,}5}{0{,}6\times 0{,}5 + 0{,}3\times 0{,}5} = 2/3$$

Como esperado: maior que 0,5; Verifique que P(B/R)=1/3

Figure 2.14
Bayes' theorem



Para fixar veja a árvore.

Considere 1000 tentativas de tirar uma bola de uma sacola. Em 500 das tentativas, esperamos selecionar a bolsa A, nas outras 500 tentativas, selecionamos a sacola B (P(A) = P(B) = 0,5). Este é o primeiro estágio do diagrama. Das 500 vezes que selecionamos a sacola A, 300 vezes obtemos uma bola vermelha (P(R/A) = 0,6) e 200 vezes obtemos uma bola amarela. Da sacola B obtemos 150 retiradas de uma bola vermelha (P(R/B) = 0,3) e 350 amarelas.

Assim, em 450 ocasiões, obtemos uma bola vermelha. Dois terços deles (300/450) vieram do saco A, que é P(A/R).

O teorema de Bayes pode ser estendido para cobrir mais de duas sacolas: se houver cinco sacolas, por exemplo, rotuladas de A a E, então

$$P(A/R) = \frac{P(R/A)\times P(A)}{P(R/A)\times P(A) + P(R/B)\times P(B) + \cdots + P(R/E)\times P(E)}$$

Na linguagem bayesiana, P(A), P(B), etc., são conhecidas como as probabilidades anteriores ao sorteio da bola (priors);

P(R /A), P(R /B), etc., são as verossimilhanças (likelihood);

P(A/R), P(B/R), etc., são as probabilidades posteriores. O teorema de Bayes pode, alternativamente, ser expresso como

$$\text{posterior probability} = \frac{\text{likelihood} \times \text{prior probability}}{\sum(\text{likelihood} \times \text{prior probability})} \tag{2.29}$$

This is illustrated below, by reworking the above example in a different format.

	Prior probabilities	Likelihoods	Prior × likelihood	Posterior probabilities
A	0.5	0.6	0.30	$0.30/0.45 = 2/3$
B	0.5	0.3	0.15	$0.15/0.45 = 1/3$
Total			0.45	

The general version of Bayes' theorem may be stated as follows. If there are n events labelled $E_1, \ldots, E_n$, then the probability of the event E_i occurring, given the sample evidence S, is

$$\Pr(E_i \mid S) = \frac{\Pr(S \mid E_i) \times \Pr(E_i)}{\Sigma(\Pr(S \mid E_i) \times \Pr(E_i))} \tag{2.30}$$

O teorema de Bayes é uma declaração factual sobre probabilidades que em si é incontroversa.

No entanto, o uso e a interpretação do resultado estão no centro da diferença entre estatística clássica e bayesiana.

O debate surge sobre a interpretação do teorema. No exemplo visto não há dificuldade porque as declarações de probabilidade podem ser interpretadas como frequências relativas. Se o experimento de selecionar uma sacola ao acaso e escolher uma bola dela for repetido muitas vezes, então em dois terços das ocasiões em que uma bola vermelha é selecionada, a sacola A terá sido escolhida. No entanto, considere uma interpretação alternativa dos símbolos:

A: uma moeda é não viciada

B: uma moeda é viciada

R: o resultado de um lance é cara

Então, dado um lançamento (ou série de lançamentos) de uma moeda, essa evidência pode ser usada para calcular a probabilidade de a moeda ser não viciada. Mas isso não faz sentido segundo a escola frequentista: ou a moeda é boa ou não; não é uma questão de probabilidade. O valor calculado deve ser interpretado como um grau de crença e receber uma interpretação subjetiva.

Exercício

Suponha agora que a sacola A contem cinco bolas vermelhas e três amarelas, e a sacola B contenha uma vermelha e duas amarelas. A única bola sorteada é vermelha. Antes de fazer o cálculo, preveja qual sacola tem mais probabilidade de ser a origem da bola sorteada. Explique por quê. Em seguida, compare sua previsão com o calculado responder.

Solução. P(A/R)? Probabilidade de ter vindo da sacola A dado que é Vermelha

P(A)=0,5; P(B)=0,5 (Probabilidade de vir da sacola A ou B)

P(R/A)=5/8; P(R/B)=1/3

$$P(A/R) = \frac{P(R/A)\times P(A)}{P(R/A)\times P(A) + P(R/B)\times P(B)}$$

$$P(A/R) = \frac{0{,}625\times 0{,}5}{0{,}625\times 0{,}5 + 0{,}333\times 0{,}5} = 0{,}8$$

Como esperado: maior que 0,5;

Exercício Bussab e Morettin 1

Para selecionar seus funcionários, uma empresa oferece um curso de treinamento aos candidatos durante uma semana. No final do curso, eles são submetidos à uma prova e 25% são classificados como bons (B) 50% como médios (M) e 25% como fracos (F) para os requesitos necessários para os postos oferecidos. Para faciliar a seleção a empresa pretende substituir o treinamento por um teste com conhecimentos gerais e específicos. Para isso gostaria de saber a probabilidade de um indivíduo aprovado pelo teste ser considerado fraco, caso fizesse o curso. P(F/A). Assim, neste ano, antes do início do curso, os candidatos foram submetidos ao teste e receberam o conceito aprovado (A) ou reprovado (R). Ao final do curso, obtiveram as seguintes probabilidades condicionais: P(A/B)=0,80   P(A/M)=0,40   P(A/F)=0,20

$$P(F/A) = \frac{P(A/F)\times P(F)}{P(A/F)\times P(A) + P(A/M)\times P(M) + P(A/B)\times P(B)}$$

$$P(F/A) = \frac{0{,}20\times 0{,}25}{0{,}2\times 0{,}25 + 0{,}5\times 0{,}5 + 0{,}8\times 0{,}25} = 0{,}10$$

A probabilidade de contratar um indivíduo fraco que tenha passado no teste é de 10%

Exercício Bussab e Morettin 2 – O TB fornece um mecanismo de atualizar probabilidades

- A admisnistração de um fundo de investimentos em acões pretende divulgar, após o encerramento do pregão, a probabilidade de queda de um índice da bolsa no dia seguinte, basendo-se nas informações disponíveis até o momento. Suponha que a previsão inicial seja de 0,10. Após o encerramento do pregão, nova informação sugere que sugere uma alta do dólar frente ao real. A experiência passada indica que, quando houve queda da bolsa no dia seguinte, 20% da vezes foram precedidas por esse tipo de notícia, enquanto, nos dias em que a bolsa este em alta, apenas 5% das vezes houve esse tipo de notícia no dia anterior.

Chamando E = “queda da bolsa” e Ec = alta da bolsa”, as suas probabilidades a priori respectivas são P(E)=0,10 e P(Ec)= 0,90.

Se B indicar “alta do dólar”, então as verossimilhanças são dadas por

P(B/E)=0,20 e P(B/Ec)=0,05

$$P(E/B) = \frac{P(B/E)\times P(E)}{P(B/E)\times P(E) + P(B/E_C)\times P(E_C)}$$

$$P(F/A) = \frac{0{,}10\times 0{,}20}{0{,}1\times 0{,}20 + 0{,}9\times 0{,}05} = 0{,}31$$

Controle de Qualidade - Unicamp

Uma companhia multinacional tem três fábricas que produzem o mesmo tipo de produto. A fábrica I é responsável por 30% do total produzido, a fábrica II produz 45% do total, e o restante vem da fábrica III. Cada uma das fábricas, no entanto, produz uma proporção de produtos que não atendem aos padrões estabelecidos pelas normas internacionais. Tais produtos são considerados “defeituosos” e correspondem a 1%, 2% e 1,5%, respectivamente, dos totais produzidos por fábrica. No centro de distribuição, é feito o controle de qualidade da produção combinada das fábricas.

Qual á a probabilidade de encontrar um produto defeituoso durante a inspeção de qualidade?

Qual á a probabilidade de encontrar um produto defeituoso durante a inspeção de qualidade?

Seja o evento A = {Produto Defeituoso} e Fi = {Produto da Fábrica i}.

Sabemos, pelo enunciado, que P(F1) = 0,3; P(F2) = 0,45; P(F3) = 0,25.

Além disso, sabemos que

P(A|F1) = 0,01, P(A|F2) = 0,02 e P(A|F3) = 0,015. Então, pela lei da

probabilidade total, P(A) = P(A|F1)P(F1) + P(A|F2)P(F2) + P(A|F3)P(F3)

$= = 0{,}3 * 0{,}01 + 0{,}45 * 0{,}02 + 0{,}25 * 0{,}015 = 0{,}01575$

Se durante a inspeção, encontramos um produto defeituoso, qual é a probabilidade que ele tenha sido produzido na fábrica II?

$P(F2/A)=?$

Se durante a inspeção, encontramos um produto defeituoso, qual é a probabilidade que ele tenha sido produzido na fábrica II?

P(F2/A)=?

Aqui, aplicaremos o Teorema de Bayes usando o item anterior para encontrar P(A):

$$P(F2|A) = P(A|F2)P(F2)\ /P(A) = 0{,}02 * 0{,}45/0{,}01575 = 0{,}5714$$