SMA0300 Geometria Analítica

Aula 9

25/04/2023, terça-feira

Miriam Manoel

Na aula de hoje…

Propriedades do produto vetorial

Como comparar a orientação entre duas bases

Exercício (da Lista 4) sobre base positivamente orientada e produto vetorial

Produto misto

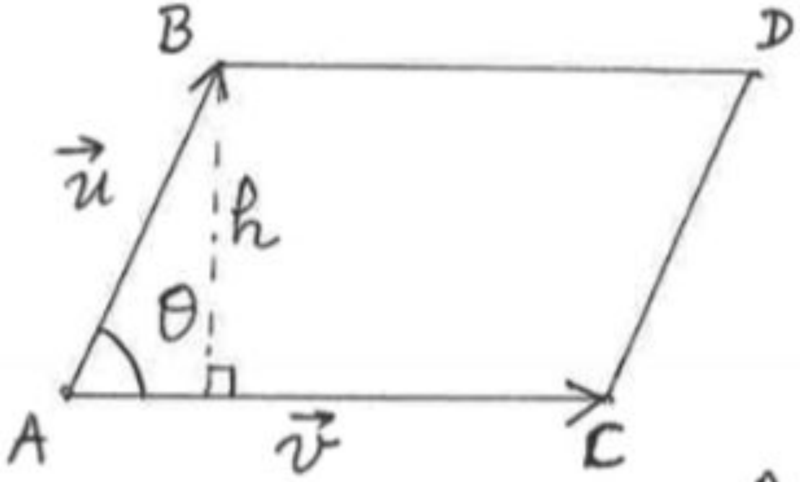
Exercícios

Uma interpretação do módulo do produto vetorial

$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| =$ área do paralelogramo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$:

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$

$\vec{v} = \overrightarrow{AC}$



Área $ABDC = h \cdot \|\vec{v}\|$

Temos $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{h}{\|\vec{u}\|}$, portanto

$h = \|\vec{u}\| \operatorname{sen}\theta$ e

Área $ABDC = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \operatorname{sen}\theta$

$= \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$.

Propriedades do produto vetorial

Quaisquer que sejam os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ e qualquer que seja o número real λ,

(a) $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$.

(b) $\vec{u} \wedge (\lambda \vec{v}) = (\lambda \vec{u}) \wedge \vec{v} = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v})$.

(c) $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$ e $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$.

<u>Demonstração</u> As afirmações decorrem das propriedades do determinante.

Exercício

1. Calcule a area do paralelogramo ABCD sendo $\vec{AB} = (1,1,-1)$ e $\vec{AD} = (2,1,4)$.

2. Calcule a area do triângulo ABC sendo $\vec{AB} = (-1,1,0)$ e $\vec{AC} = (0,1,3)$.

Como comparar a orientação entre duas bases

Duas bases de têm mesma orientação se, e somente se, **a matriz de mudança de base tem determinante positivo**.

Por exemplo, a base F expressa na base canônica por

$$F: \Big((2, 0, 0), \ (1, -1, 0), (0, 1, -1) \Big)$$

é positivamente orientada (ou, como também dizemos, é uma base positiva).

Exercício (Ex. 13 lista 4)

Considere os vetores abaixo dados na base canônica:

$$\vec{u} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}), \ \vec{v} = (-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}), \ \vec{w} = (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}).$$

(i) Prove que $\mathbf{F} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é uma base ortonormal positiva.

(ii) Calcule a área do triângulo determinado pelos vetores $2\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{u} - \vec{v}$.

Produto misto

Definição O produto misto dos vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ nessa ordem, é o número real $\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w}$ indicado por $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w}.$$

Expressão algébrica do produto misto

Proposição. Considere os vetores na base canônica

$\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$, $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$, $\vec{w} = (a_3, b_3, c_3)$. Então

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Demonstração. Recordemos

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{\kappa} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{\imath} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{\kappa}.$$

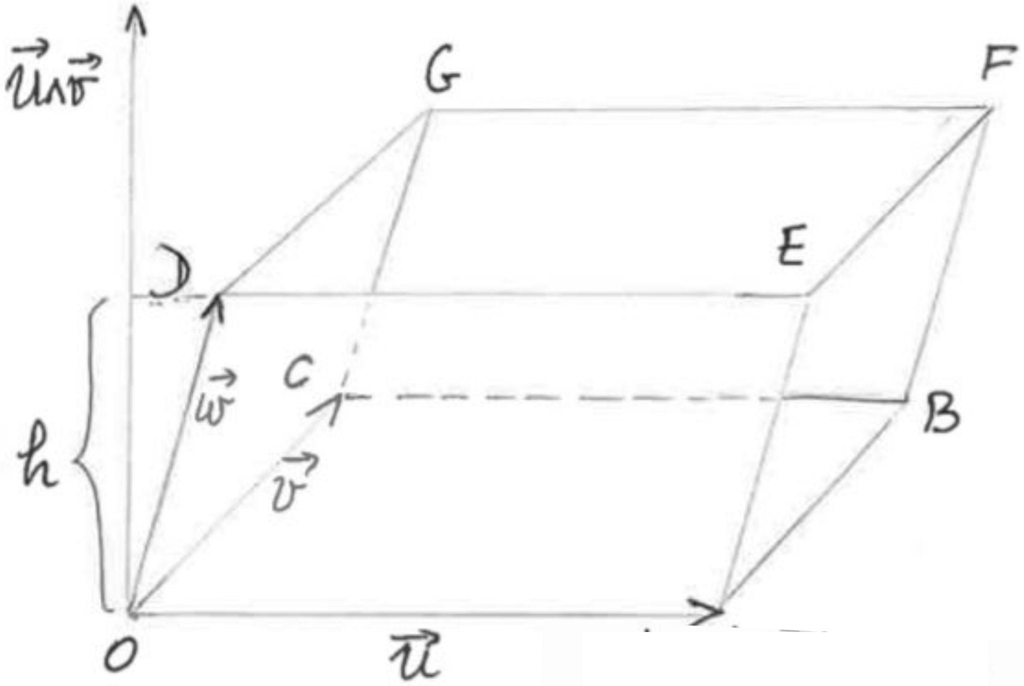
Portanto,

$$\begin{aligned} [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w} &= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} x_3 - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} y_3 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} z_3 \\ &= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \quad \sqcup \end{aligned}$$

Note:

$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$ se, e somente se, os três vetores são LD.

Mais sobre a geometria do produto misto: volume do paralelepípedo



$\vec{u} = \vec{OA}$

$\vec{v} = \vec{OC}$

$\vec{w} = \vec{OD}$

Denote por V o volume do paralelepípedo. Temos

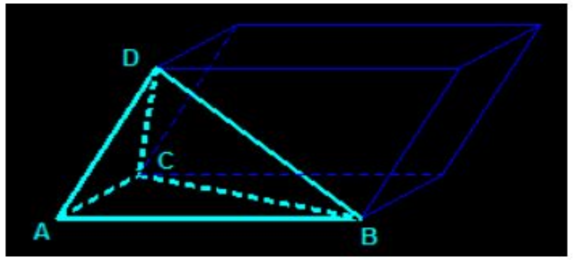
$$V = \text{area } OABC \cdot h$$

Sabemos que area $OABC = \|\vec{u}\wedge\vec{v}\|$ e $h = \|\operatorname{proj}_{\vec{u}\wedge\vec{v}}\vec{w}\| = \dfrac{|\vec{w}\cdot\vec{u}\wedge\vec{v}|}{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|}$

Portanto, $V = |\vec{w}\cdot\vec{u}\wedge\vec{v}| = |\vec{u}\wedge\vec{v}\cdot\vec{w}|$

Volume do tetraedro

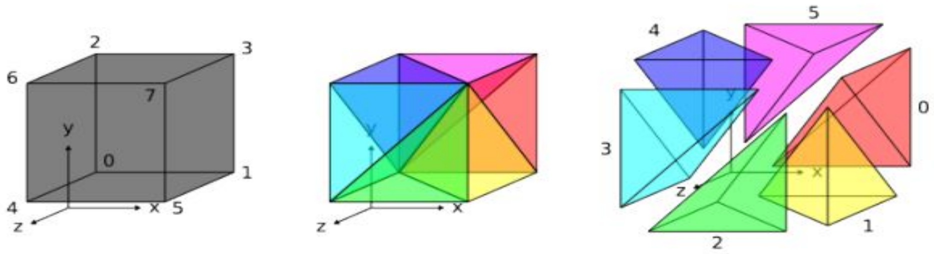
Sejam $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ vetores LI de V^3. Estes vetores definem também um tetraedro.



Fonte: `http://www.polyhedra-world.nc/tetra_.htm`

Denote por V_t o volume do tetraedro. Sabemos

$$V_t = \frac{1}{6}(\text{volume do paralelepípedo determinado por } \vec{a},\ \vec{b} \text{ e } \vec{c})$$



Fonte:`https://www.dune-project.org/doxygen/2.6.0/classDune_1_1GridFactoryInterface.html`

$$V_t = \frac{1}{6}|\vec{a} \wedge \vec{b} \cdot \vec{c}|.$$

Exemplo

Sejam os vetores $\vec{u} = (3, m, -2)$, $\vec{v} = (1, -1, 0)$ e $\vec{w} = (2, -1, 2)$. Calcular o valor de m para que o volume do paralelepípedo determinado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ seja 16 u.v. (unidades de volume).

Solução

O volume do paralelepípedo é dado por

$$V = |\,[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\,|$$

e, no caso presente, deve-se ter

$$|\,[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\,| = 16$$

Sendo

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 3 & m & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2m - 8$$

Como o volume é igual a 16, então:

$$|-2m - 8| = 16,$$

que, pela definição de módulo, implica duas hipóteses:

$$-2m - 8 = 16 \quad \text{ou} \quad -2m - 8 = -16$$

e, portanto,

$$m = -12 \quad \text{ou} \quad m = 4$$

Exercícios para casa

Exercício 15. Sabendo que a medida em radianos do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $\pi/6$, e que $\|\vec{u}\| = 1$, $\|\vec{v}\| = 7$, calcule $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$ e $\|\frac{1}{3}\vec{u} \times \frac{3}{4}\vec{v}\|$.

Qual o volume do tetraedro cujas arestas são definidas a partir dos vetores dados?

$$\vec{u} = (2,0,0), \vec{v} = (1,4,0), \vec{w} = (0,0,3)$$