SMA0300 Geometria Analítica
Aula 7

18/04/2023, terça-feira

Miriam Manoel

Na aula de hoje…

Exercício sobre Mudança de base e Coordenadas de vetor em bases distintas

Produto escalar – definição geométrica (aula passada)

Produto escalar – expressão algébrica

Aplicação do produto escalar na geometria: cálculo de Projeção ortogonal

Exercício 8 - Lista 3

Exercício 8. Consideremos as relações: $\vec{f_1} = \vec{e_1} - \vec{e_2} - \vec{e_3} \quad \vec{f_2} = \vec{e_1} + 2\vec{e_2} + \vec{e_3} \quad \vec{f_3} = 2\vec{e_1} + \vec{e_2} + 4\vec{e_3}$.

(a) Verifique que $\mathbf{F} = \left(\vec{f_1}\,, \vec{f_2}\,, \vec{f_3}\right)$ é uma base de V^3.

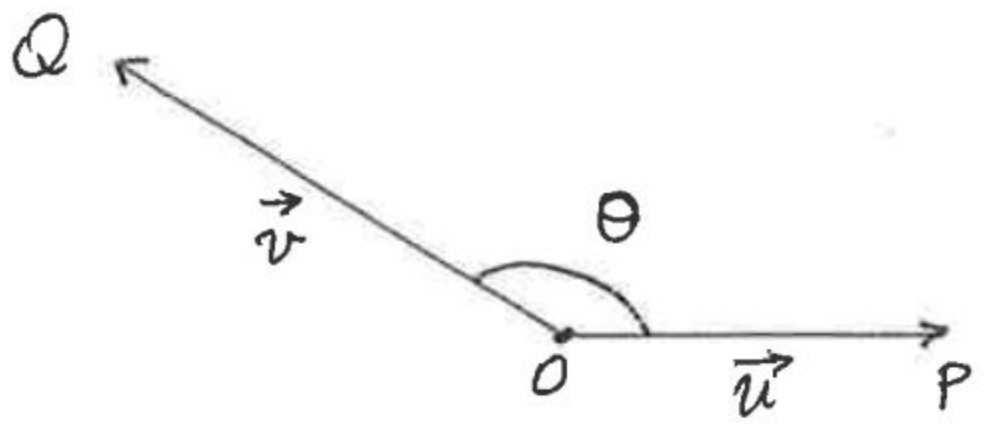
(b) Ache a matriz de mudança de base, da base $\mathbf{E} = (\vec{e_1}\,, \vec{e_2}\,, \vec{e_3})$ para a base $\mathbf{F} = \left(\vec{f_1}\,, \vec{f_2}\,, \vec{f_3}\right)$.

(c) Sendo $\vec{u} = 3\vec{e_1} - 5\vec{e_2} + 4\vec{e_3}$, achar a expressão do vetor $\vec{u}$ em relação à base $\mathbf{F} = \left(\vec{f_1}\,, \vec{f_2}\,, \vec{f_3}\right)$.

Ângulo entre dois vetores

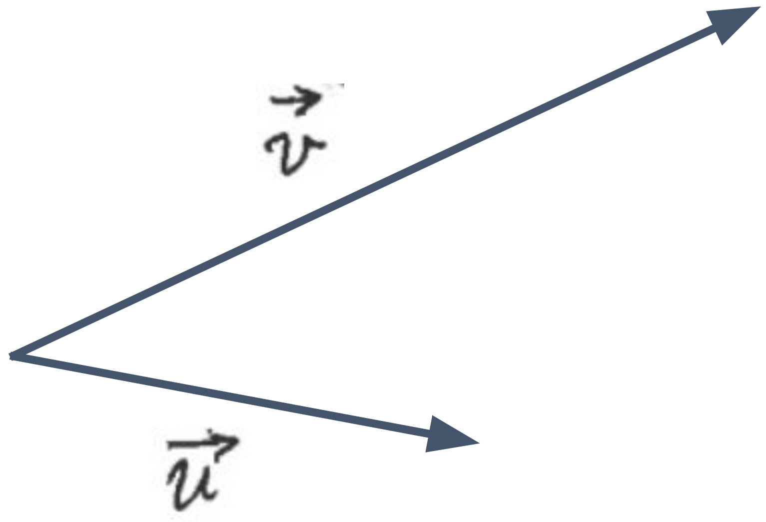
O objetivo principal de falarmos de ângulo entre vetores é podermos definir o **produto escalar** de dois vetores.

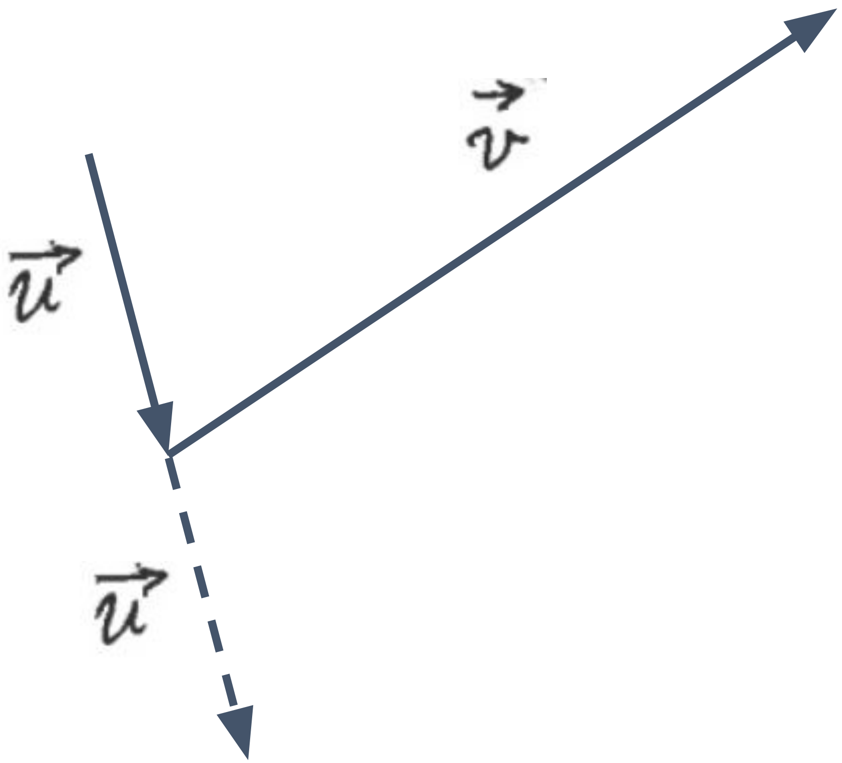
O ângulo representado abaixo é definido como o ângulo entre os vetores da figura:



É o menor ângulo determinado pelos dois segmentos orientados que representam os vetores dados.

Devemos observar com cuidado para tomar o ângulo corretamente:





Produto Escalar

<u>Definição</u>

O <u>produto</u> <u>escalar</u> dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, indicado por $\vec{u}\cdot\vec{v}$, é o número real tal que

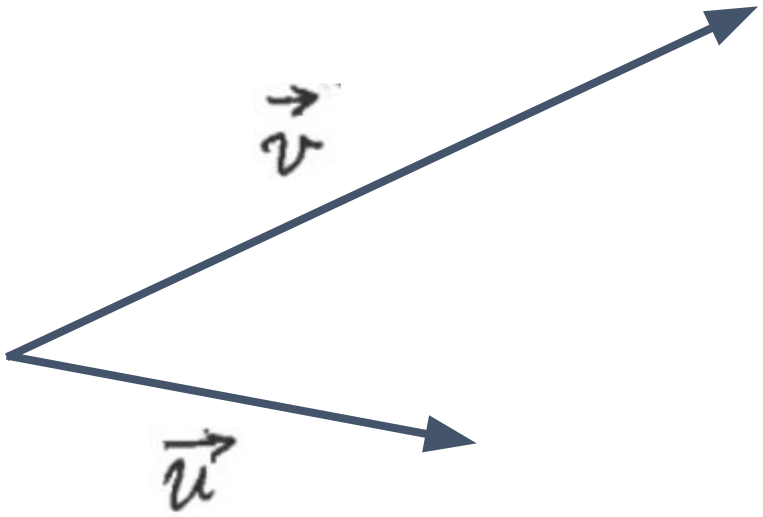
(a) se $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ é nulo, $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

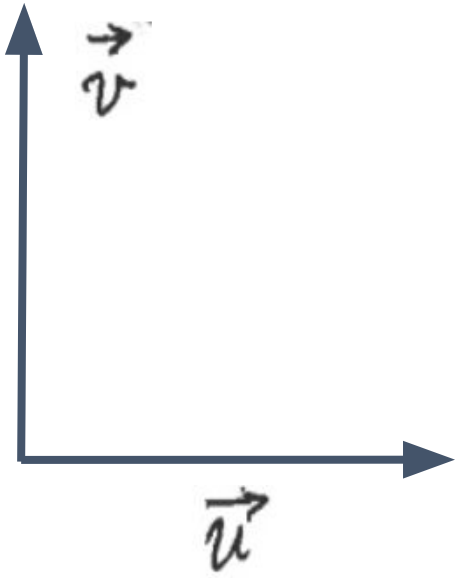
(b) se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são nulos e $\theta=\text{ang}(\vec{u},\vec{v})$,

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\theta}.$$

Vamos fazer exercícios em aula

Exercício: dê o sinal do produto escalar em cada caso





Resolução:

ângulo agudo
produto escalar é positivo

ângulo reto
produto escalar é zero

ângulo obtuso
produto escalar é negativo

O produto escalar em coordenadas numa base ortonormal:

Proposição

Seja $E = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ uma base ortonormal de V^3,

$\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)_E$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)_E$. Então

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}$$

A dedução desta fórmula se baseia na Lei dos Cossenos. Vide a apostila.

Exercício com o produto escalar

Obtenha os vetores de norma $3\sqrt{3}$ que são ortogonais a $\vec{u} = (2,3,-1)_E$ e a $\vec{v} = (2,-4,6)_E$, sendo E uma base ortonormal de V^3.

Propriedades do produto escalar

1. Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são nulos,

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}.$$

2. $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$

3. $\vec{u}$ é ortogonal a $\vec{v}$ $(\vec{u}\perp\vec{v})$ se, e somente se, $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

4. Desigualdade de Schwarz: para $\vec{u}, \vec{v}$ vetores quaisquers, vale

$$|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$$