SMA0300 Geometria Analítica
Aula 8

20/04/2023, quinta-feira

Miriam Manoel

Na aula de hoje…

Produto escalar (continuação)

Produto vetorial – definição geométrica

Produto vetorial – expressão algébrica

Exercícios

Atividade 2

Propriedades do produto escalar

1. Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são nulos,

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}.$$

2. $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$

3. $\vec{u}$ é ortogonal a $\vec{v}$ ($\vec{u}\perp\vec{v}$) se, e somente se, $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

4. Desigualdade de Schwarz: para $\vec{u}, \vec{v}$ vetores quaisquers, vale $|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$

Mais propriedades do produto escalar

Qualquer que sejam os vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ e qualquer que seja o número real λ, valem as seguintes propriedades:

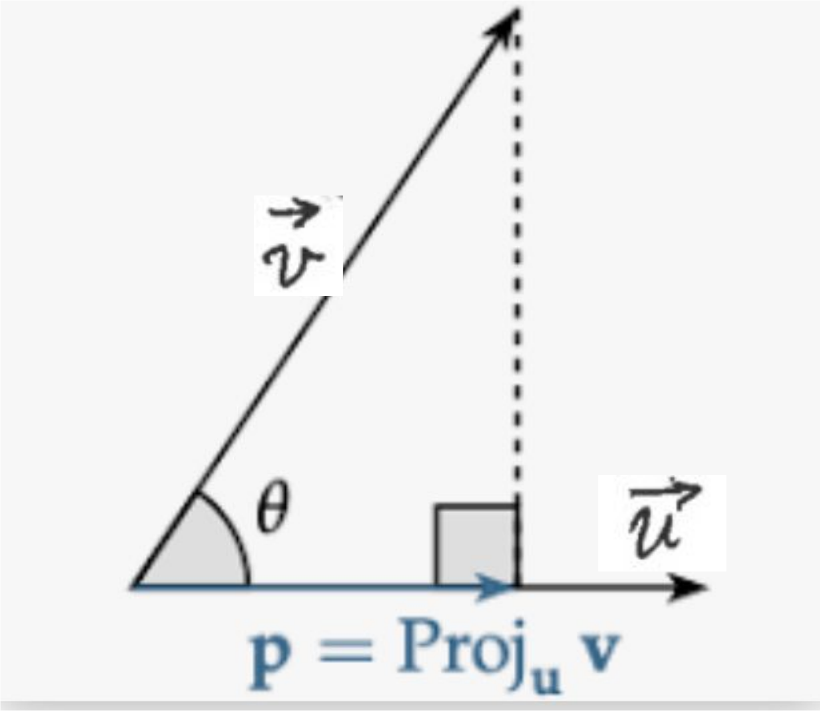
(a) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

(b) $\vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = (\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda (\vec{u} \cdot \vec{v})$

(c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

Projeção ortogonal usando o produto escalar

Dado um vetor **não nulo**, como obter a expressão algébrica da projeção ortogonal de um vetor qualquer na direção e sentido deste vetor dado?



$$proj_{\vec{v}}\, \vec{u} = \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \right) \cdot \vec{v}$$

Vamos provar essa fórmula na próxima aula.

Exemplo

Seja E uma base ortonormal.

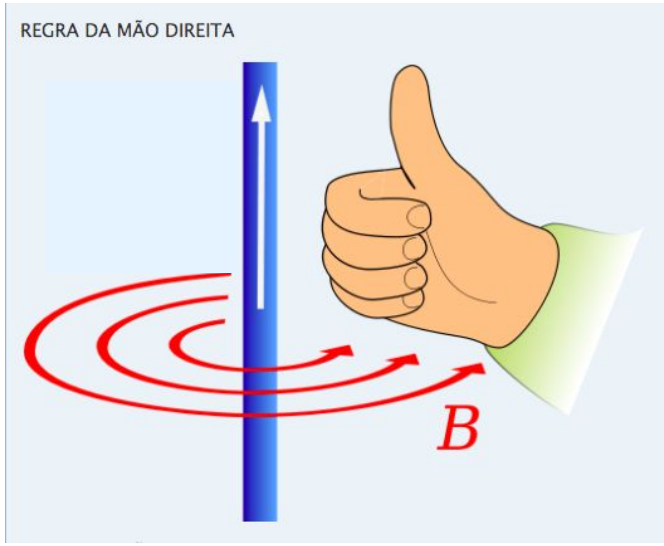
(1) Calcule a projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ sendo

$\vec{v} = (1, -1, 2)_E$, $\vec{u} = (3, -1, 1)_E$.

Produto vetorial

Para falarmos do produto vetorial, começamos lembrando da Regra da Mão Direita

\



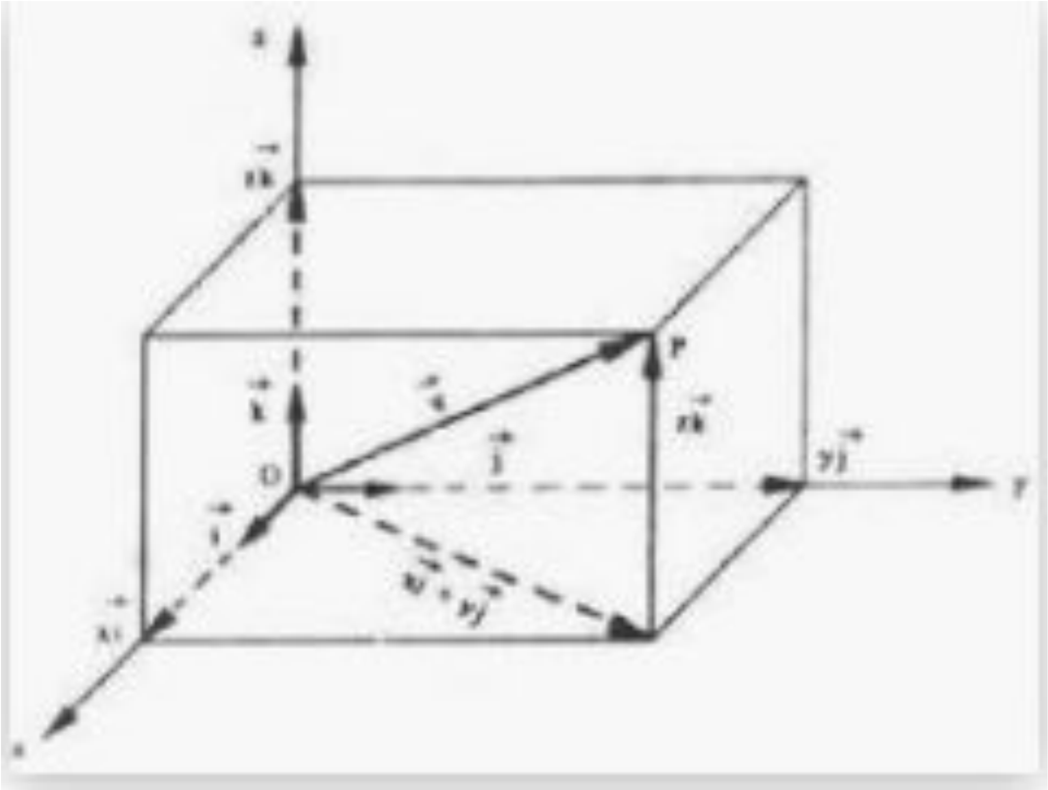
https://www.tutorbrasil.com.br/

Uma base de V^3 é chamada **positivamente orientada,** ou simplesmente **POSITIVA,** se sua sequência de vetores obedece à **regra da mão direita**.

Exemplo clássico de base positivamente orientada

BASE CANÔNICA de V^3

$$C = (\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$$



Exemplos clássicos de bases positivamente e negativamente orientadas

Recordar o que foi visto na Aula 6.

Produto vetorial – definição geométrica

O produto vetorial de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é o vetor indicado por $\vec{u} \wedge \vec{v}$ tal que

(a) Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LD, então $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

(b) Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LI e $\theta = ang(\vec{u}, \vec{v})$, então

direção —> (b1) $\vec{u} \wedge \vec{v}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$;

sentido —> (b2) $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ é uma base positiva;

módulo —> (b3) $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \operatorname{sen}\theta$.

Notações usuais: ∧ ou x

Expressão algébrica do produto vetorial

Considere a base canônica $C = (\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$

Como já mencionado em aula, sempre que escrevemos um vetor na base canônica, não Costumamos usar o subíndice.

Se $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$, então $\vec{u} \wedge \vec{v}$ é o vetor dado pelo seguinte determinante (formal)

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{array}{l} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \text{vetores da base } C \\ \leftarrow \text{Coordenadas de } \vec{u} \\ \leftarrow \text{Coordenadas de } \vec{v} \end{array}$$

Exemplo

Considere os vetores abaixo expressos na base canônica $C = (\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$

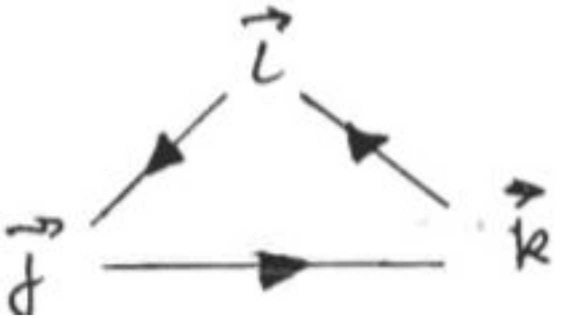
1. Sejam $\vec{u} = (1,2,3)$, $\vec{v} = (-1,1,2)$.

   Calcule $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

2. Calcule $(2\vec{k} - \vec{i} + 5\vec{j}) \wedge (3\vec{i} - 2\vec{k} + \vec{j})$.

Exercício:

Mostre que $\vec{i}\wedge\vec{j}=\vec{k}$, $\vec{j}\wedge\vec{k}=\vec{i}$, $\vec{k}\wedge\vec{i}=\vec{j}$,
$\vec{j}\wedge\vec{i}=-\vec{k}$, $\vec{k}\wedge\vec{j}=-\vec{i}$, $\vec{i}\wedge\vec{k}=-j$.



Reveja a Aula 5 e compare.

Exercício

(a) Ache um vetor unitário ortogonal a $\vec{u} = (1, -3, 1)$ e a $\vec{v} = (-3, 3, 3)$.

usando o produto escalar.

(b) Ache um vetor unitário ortogonal a $\vec{u} = (1, -3, 1)$ e a $\vec{v} = (-3, 3, 3)$.

usando o produto vetorial.