SMA0300 Geometria Analítica
Aula 5

11/04/2023, terça-feira

Miriam Manoel

Na aula de hoje…

Base (continuação)

Coordenadas de um vetor numa dada base (continuação)

Soma e produto por escalar em coordenadas

Método prático para se verificar LD e LI quando os vetores estão em coordenadas segundo uma base fixada.

Entramos aqui numa parte central sobre dependência linear:

Proposição Se $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são LI em V^3, então qualquer vetor $\vec{x}$ em V^3 é combinação linear de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

Proposição Se $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são LI em V^3, então qualquer vetor $\vec{x}$ em V^3 é combinação linear única de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

Conclusão

Como a combinação linear na proposição anterior é única, podemos identificar o vetor $\vec{x} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$ com a tripla (α, β, γ) de números reais.

Base de V^3 e o uso de base para espressar vetores de V^3.

<u>Definição</u>

Uma <u>tripla ordenada</u> $E=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ de vetores LI chama-se <u>base</u> de V^3.

Vimos que qualquer vetor $\vec{x}$ em V^3 é combinação linear única de $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, ou seja

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$$

e os escalares x_1, x_2, x_3 são únicos para cada vetor $\vec{x}$.

Chamamos $(x_1, x_2, x_3)_E \in \mathbb{R}^3$ de <u>coordenadas</u> do vetor $\vec{x}$ na base E. Escrevemos $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)_E$.

Coordenadas do vetor nulo numa base qualquer

Como era esperado, em qualquer que seja a base E, temos

$$\vec{0} = (0,0,0)_E$$

Vamos agora fazer (em sala de aula) vários exemplos para entendermos melhor a representação de vetores de $\mathbf{V}^3$ a partir de uma base fixada.

Soma e produto por escalar em coordenadas

Vamos interpretar os conceitos que vimos até agora sobre vetores usando suas coordenadas.

<u>Propriedades</u>

(a) $(x_1, x_2, x_3)_E + (y_1, y_2, y_3)_E = (x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3)_E$

(As coordenadas da soma de vetores são as somas das coordenadas dos vetores.)

(b) $\alpha(x_1, x_2, x_3)_E = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)_E$

(As coordenadas de um vetor multiplicado por um escalar são a multiplicação das coordenadas do vetor pelo mesmo escalar.)

Demonstração

(a) $(x_1, x_2, x_3)_E + (y_1, y_2, y_3)_E = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 + y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3$

$= (x_1+y_1)\vec{e}_1 + (x_2+y_2)\vec{e}_2 + (x_3+y_3)\vec{e}_3$

$= (x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3)_E$

(b) $\alpha(x_1, x_2, x_3) = \alpha(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3)$

$= \alpha x_1\vec{e}_1 + \alpha x_2\vec{e}_2 + \alpha x_3\vec{e}_3$

$= (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)_E$ ▨

Estude em casa os detalhes dessas igualdades.

Exercício 1.

Seja $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base de V^3.

Exemplos 1. Verifique se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LI ou LD:

(a) $\vec{u} = (0,1,0)_E$, $\vec{v} = (1,0,1)_E$

(b) $\vec{u} = (1,-3,14)_E$, $\vec{v} = \left(\frac{1}{14}, -\frac{3}{14}, 1\right)_E$

L.D. ou L.I. ? - Decidir usando coordenadas

Os vetores $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)_E$, $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)_E$, $\vec{w} = (a_3, b_3, c_3)_E$

São LD se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

Exemplo 1.

Seja $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base de V3.

1. Verifique se $\vec{u} = (1, -1, 2)_E$, $\vec{v} = (-3, 4, 1)_E$, $\vec{w} = (1, 0, 9)_E$ são LI ou LD.

Exemplo 2.

Seja $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base de V^3.

Calcule m para que os vetores

$$\vec{u} = (m, 1, 1+m)_E$$

$$\vec{v} = (1, 2, m)_E$$

$$\vec{w} = (1, 1, 1)_E$$

sejam LD.

Outros exemplos em sala.