Resolução dos exercícios finais da primeira aula de Geometria Analítica

Questão 1: Sabendo que $\vec{x} + \vec{y} = \vec{u}$ e $\vec{x} - \vec{y} = \vec{v}$, podemos somar essas equações e obter que

$$(\vec{x} + \vec{y}) + (\vec{x} - \vec{y}) = \vec{u} + \vec{v} .$$

A associatividade da soma vetorial nos permite então escrever

$$\vec{x} + (\vec{y} + \vec{x}) - \vec{y} = \vec{u} + \vec{v} .$$

Pela propriedade comutativa da soma vetorial, por sua vez, a expressão acima equivale a

$$\vec{x} + (\vec{x} + \vec{y}) - \vec{y} = \vec{u} + \vec{v} .$$

Novamente, a propriedade associativa da soma de vetores garante que

$$(\vec{x} + \vec{x}) + (\vec{y} - \vec{y}) = \vec{u} + \vec{v} .$$

Sabendo que $\vec{x} + \vec{x} = 2\vec{x}$ e que $\vec{y} - \vec{y} = \vec{y} + (-\vec{y}) = \vec{0}$ (pois $-\vec{y}$ é o vetor oposto a $\vec{y}$), a expressão acima se reduz a

$$2\vec{x} = 2\vec{x} + \vec{0} = \vec{u} + \vec{v} ,$$

pois o vetor nulo $\vec{0}$ é o elemento neutro da soma vetorial.

Multiplicando os dois lados da igualdade acima por $1/2$, a associatividade do produto por escalar nos garante que

$$\vec{x} = 1 \cdot \vec{x} = \left(\frac{1}{2} \cdot 2\right)\vec{x} = \frac{1}{2} \cdot (2\vec{x}) = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}).$$

Por conta da propriedade distributiva do produto por escalar, podemos ainda escrever

$$\vec{x} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}.$$

Para determinar o vetor $\vec{y}$, por sua vez, lembramos que $\vec{x} + \vec{y} = \vec{u}$. Então, somando o oposto de $\vec{x}$ aos dois lados dessa igualdade e aplicando a propriedade associativa da soma vetorial, tem-se que

$$\begin{aligned}
\vec{y} &\overset{(1)}{=} \vec{0} + \vec{y} \\
&= [(-\vec{x}) + \vec{x}] + \vec{y} \\
&= (-\vec{x}) + (\vec{x} + \vec{y}) \\
&= (-1 \cdot \vec{x}) + \vec{u} \\
&= (-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}\right) + \vec{u}
\end{aligned}$$

$$\overset{(2)}{=} \left((-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\vec{u}\right) + (-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\vec{v}\right)\right) + \vec{u}$$

$$\overset{(3)}{=} \left(-\frac{1}{2}\vec{u} + \left(-\frac{1}{2}\vec{v}\right)\right) + \vec{u}$$

$$\overset{(4)}{=} \left(\left(-\frac{1}{2}\vec{v}\right) + \left(-\frac{1}{2}\vec{u}\right)\right) + \vec{u}$$

$$\overset{(5)}{=} \left(-\frac{1}{2}\vec{v}\right) + \left[\left(-\frac{1}{2}\vec{u}\right) + \vec{u}\right]$$

$$\overset{(6)}{=} \left(-\frac{1}{2}\vec{v}\right) + \left(-\frac{1}{2} + 1\right)\vec{u}$$

$$= -\frac{1}{2}\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{u} \overset{(7)}{=} \frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}.$$

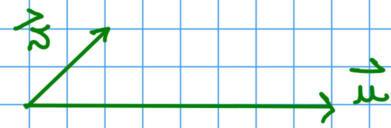
Nesses cálculos, a igualdade (1) segue da propriedade do vetor nulo como elemento neutro aditivo, as igualdades (2) e (6) dizem respeito à distributividade do produto por escalar e a igualdade (3) se refere à sua associatividade.

Finalmente, as igualdades (4) e (5) empregam a comutatividade e a associatividade da soma vetorial, respectivamente. A comutatividade é também utilizada em (7).

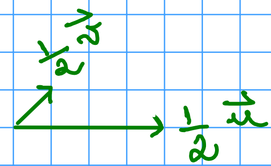
Em resumo, a solução do sistema é dada por

$$\vec{x} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} \quad \text{e} \quad \vec{y} = \frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}.$$

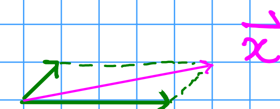
Questão 2: Vamos supor que $\vec{u}$ estão representados como ao lado.



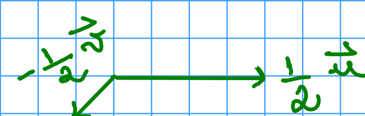
Calculamos então $\frac{1}{2}\vec{u}$ e $\frac{1}{2}\vec{v}$ reduzindo o comprimento desses vetores pela metade, mas preservando a direção e o sentido, como na figura abaixo:



Aplicando a Regra do Paralelogramo, então, o vetor $\vec{x}$ pode ser representado como em rosa.



O vetor $-\frac{1}{2}\vec{v}$, por sua vez, é obtido pela alteração do sentido do vetor $\frac{1}{2}\vec{v}$, mas preservando sua direção e seu comprimento, como na representação ao lado.



O vetor $\vec{y}$, então, pode ser representado como em laranja, pela Regra do Paralelogramo.