33ª aula SMA0300 GA

29ª aula síncrona – Semana 16

Miriam Manoel

ICMC/USP, São Carlos - SP

Terça-feira 30/06/2020

Na aula de hoje:

- **EPPA 29 (Exercício 16 lista 3)**
- **Coordenadas polares**
- **Coordenadas Cilíndricas**
- **Coordenadas Esféricas**

- **Proposta do EPPA 30 (Exercício 21 lista 3)**

EPPA 29 – ex.16 – lista 3

a) $r = a \cdot \cos\theta, a \neq 0$

Passando a equação de coordenadas polares para uma de coordenadas cartesianas:

$$r = a \cdot \cos\theta$$
$$\boldsymbol{r^2} = a \cdot \boldsymbol{r \cdot \cos\theta}$$

Sabendo que $r^2 = \boldsymbol{x^2} + \boldsymbol{y^2}$ e $r \cdot \cos\theta = \boldsymbol{x}$, temos:

$$x^2 + y^2 = ax$$
$$x^2 - ax + y^2 = 0$$

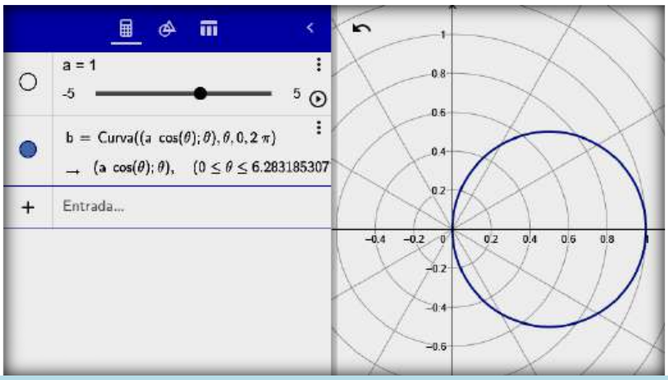
Pelo método de completar o trinômio quadrado perfeito:

$$x^2 - ax + \frac{a^2}{4} + y^2 = \frac{a^2}{4}$$

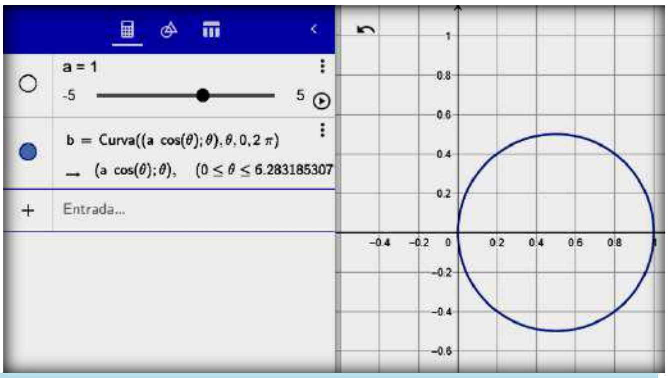
$$\left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \left(-\frac{a}{2}\right) + \left(-\frac{a}{2}\right)^2\right) + y^2 = \frac{a^2}{4}$$

$$\boldsymbol{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}}$$

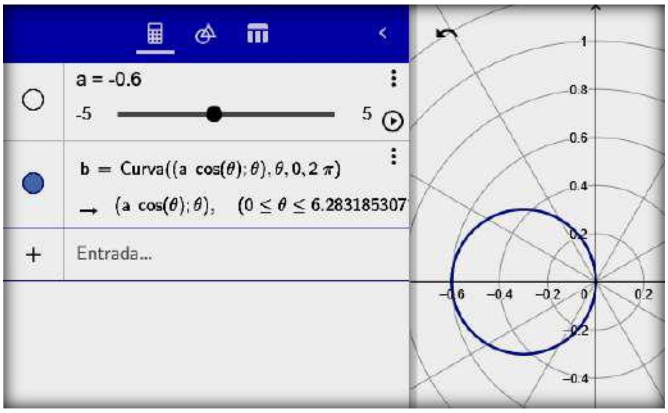
Equação da curva em coordenadas cartesianas.



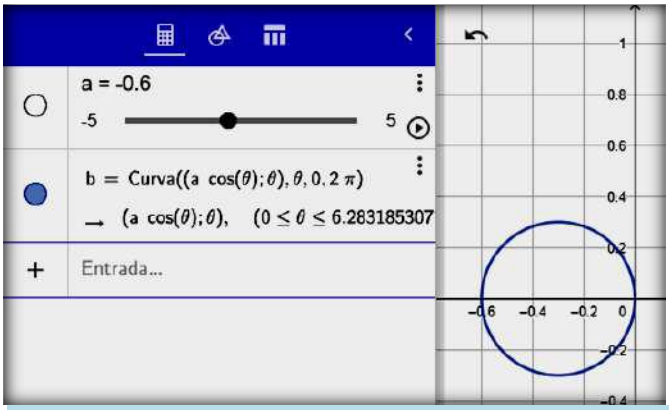
A curva, para $a = 1$, no plano polar.



A curva, para $a = 1$, no plano cartesiano.



A curva, para $a = -0{,}6$, no plano polar.



A curva, para $a = -0{,}6$, no plano cartesiano.

Trata-se de uma circunferência de raio igual a $\left|\frac{a}{2}\right|$ e centro no ponto $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ do plano cartesiano.

O período, nesse caso, é $\pi\, rad$: quando o ângulo θ varia de 0 a π radianos, obtemos a circunferência completa (de 0 a $\frac{\pi}{2}$ temos a meia circunferência acima do eixo x; de $\frac{\pi}{2}$ a π radianos temos a meia circunferência abaixo do eixo x).

b) $r = a \cdot \operatorname{sen}\theta,\ a \neq 0$

Passando a equação de coordenadas polares para uma de coordenadas cartesianas:

$$r = a \cdot \operatorname{sen}\theta$$
$$\boldsymbol{r^2} = a \cdot \boldsymbol{r \cdot \operatorname{sen}\theta}$$

Sabendo que $r^2 = \boldsymbol{x^2 + y^2}$ e $r \cdot \operatorname{sen}\theta = \boldsymbol{y}$, temos:

$$x^2 + y^2 = ay$$
$$x^2 - ay + y^2 = 0$$

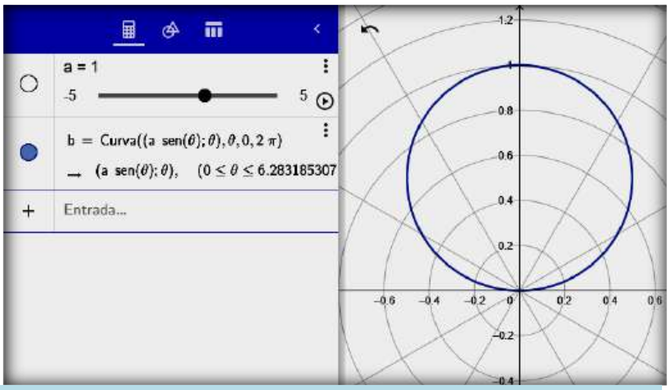
Pelo método de completar o trinômio quadrado perfeito:

$$x^2 + y^2 - ay + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4}$$

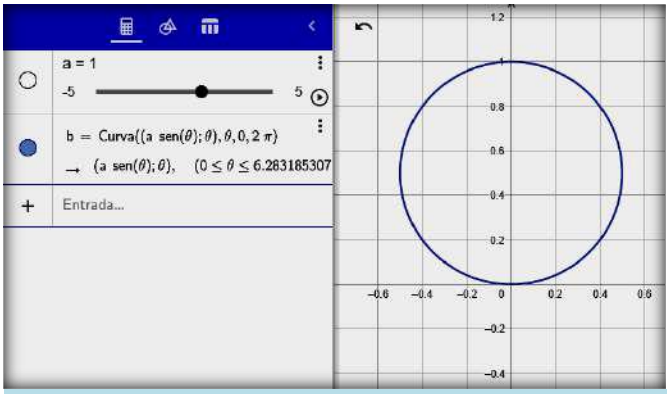
$$x^2 + \left(y^2 + 2 \cdot y \cdot \left(-\frac{a}{2}\right) + \left(-\frac{a}{2}\right)^2\right) = \frac{a^2}{4}$$

$$\boldsymbol{x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}}$$

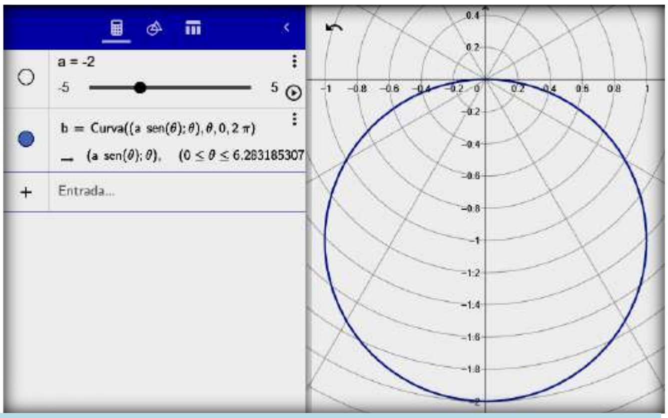
Equação da curva em coordenadas cartesianas.



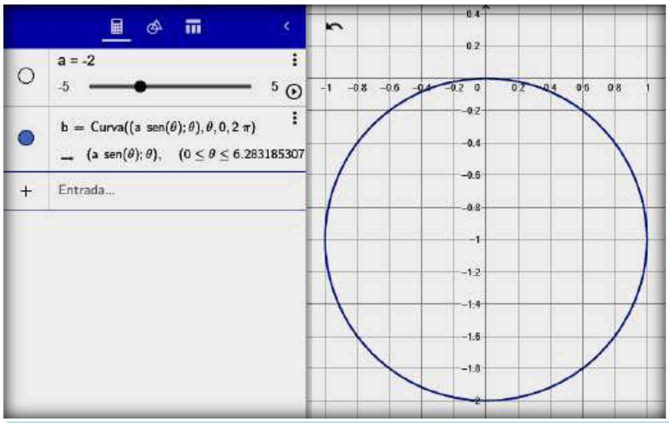
A curva, para $a = 1$, no plano <u>polar</u>.



A curva, para $a = 1$, no plano <u>cartesiano</u>.



A curva, para $a = -2$, no plano <u>polar</u>.



A curva, para $a = -2$, no plano <u>cartesiano</u>.

Trata-se de uma <u>circunferência</u> de raio igual a $\left|\frac{a}{2}\right|$ e centro no ponto $\left(0, \frac{a}{2}\right)$ do plano cartesiano.

O período, novamente, é $\pi\, rad$: quando o ângulo θ varia de 0 a π radianos, obtemos a circunferência completa (de 0 a $\frac{\pi}{2}$ temos a meia circunferência a direita do eixo y; de $\frac{\pi}{2}$ a π radianos temos a meia circunferência a esquerda do eixo y).

c) $r = a \cdot \cos\theta + b \cdot \operatorname{sen}\theta,\ a \neq 0$

Passando a equação de coordenadas polares para uma de coordenadas cartesianas:

$$r = a\cos\theta + b\operatorname{sen}\theta$$

$$r^2 = r(a\cos\theta + b\operatorname{sen}\theta) \Rightarrow \boldsymbol{r^2} = a \cdot \boldsymbol{r\cos\theta} + b \cdot \boldsymbol{r\operatorname{sen}\theta}$$

Sendo $r^2 = \boldsymbol{x^2} + \boldsymbol{y^2}$, $r \cdot \cos\theta = \boldsymbol{x}$ e $r \cdot \operatorname{sen}\theta = \boldsymbol{y}$, temos:

$$x^2 + y^2 = ax + by$$
$$x^2 - ax + y^2 - by = 0$$

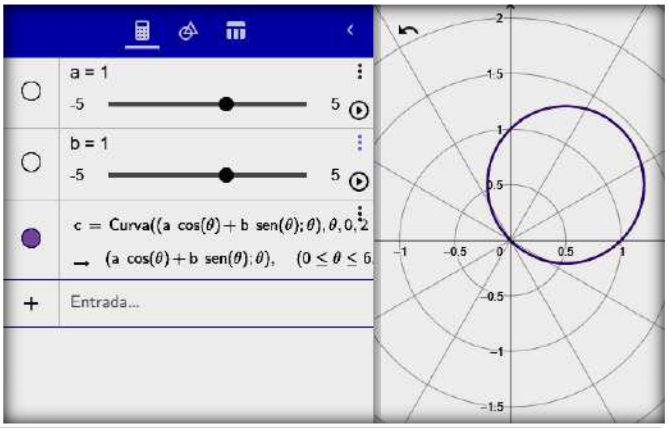
Pelo método de completar o trinômio quadrado perfeito:

$$x^2 - ax + \frac{a^2}{4} + y^2 - by + \frac{b^2}{4} = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}$$

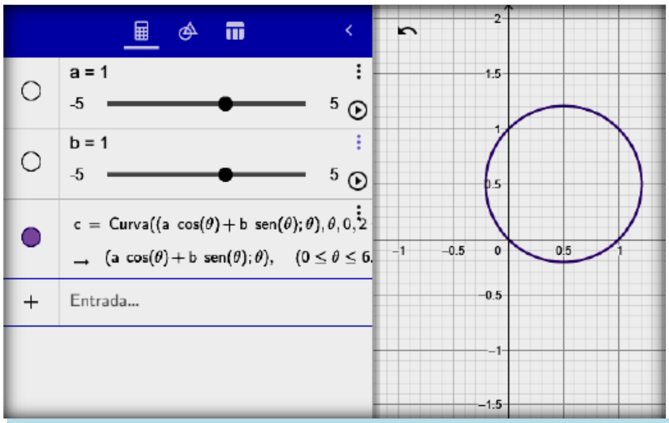
$$\left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \left(-\frac{a}{2}\right) + \frac{a^2}{4}\right) + \left(y^2 + 2 \cdot y \cdot \left(-\frac{b}{2}\right) + \frac{b^2}{4}\right) = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}$$

$$\boldsymbol{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{4}}$$

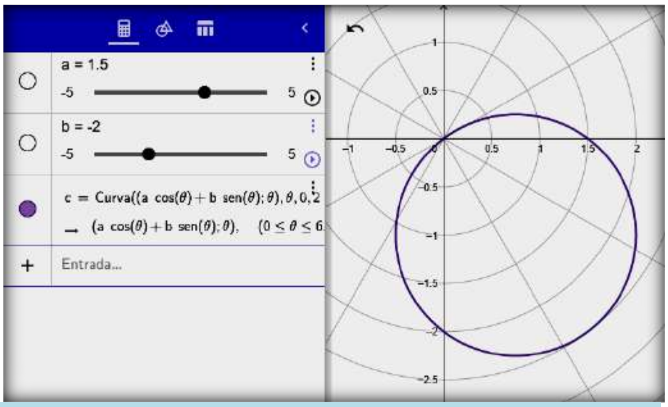
Equação da curva em coordenadas cartesianas.



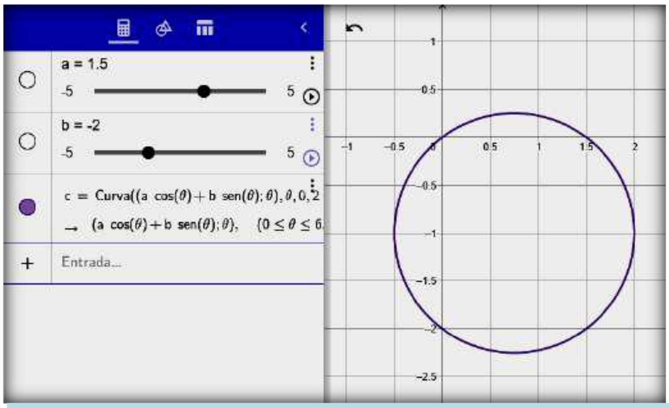
A curva, para $a = 1$ e $b = 1$, no plano polar.



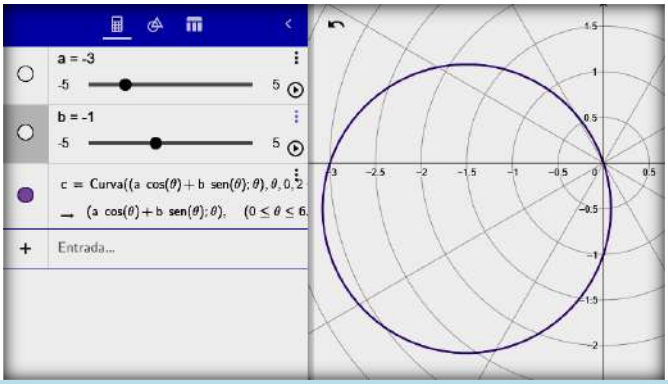
A curva, para $a = 1$ e $b = 1$, no plano cartesiano.

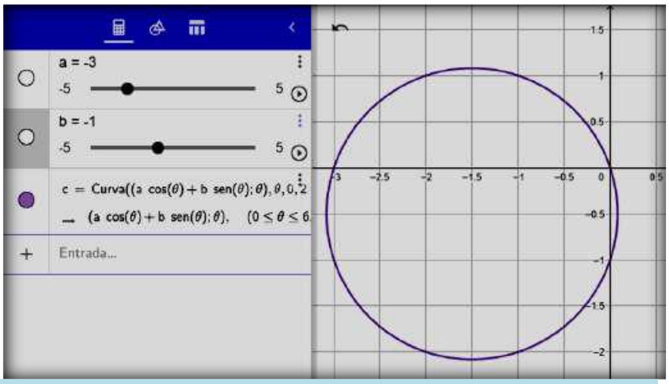


A curva, para $a = 1{,}5$ e $b = -2$, no plano polar.



A curva, para $a = 1{,}5$ e $b = -2$, no plano cartesiano.





A curva, para $a = -3$ e $b = -1$, no plano polar.

A curva, para $a = -3$ e $b = -1$, no plano cartesiano.

Trata-se de uma circunferência de raio igual a $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$ e centro no ponto $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ do plano cartesiano.

O período, novamente, é $\pi\, rad$: quando o ângulo θ varia de 0 a π radianos, obtemos a circunferência completa.

d) $r = 3 + 2\cos\theta$

Passando a equação de coordenadas polares para uma de coordenadas cartesianas:

$$r = 3 + 2\cos\theta$$

$$\boldsymbol{r^2} = 3\boldsymbol{r} + 2\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{\cos\theta}$$

Sendo $r^2 = \boldsymbol{x^2} + \boldsymbol{y^2}$ e $r \cdot \cos\theta = \boldsymbol{x}$, temos:

$$x^2 + y^2 = 3\sqrt{x^2+y^2} + 2x$$

$$x^2 - 2x + y^2 = 3\sqrt{x^2+y^2}$$

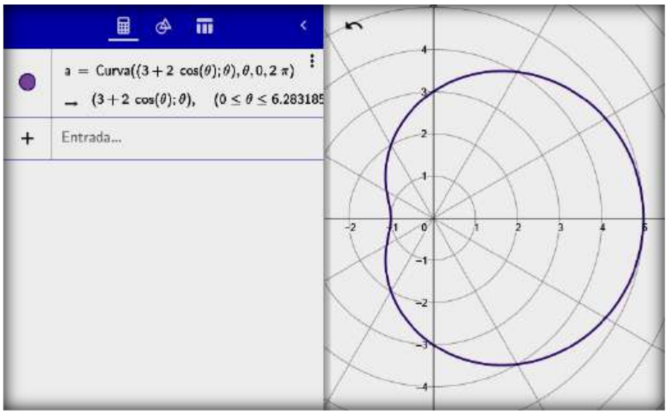
$$(x^2 - 2x + y^2)^2 = \left(3\sqrt{x^2+y^2}\right)^2$$

$$x^4 - 4x^3 + 2x^2y^2 + 4x^2 - 4xy^2 + y^4 = 9(x^2+y^2)$$

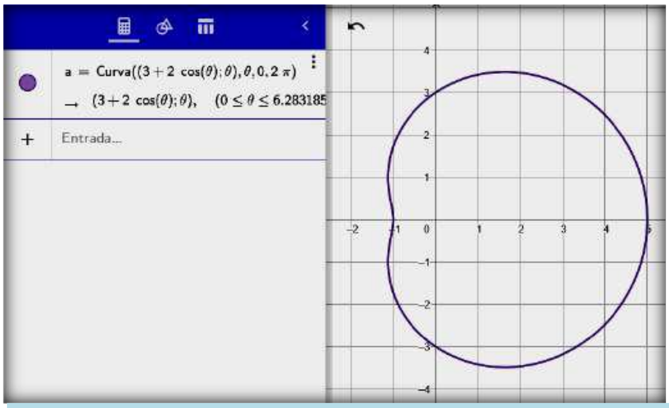
$$x^4 - 4x^3 - 5x^2 + 2x^2y^2 - 4xy^2 - 9y^2 + y^4 = 0$$

$$\boldsymbol{x^4 - 4x^3 - 5x^2 + 2x^2y^2 - 4xy^2 - 9y^2 + y^4 = 0}$$

Equação da curva em coordenadas cartesianas.



A curva no plano polar.



A curva no plano cartesiano.

Trata-se de uma limaçon sem laço.

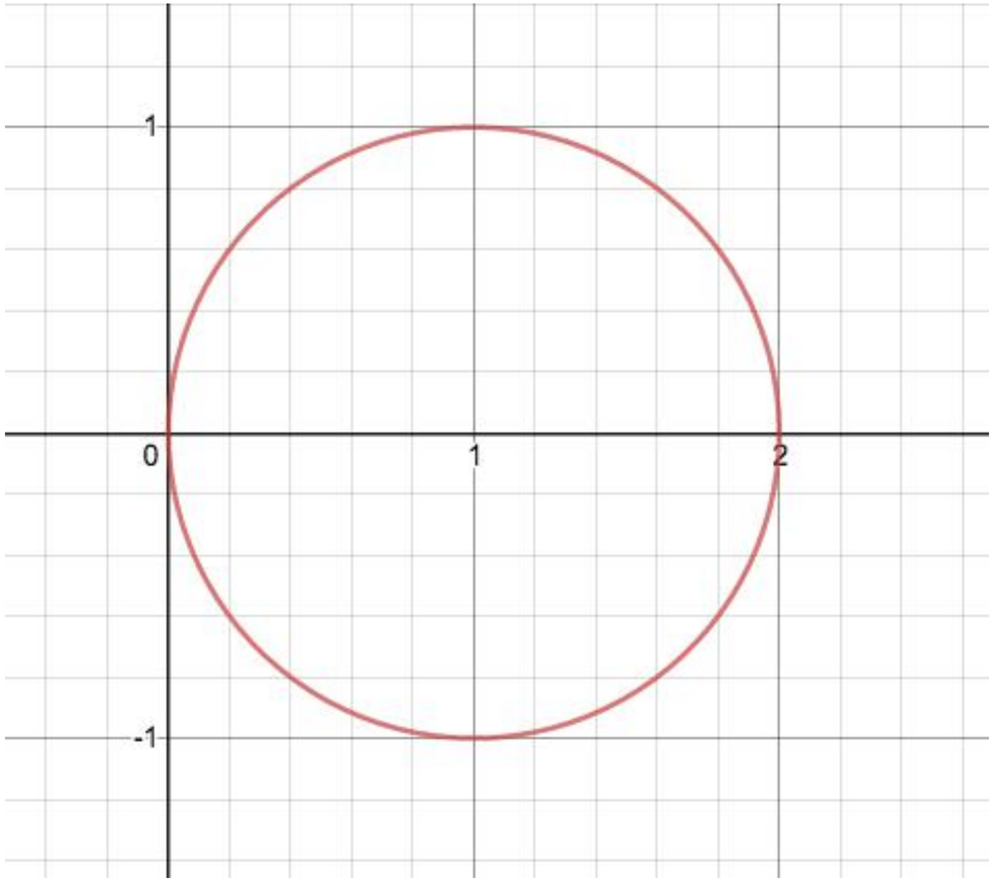
O período, desta vez, é $2\pi\, rad$: quando o ângulo θ varia de 0 a 2π radianos, obtemos o limaçon completo (de 0 a $\frac{\pi}{2}$ radianos temos a parte da curva localizada no 1º quadrante do plano cartesiano; de $\frac{\pi}{2}$ a π temos a parte no 2º quadrante; de π a $\frac{3\pi}{2}$ temos a parte no 3º quadrante e de $\frac{3\pi}{2}$ a 2π temos a parte no 4º quadrante).

Relação entre coordenadas polares e cartesianas:

$$x = r\cos(\theta)$$

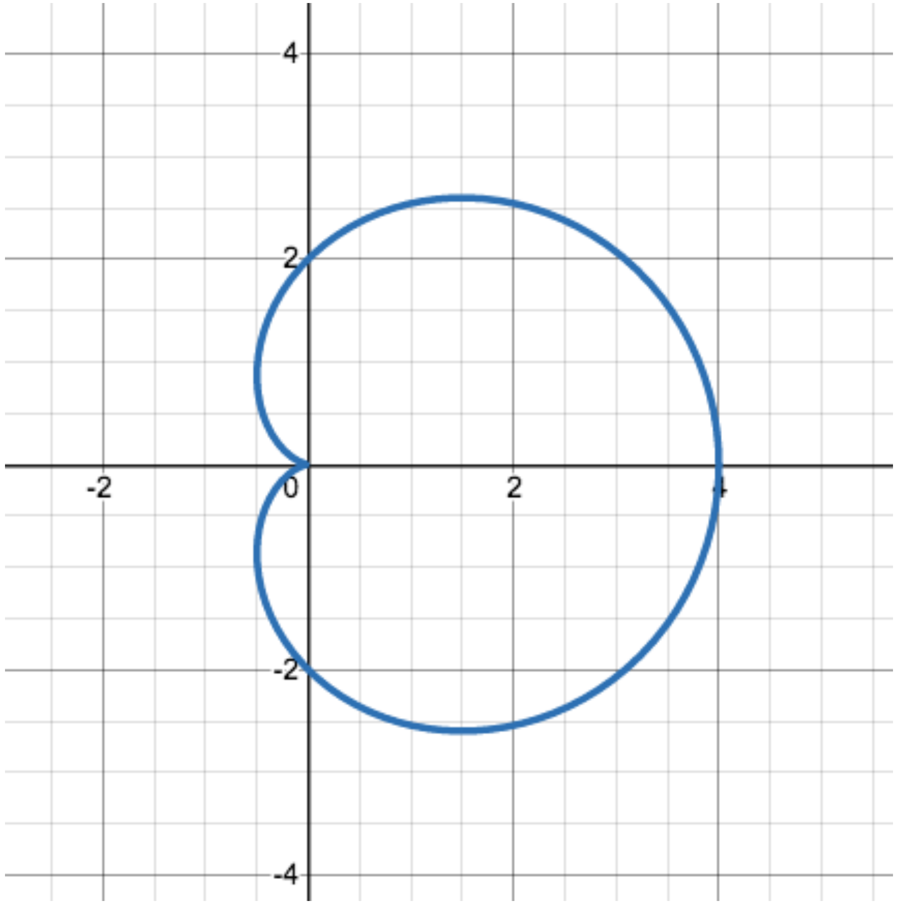
$$y = r\,\mathrm{sen}(\theta)$$

Compare:



$r = 2 \cos\theta$

circunferência



$r = 2 + 2\cos\theta$

cardióide

Vamos entender um pouco melhor os gráficos
das funções em coordenadas polares

$r = r\ (\theta)$

usando o desmos.

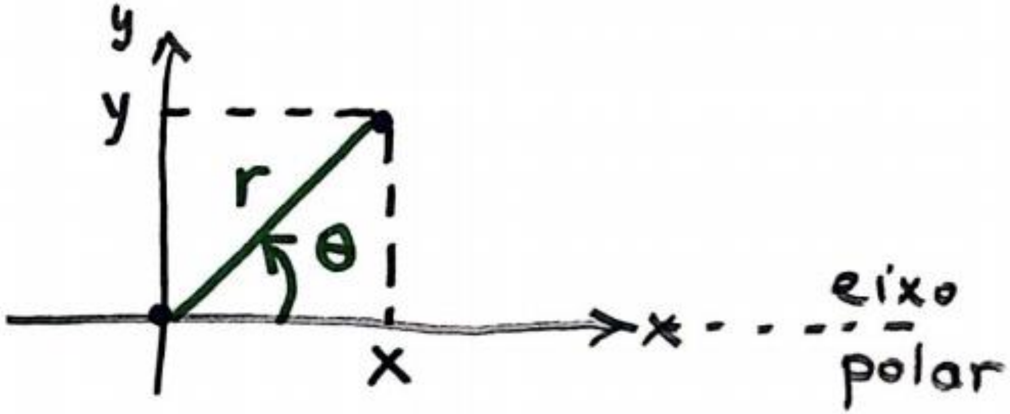
Coordenadas Cilíndricas (r, θ, z)

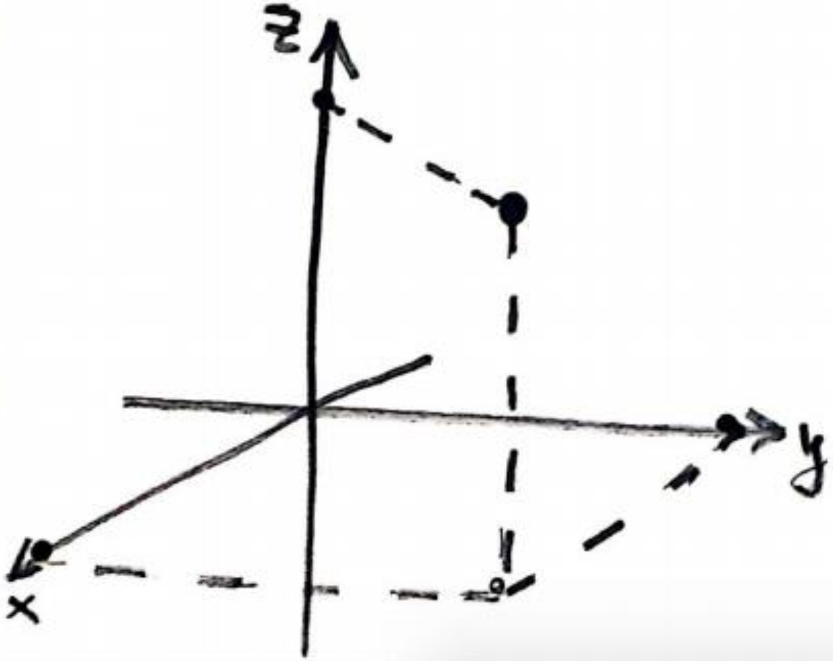
Temos que começar lembrando das coordenadas polares no plano - x, y :

$$(r, \theta)$$

com

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$$





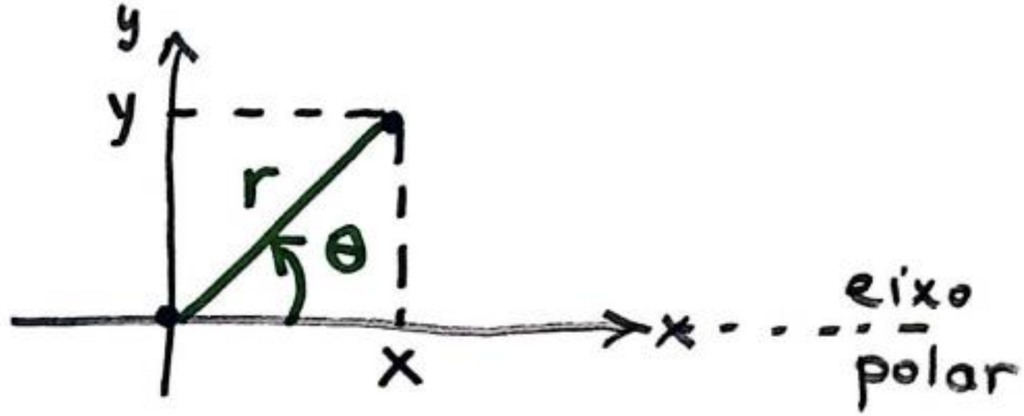
Coordenadas Cilíndricas (r, θ, z)

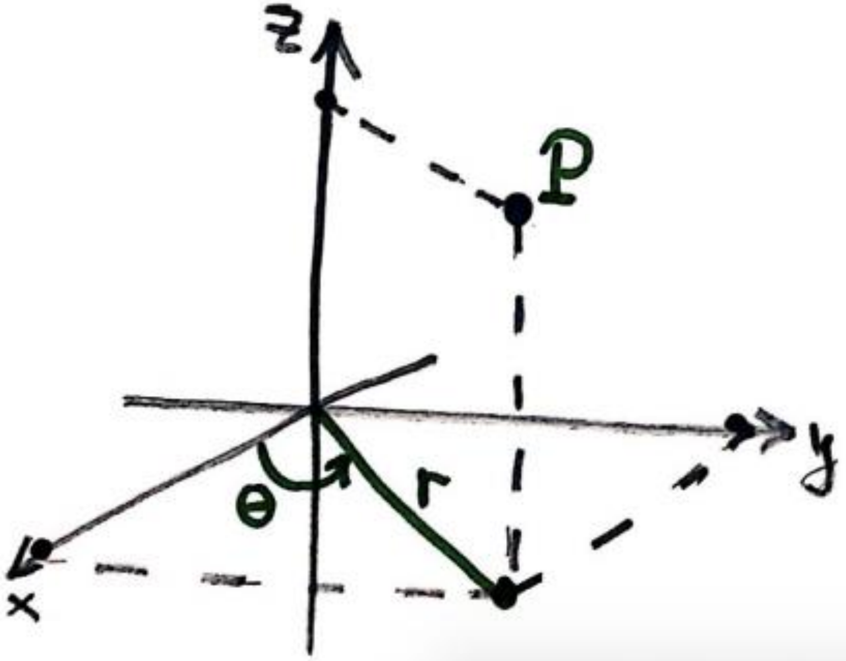
Temos que começar lembrando das coordenadas polares no plano-x, y :

$$(r, \theta)$$

com

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$$





A terna (r, θ, z) é chamada <u>coordenadas cilíndricas</u> do ponto P no espaço.

Por exemplo, localizando geometricamente os pontos

$$P_1 = (r_1, \theta_1, z_1) = (2, 0, 1)$$

$$P_2 = (r_2, \theta_2, z_2) = (3, \pi/2, 0)$$

$$P_3 = (r_3, \theta_3, z_3) = (0, 0, 3)$$

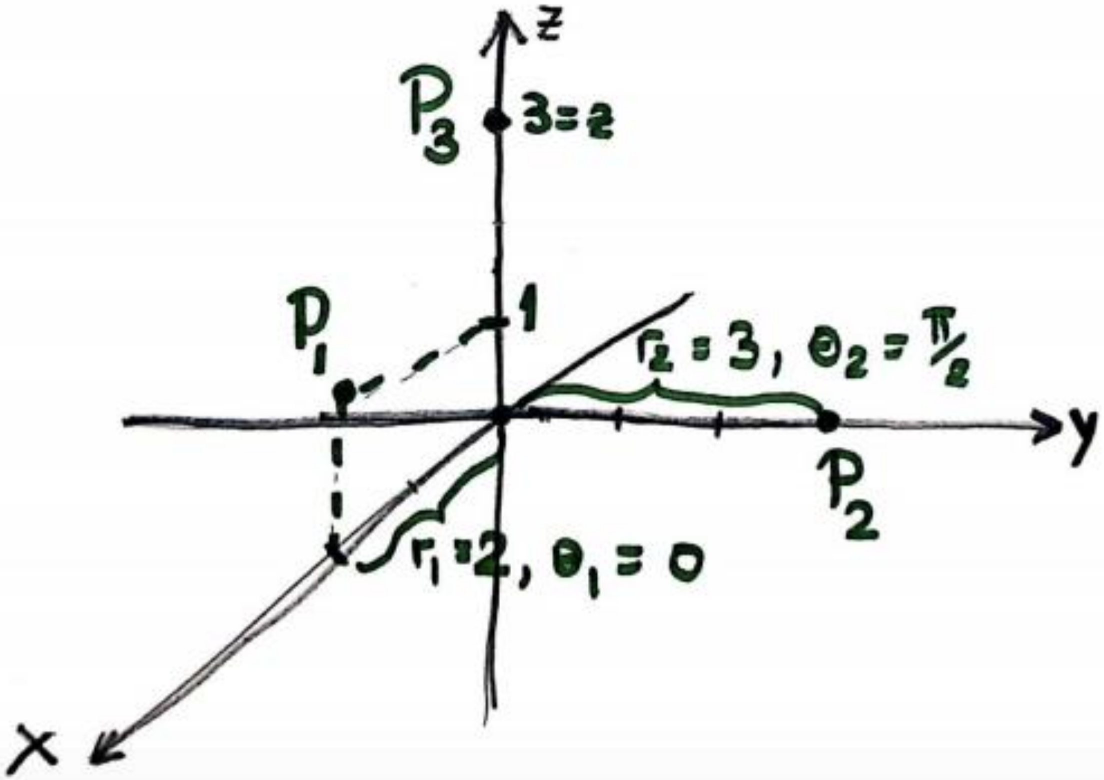
Por exemplo, localizando geometricamente os pontos

$P_1 = (r_1, \theta_1, z_1) = (2, 0, 1)$

$P_2 = (r_2, \theta_2, z_2) = (3, \pi/2, 0)$

$P_3 = (r_3, \theta_3, z_3) = (0, 0, 3)$

temos:



<u>Exemplo</u>: Esboçar a superfície que em coords. cilíndricas é dada por

$$z = r, \quad \text{com} \quad 0 \leq \theta < 2\pi \quad \text{e} \quad r \geq 0.$$

Exemplo: Esboçar a superfície que em coords. cilíndricas é dada por

$$z = r, \quad \text{com} \quad 0 \leq \theta < 2\pi \ \text{e} \ r \geq 0.$$

Resolução:

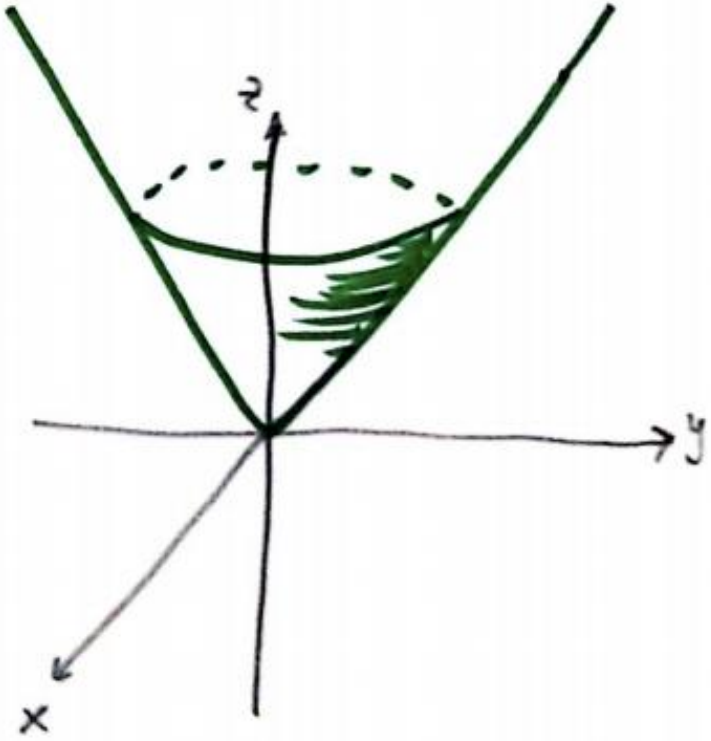
Para $r \geq 0$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$.

$$z = \sqrt{x^2+y^2}$$

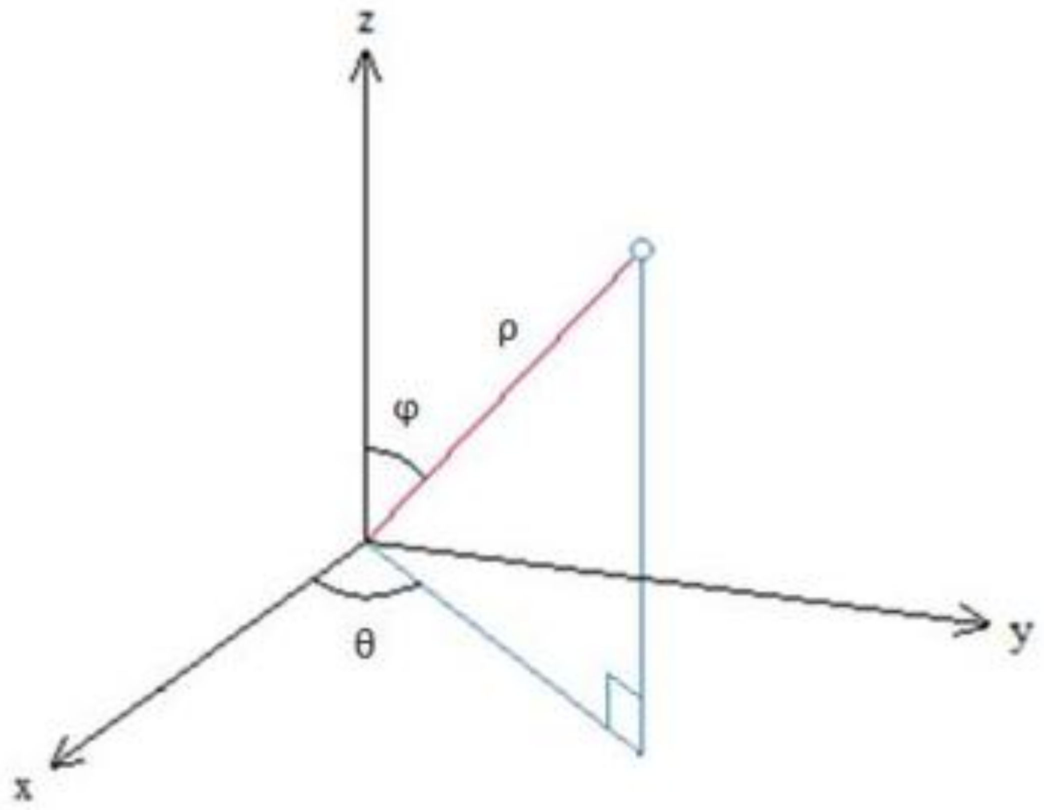
Então,

$$z^2 = x^2 + y^2, \quad \text{com} \quad z \geq 0$$

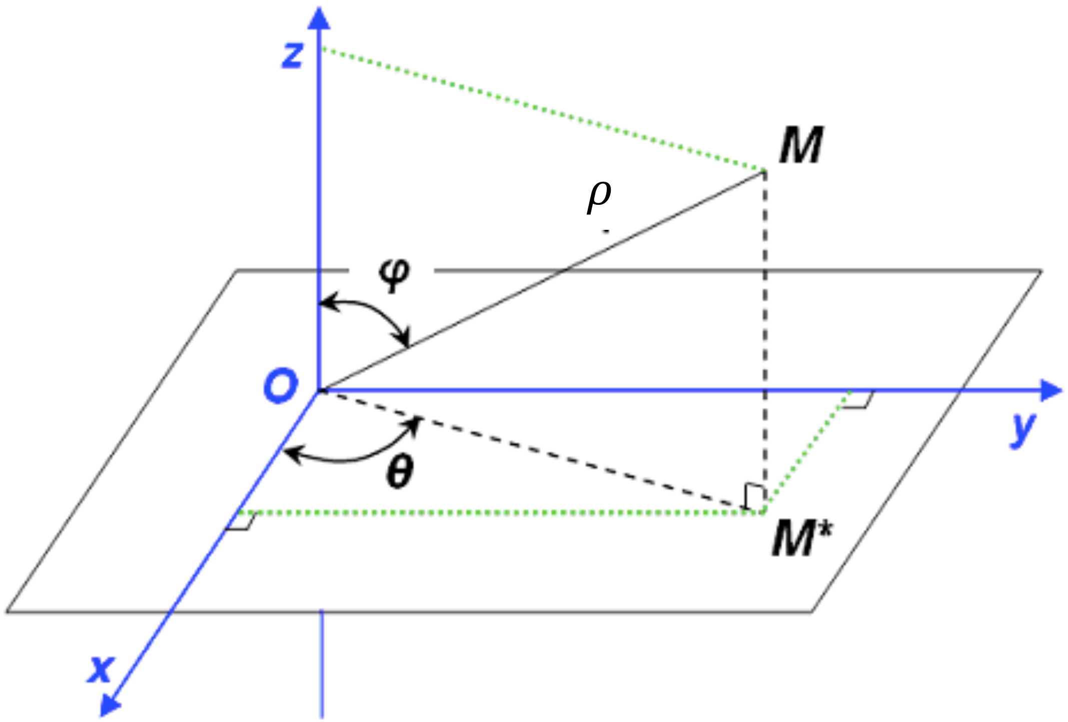
SEMI-CONE DE REVOLUÇÃO



Coodenadas esféricas (ρ, θ, φ)



Coodenadas esféricas (ρ, θ, φ)



$$\rho = d(O, M)$$

$$\begin{cases} x = \rho\ \mathrm{sen}(\varphi)\ \cos(\theta) \\ y = \rho\ \mathrm{sen}(\varphi)\ \mathrm{sen}(\theta) \\ z = \rho\ \cos(\varphi) \end{cases}$$

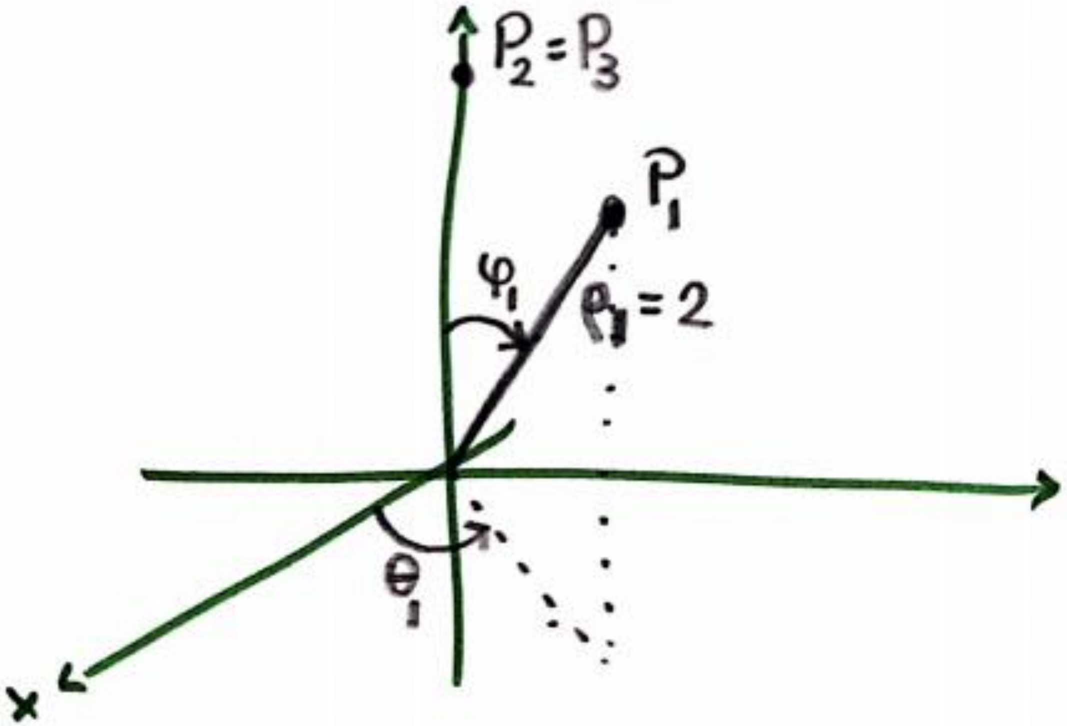
$\rho \in (0, \infty)$, $\varphi \in [0, \pi]$ e $\theta \in [0, 2\pi)$

Por exemplo, vamos localizar no espaço os pontos

$$P_1 = (\rho_1, \theta_1, \varphi_1) = \left(2, \pi/4, \pi/6\right)$$

$$P_2 = (\rho_2, \theta_2, \varphi_2) = \left(3, \pi/2, 0\right)$$

$$P_3 = (\rho_3, \theta_3, \varphi_3) = \left(3, 3\pi/4, 0\right)$$



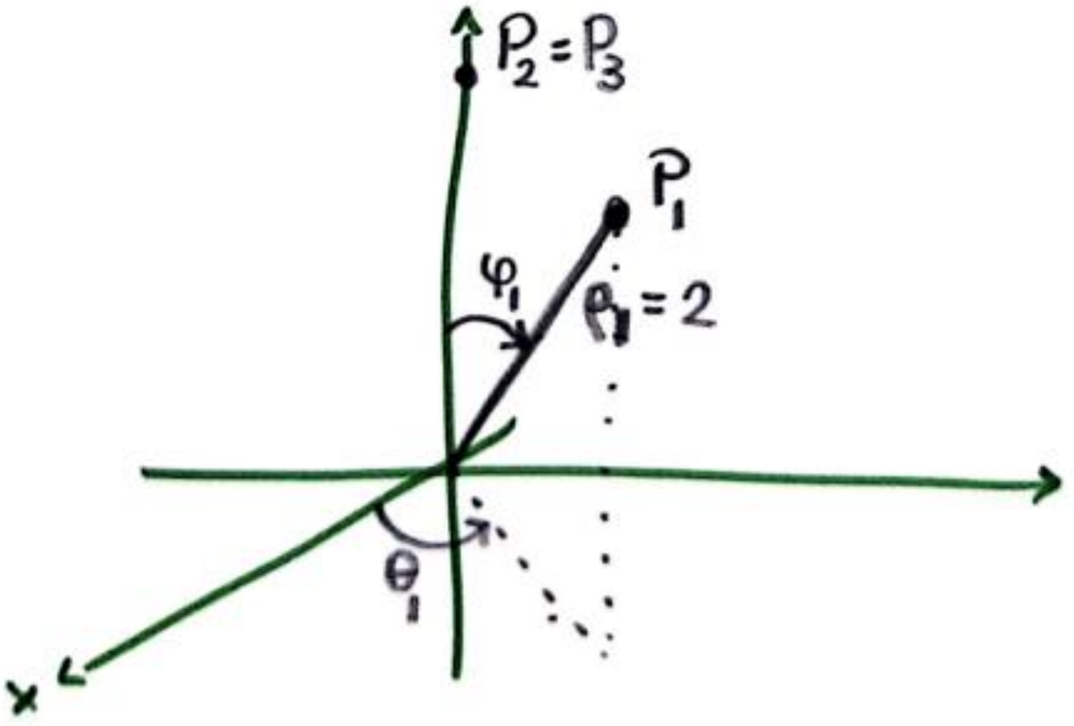
Por exemplo, vamos localizar no espaço os pontos

$$P_1 = (\rho_1, \theta_1, \varphi_1) = \left(2, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right)$$

$$P_2 = (\rho_2, \theta_2, \varphi_2) = \left(3, \frac{\pi}{2}, 0\right)$$

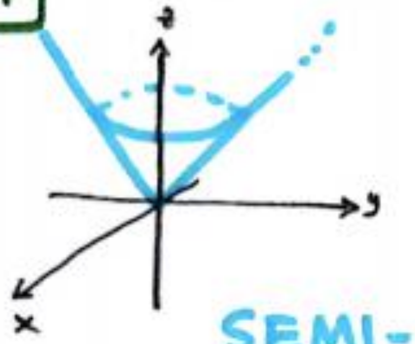
$$P_3 = (\rho_3, \theta_3, \varphi_3) = \left(3, \frac{3\pi}{4}, 0\right)$$

para pontos sobre o eixo-z, $\varphi = 0$



Exemplos :

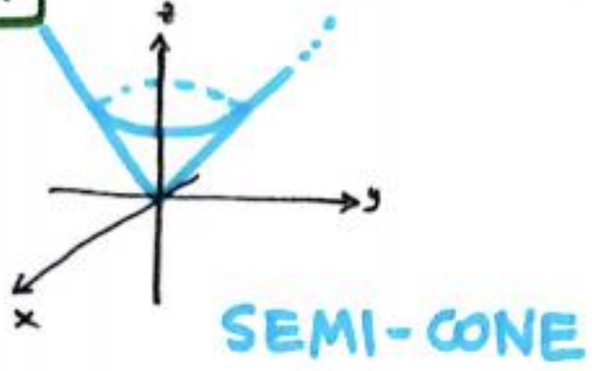
① $\boxed{\varphi = \pi/4}$, $\forall \rho \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$



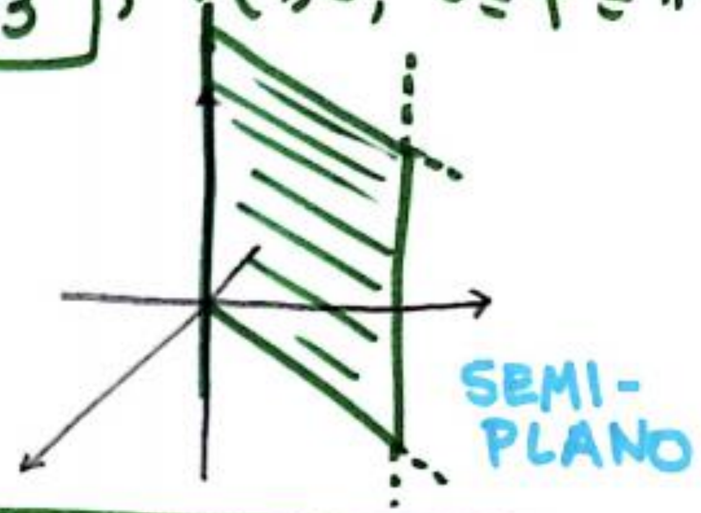
SEMI-CONE

Exemplos :

① $\boxed{\varphi = \pi/4}$, $\forall \rho \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$

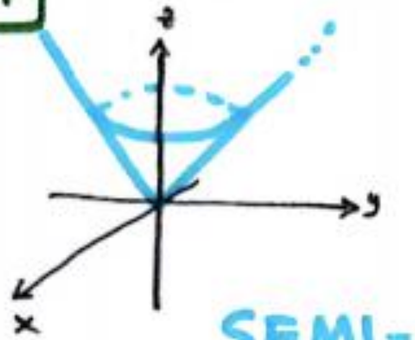


② $\boxed{\theta = \pi/3}$, $\forall \rho \geq 0$, $0 \leq \varphi \leq \pi$

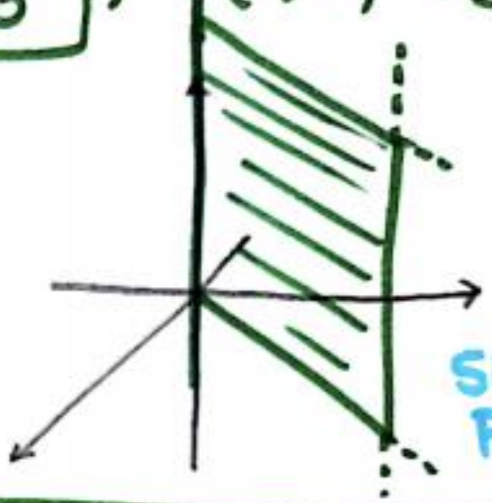


Exemplos :

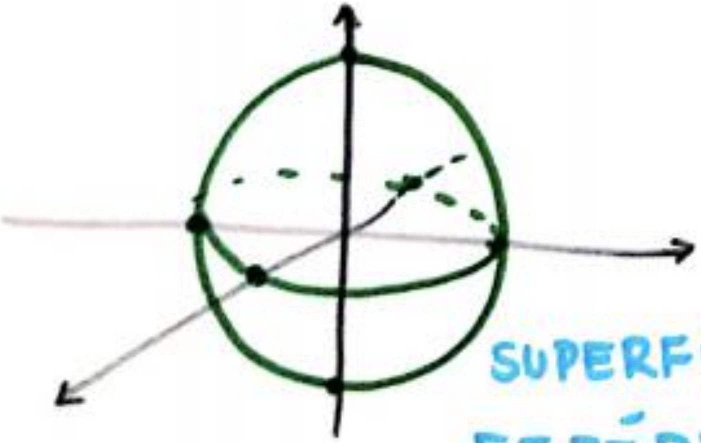
① $\boxed{\varphi = \pi/4}$, $\forall \rho \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$



② $\boxed{\theta = \pi/3}$, $\forall \rho \geq 0$, $0 \leq \varphi \leq \pi$



③ $\boxed{\rho = 1}$ $\forall\, 0 \leq \theta < 2\pi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$



$$\begin{cases} x = \rho\ \mathrm{sen}(\varphi)\ \cos(\theta) \\ y = \rho\ \mathrm{sen}(\varphi)\ \mathrm{sen}(\theta) \\ z = \rho\ \cos(\varphi) \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

EPPA 30. Exercício 21 Lista 3