Statistics for Business and Economics

Capítulo 03 – Aula 04

Probabilidade

Objetivos do Capítulo

Depois de concluir este capítulo, você deverá ser capaz de:

- **Explicar conceitos e definições básicas de probabilidade**
- **Use um diagrama de Venn ou diagrama de árvore para ilustrar probabilidades simples**
- **Aplicar regras comuns de probabilidade**
- **Calcular probabilidades condicionais**
- **Determinar se os eventos são estatisticamente independentes**
- **Use o teorema de Bayes para probabilidades condicionais**

3.1

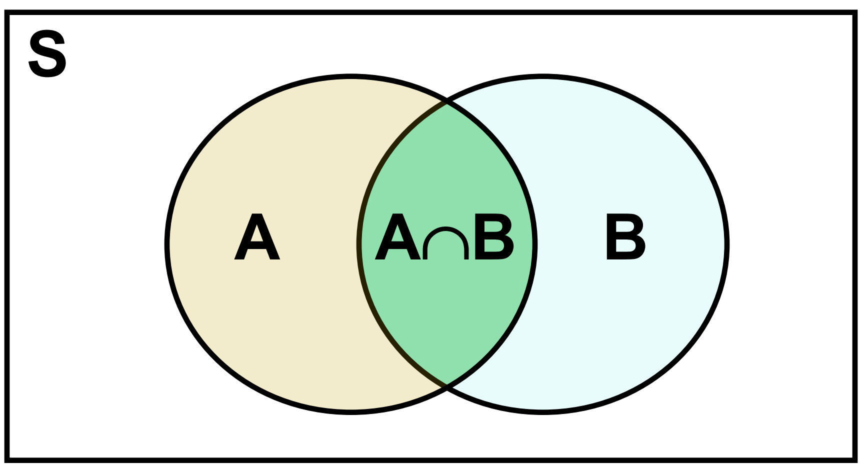
Termos Importantes

- Experimento Aleatório – um processo que leva a um resultado incerto
- Resultado básico - um resultado possível de um experimento aleatório
- Espaço Amostral – a coleção de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório
- Evento – qualquer subconjunto de resultados básicos do espaço amostral

Termos Importantes

(cont)

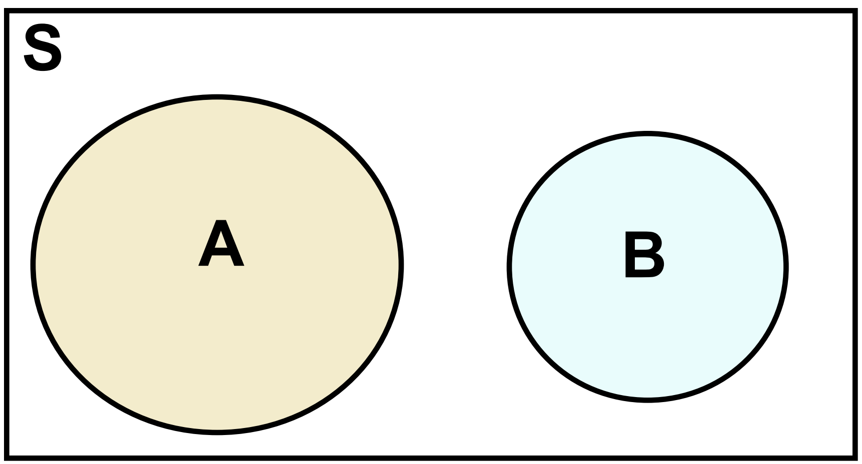
- Intersecção de Eventos – Se A e B são dois eventos numa amostra do espaço amostral S, então a intersecção, A ∩ B, é o conjunto de todos os resultados de S que pertencem a amobs A e B



Termos Importantes

(cont)

- A e B são Eventos Mutuamente Exclusivos se eles não tem resultados comuns
  - ou seja: o conjunto A ∩ B é vazio

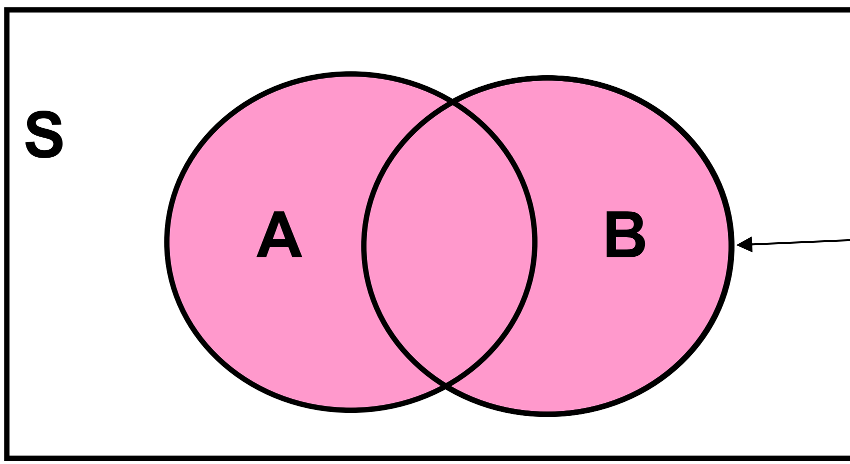


Termos Importantes

(cont.)

- União de Eventos – Se A e B são dois eventos num espaço amostral S, então a união, A ∪ B, é o conjunto de todos os resultados em S que pertence ou a A ou a B.

A ou B

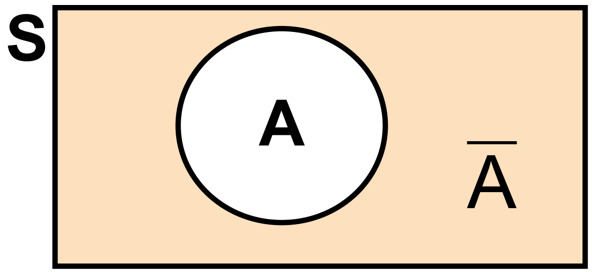


A área pintada representa A ∪ B

Termos Importantes

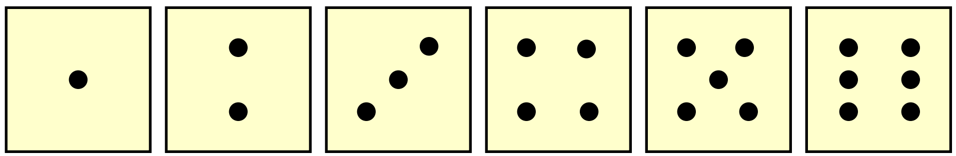
(cont.)

- Eventos $E_1, E_2, \ldots E_k$ são Coletivamente Eventos Exaustivos se $E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_k = S$
  - Ou seja: Os eventos cobrem completamente o espaço amostral
- O Complemento de um evento A é o conjunto de todos os resultados básicos em um espaço amostral que não pertence a A. O complemento é denominado $\overline{A}$



Exemplos

Seja o Espaço Amostral a coleção de todos os possíveis resultados de uma jogada de um dado:



S = [1, 2, 3, 4, 5, 6]

Seja A o evento "Número de jogadas é par"

Seja B o evento "Número de jogadas é pelo menos 4"

Então A = [2, 4, 6] e B = [4, 5, 6]

Exemplos

(cont)

S = [1, 2, 3, 4, 5, 6] | **A = [2, 4, 6]** | **B = [4, 5, 6]**

Complementos:

$$\overline{A} = [1, 3, 5] \qquad \overline{B} = [1, 2, 3]$$

Intersecções:

$$A \cap B = [4, 6] \qquad \overline{A} \cap B = [5]$$

Uniões:

$$A \cup B = [2, 4, 5, 6]$$

$$A \cup \overline{A} = [1, 2, 3, 4, 5, 6] = S$$

Exemplos

(cont)

S = [1, 2, 3, 4, 5, 6]	A = [2, 4, 6]	B = [4, 5, 6]

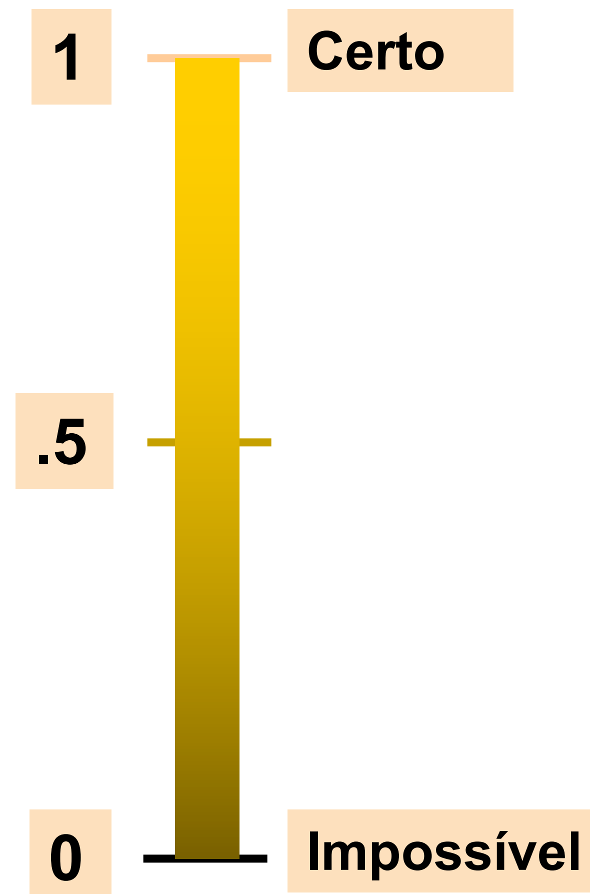
- Mutuamente exclusivos:
  - A e B não são mutuamente exclusivos
    - Os resultados 4 e 6 são comuns a ambos

    - Coletivamente exaustivo:
    - A e B não são coletivamente exaustivos
    - A U B não contém 1 ou 3

Probabilidade

- Probabilidade – a chance que um evento incerto ocorrerá (sempre entre 0 e 1)

$0 \leq P(A) \leq 1$ Para qualquer evento A



Avaliando probabilidade

- Existem três abordagens para avaliar a probabilidade de um evento incerto:

1. probabilidade clássica

$$\text{probability of event A} = \frac{N_A}{N} = \frac{\text{number of outcomes that satisfy the event}}{\text{total number of outcomes in the sample space}}$$

- Assume que todos os resultados no espaço amostral são igualmente prováveis de ocorrer

Contando os resultados possíveis

- Use a fórmula de combinações para determinar o número de combinações de n itens tomados k de cada vez

$$C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- sendo
  - $n! = n(n-1)(n-2)\ldots(1)$
  - $0! = 1$ por definição

Avaliando probabilidade

Três abordagens (continuação)

2. probabilidade de frequência relativa

$$\text{probability of event A} = \frac{n_A}{n} = \frac{\text{number of events in the population that satisfy event A}}{\text{total number of events in the population}}$$

o limite da proporção de vezes que um evento A ocorre em um grande número de tentativas, n

3. probabilidade subjetiva

uma opinião individual ou crença sobre a probabilidade de ocorrência

Postulados de Probabilidade

1. Se A é qualquer evento no espaço amostral S, então

$$\boxed{0 \le P(A) \le 1}$$

2. Seja A um evento em S e Oi represente os resultados básicos. Então

$$\boxed{P(A) = \sum_{A} P(O_i)}$$

(a notação significa que a soma é sobre todos os resultados básicos em A)

3. $\boxed{P(S) = 1}$

Regras de Probabilidade

- A regra do complemento:

$$\boxed{P(\overline{A}) = 1 - P(A)} \qquad \text{i.e., } P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

- A regra da adição:
- A probabilidade da união de dois eventos é

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Uma Tabela de Probabilidade

Probabilidades e probabilidades conjuntas para dois eventos A e B são resumidas nesta tabela:

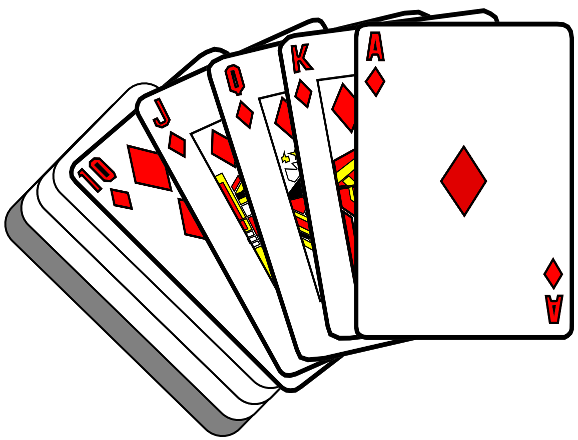
	B	$\overline{B}$	
A	$P(A \cap B)$	$P(A \cap \overline{B})$	$P(A)$
$\overline{A}$	$P(\overline{A} \cap B)$	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$	$P(\overline{A})$
	$P(B)$	$P(\overline{B})$	$P(S) = 1.0$

Exemplo de regra de adição

Considere um baralho padrão de 52 cartas, com quatro naipes: ♥ ♣ ♦ ♠

Seja o evento A = a carta é um Ás

Seja o evento B = a carta é de um naipe vermelho



Exemplo de regra de adição

(cont.)

$$P(Red \cup Ace) = P(Red) + P(Ace) - P(Red \cap Ace)$$

$$= 26/52 + 4/52 - \boxed{2/52} = 28/52$$

Não contabilize Red duas vezes!

Type	Color		Total
	Red	Black	
Ace	2	2	4
Non-Ace	24	24	48
Total	26	26	52

Probabilidade Condicional

- Uma probabilidade condicional é a probabilidade de um evento, dado que outro evento ocorreu:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

A probabilidade condicional de A dado que B ocorreu

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

A probabilidade condicional de B dado que A ocorreu

Exemplo de Probabilidade Condicional

Dos carros em um estacionamento de usados, 70% possuem ar condicionado (AC) e 40% possuem CD player (CD). 20% dos carros têm ambos.

- Qual é a probabilidade de um carro ter um CD player, dado que ele tem CA?

  ou seja, queremos encontrar P(CD | AC)

Exemplo de Probabilidade Condicional

(cont)

- **Dos carros em um estacionamento de usados, 70% possuem ar condicionado (AC) e 40% possuem CD player (CD). 20% dos carros têm ambos.**

	CD	No CD	Total
AC	.2	.5	.7
No AC	.2	.1	.3
Total	.4	.6	1.0

$$P(CD \mid AC) = \frac{P(CD \cap AC)}{P(AC)} = \frac{.2}{.7} = .2857$$

Exemplo de Probabilidade Condicional

(continued)

- **Dado AC, consideramos apenas a linha superior (70% dos carros). Destes, 20% possuem CD player. 20% de 70% é 28,57%.**

	CD	No CD	Total
AC	.2	.5	.7
No AC	.2	.1	.3
Total	.4	.6	1.0

$$P(CD \mid AC) = \frac{P(CD \cap AC)}{P(AC)} = \frac{.2}{.7} = .2857$$

Regra da Multiplicação

- Regra da Multiplicação para dois eventos A e B:

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A|B)P(B)}$$

- também

$$\boxed{P(A \cap B) = P(B|A)P(A)}$$

Exemplo de regra de multiplicação

$$P(\text{Red} \cap \text{Ace}) = P(\text{Red} \mid \text{Ace})P(\text{Ace})$$

$$= \left(\frac{2}{4}\right)\left(\frac{4}{52}\right) = \frac{2}{52}$$

$$= \frac{\text{number of cards that are red and ace}}{\text{total number of cards}} = \frac{2}{52}$$

Type	Color		Total
	Red	Black	
Ace	2	2	4
Non-Ace	24	24	48
Total	26	26	52

Independência Estatística

- Dois eventos são estatisticamente independentes se e somente se:

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A)P(B)}$$

  - Os eventos A e B são independentes quando a probabilidade de um evento não é afetada pelo outro evento
  - Se A e B são independentes, então

$$\boxed{P(A | B) = P(A)} \quad \textbf{se } P(B)>0$$

$$\boxed{P(B | A) = P(B)} \quad \textbf{se } P(A)>0$$

Exemplo de Independência Estatística

- **Dos carros em um estacionamento de usados, 70% possuem ar condicionado (AC) e 40% possuem CD player (CD). 20% dos carros têm ambos.**

	CD	No CD	Total
AC	.2	.5	.7
No AC	.2	.1	.3
Total	.4	.6	1.0

- **Os eventos AC e CD são estatisticamente independentes?**

Exemplo de Independência Estatística

(cont)

	CD	No CD	Total
AC	.2	.5	.7
No AC	.2	.1	.3
Total	.4	.6	1.0

$P(AC \cap CD) = 0.2$

$$\left.\begin{array}{l} P(AC) = 0.7 \\ P(CD) = 0.4 \end{array}\right\} P(AC)P(CD) = (0.7)(0.4) = 0.28$$

$P(AC \cap CD) = 0.2 \neq P(AC)P(CD) = 0.28$

Portanto, os dois eventos não são estatisticamente independentes

Probabilidades Bivariadas

Resultados para eventos bivariados:

	B_1	B_2	. . .	B_k
A_1	$P(A_1 \cap B_1)$	$P(A_1 \cap B_2)$	. . .	$P(A_1 \cap B_k)$
A_2	$P(A_2 \cap B_1)$	$P(A_2 \cap B_2)$	. . .	$P(A_2 \cap B_k)$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
A_h	$P(A_h \cap B_1)$	$P(A_h \cap B_2)$	. . .	$P(A_h \cap B_k)$

Probabilidades conjuntas e marginais

- A probabilidade de um evento conjunto, A ∩ B:

$$P(A \cap B) = \frac{\text{number of outcomes satisfying A and B}}{\text{total number of elementary outcomes}}$$

- Calculando uma probabilidade marginal:

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \cdots + P(A \cap B_k)$$

- Onde B1, B2, …, Bk são k eventos mutuamente exclusivos e coletivamente exaustivos

Exemplo de Probabilidade Marginal

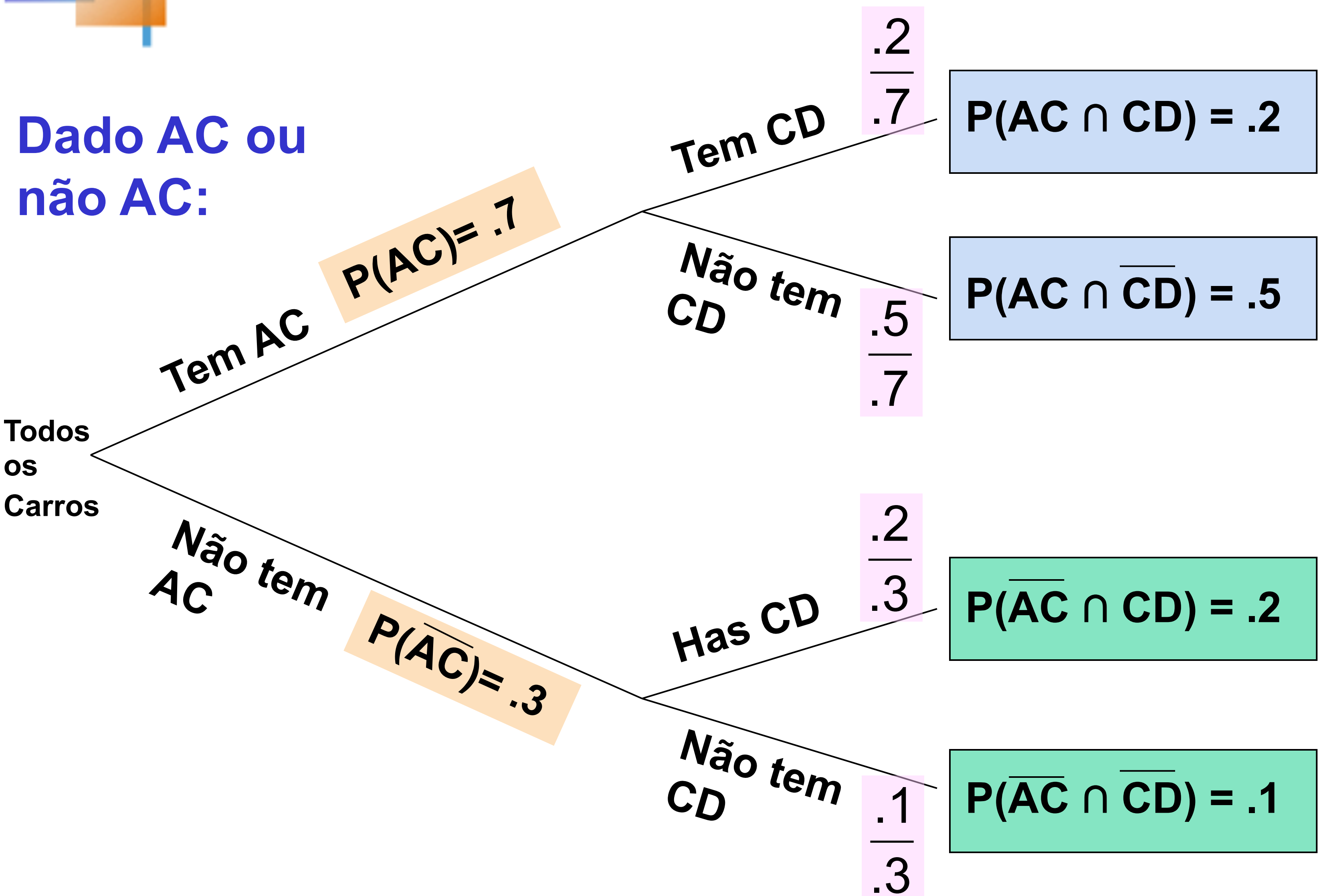
P(Ace)

$$= P(\text{Ace} \cap \text{Red}) + P(\text{Ace} \cap \text{Black}) = \frac{2}{52} + \frac{2}{52} = \frac{4}{52}$$

Type	Color: Red	Color: Black	Total
Ace	**2**	**2**	**4**
Non-Ace	**24**	**24**	**48**
Total	**26**	**26**	**52**

Usando um diagrama de árvore

Dado AC ou não AC:



Oddies (Changes)

- Chances a favor de um determinado evento são dadas pela razão entre a probabilidade do evento dividida pela probabilidade de seu complemento
- As chances a favor de A são

$$\boxed{\text{odds} = \frac{P(A)}{1\text{-}P(A)} = \frac{P(A)}{P(\overline{A})}}$$

Odds: Exemplo

- Calcule a probabilidade de ganhar se as chances de ganhar forem de 3 para 1:

$$\text{odds} = \frac{3}{1} = \frac{P(A)}{1\text{-}P(A)}$$

  - Agora multiplique ambos os lados por 1 – P(A) e resolva para P(A):

$$3 \text{ x } (1\text{-} P(A)) = P(A)$$

$$3 - 3P(A) = P(A)$$

$$3 = 4P(A)$$

$$\boxed{P(A) = 0.75}$$

Taxa de superenvolvimento

- A probabilidade do evento A_1 condicional no evento B_1 dividida pela probabilidade de A_1 condicional na atividade B_2 é definida como a razão de superenvolvimento: $\boxed{\dfrac{P(A_1|B_1)}{P(A_1|B_2)}}$
- Uma taxa de superenvolvimento maior que 1 implica que o evento A_1 aumenta a razão de chances condicional em favor de B_1:

$$\boxed{\frac{P(B_1|A_1)}{P(B_2|A_1)} > \frac{P(B_1)}{P(B_2)}}$$

Teorema de Bayes

$$P(E_i \mid A) = \frac{P(A \mid E_i)P(E_i)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(A \mid E_i)P(E_i)}{P(A \mid E_1)P(E_1) + P(A \mid E_2)P(E_2) + \ldots + P(A \mid E_k)P(E_k)}$$

- onde:

  E_i = i^{th} evento de k mutuamente exclusivo e coletivamente exaustivos

  A = novo evento que pode impactar $P(E_i)$

Exemplo do Teorema de Bayes

- Uma empresa de perfuração estimou uma chance de 40% de encontrar petróleo para seu novo poço.
- Um teste detalhado foi agendado para mais informações. Historicamente, 60% dos poços bem-sucedidos tiveram testes detalhados e 20% dos poços malsucedidos tiveram testes detalhados.
- Dado que este poço foi programado para ... e detalhado, qual é a probabilidade de que ... seja bem-sucedido?

Exemplo do Teorema de Bayes

(continued)

- Let S = Poço bem sucedido

  U = Poço mal sucedido
- P(S) = .4 , P(U) = .6 (probabilidades anteriores)
- Defina o evento de teste detalhado como D
- Probabilidades condicionais:
- P(D|S) = 0,6. P(D|U) = 0,2
- O objetivo é encontrar P(S|D)

Exemplo do Teorema de Bayes

(cont)

Ausando o Teorema de Bayes

$$P(S|D) = \frac{P(D|S)P(S)}{P(D|S)P(S) + P(D|U)P(U)}$$

$$= \frac{(.6)(.4)}{(.6)(.4) + (.2)(.6)}$$

$$= \frac{.24}{.24 + .12} = .667$$

Portanto, a probabilidade revisada de sucesso (da estimativa original de 0,4), dado que este poço foi programado para um teste detalhado, é 0,667