Aula 23 SMA 300 GA

Miriam Manoel

ICMC/USP, São Carlos - SP

Quinta-feira 15/06/2023

Na aula de hoje:

Cônicas – parte 4: centro das cônicas reta e retas paralelas.

- Quádricas - parte 2
- Exercício: superfície esférica e plano tangente
- Traços de uma superfície
- Formas reduzidas das quádricas
- Superfície de revolução

Exemplo. Dê a equação geral do plano que é tangente à superfície esférica

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 7 = 0$$

no ponto P = (3, 0, 2).

Quádricas.

Como comentamos na aula passada, vamos fazer apenas um estudo simplificado das quádricas, apenas através de equações reduzidas.

Lembremos que chamamos quádrica o conjunto dos pontos (x,y,z) regido por uma equação da forma

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0,$$

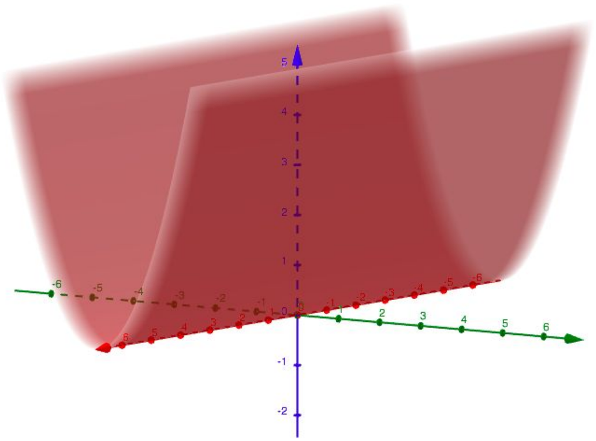
com $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 \neq 0.$

Observação importante.

Em $\mathbf{R}^3$, uma **superfície** é dada por **uma equação** em 3 variáveis representa.

Por exemplo:

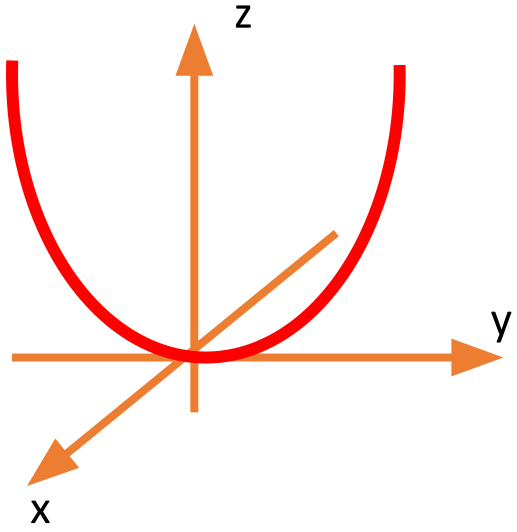
$$z = y^2$$



Em $\mathbf{R}^3$, uma **curva** é dada algebricamente por **duas equações** em 3 variáveis.

Por exemplo:

$$\begin{cases} z = y^2 \\ x = 0 \end{cases}$$

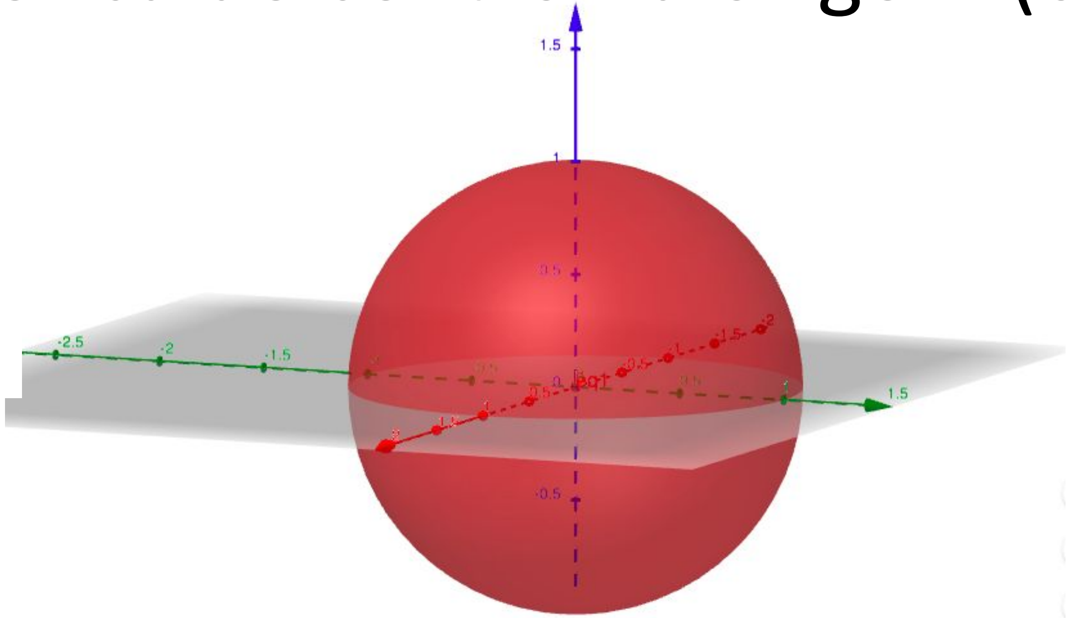


Vamos ver através de exemplos específicos os diferentes tipos de quádricas:

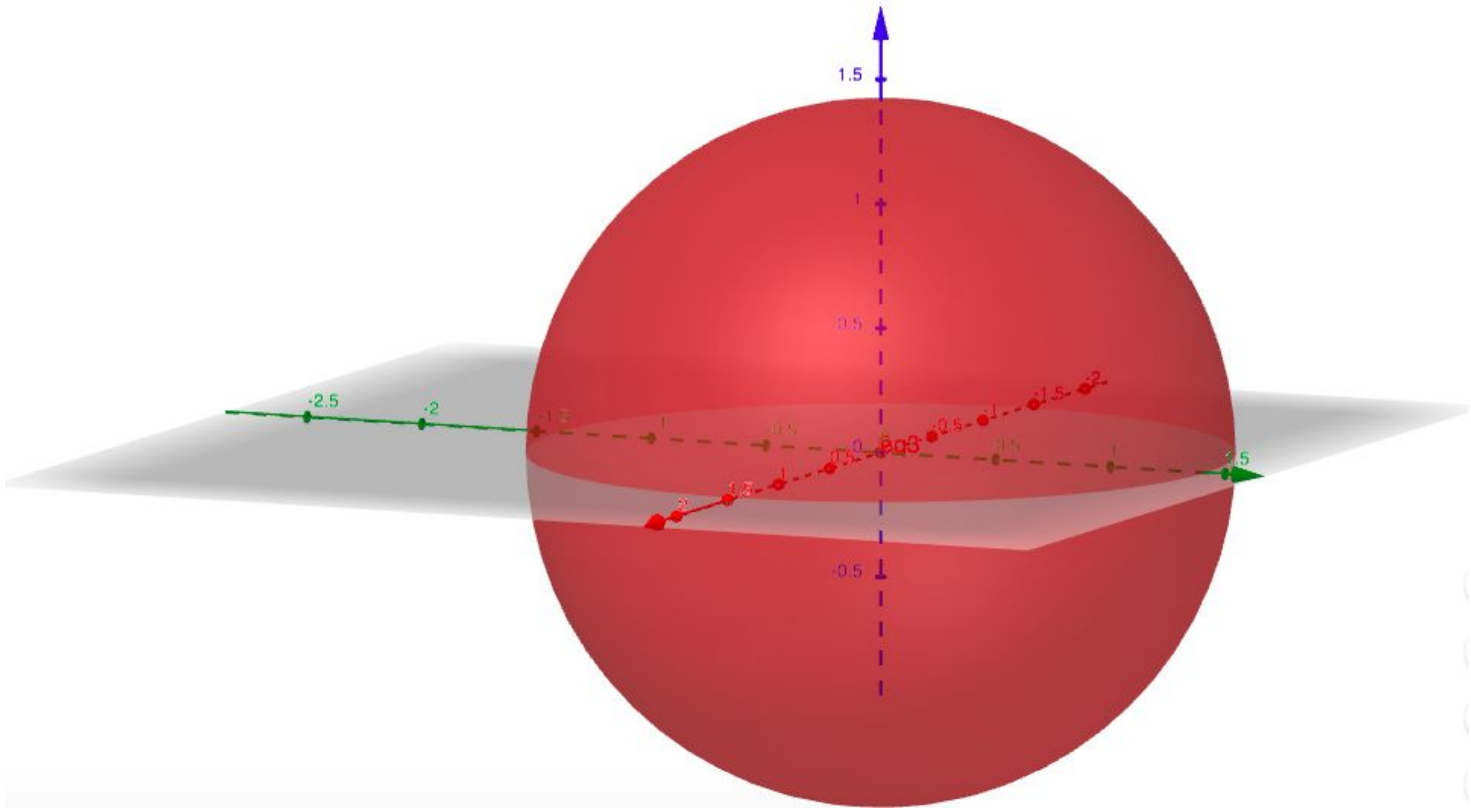
1. Superfície esférica

Exemplo 1. Superfície esférica de centro na origem (0,0,0) e raio 1:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$



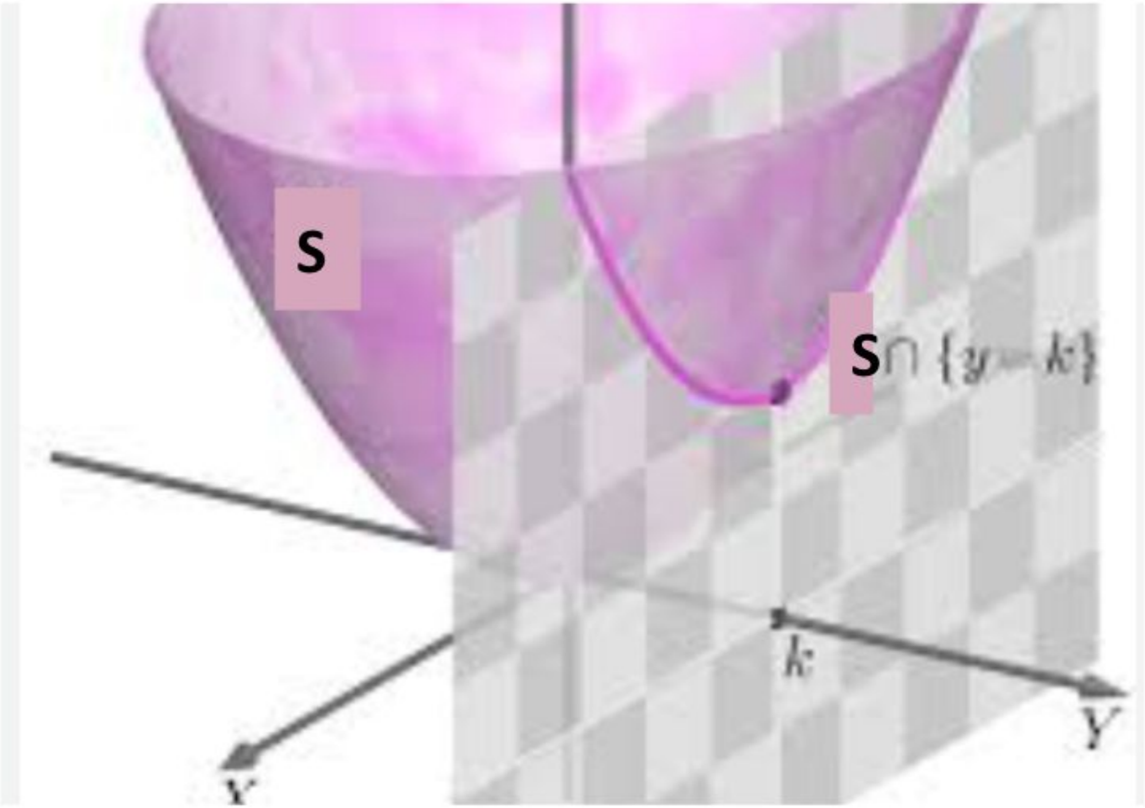
Exemplo 2. Superfície esférica de centro na origem (0,0,0) e raio $\sqrt{2}$.



$$x^2 + y^2 + z^2 = 2$$

Traços de uma superfície sobre planos

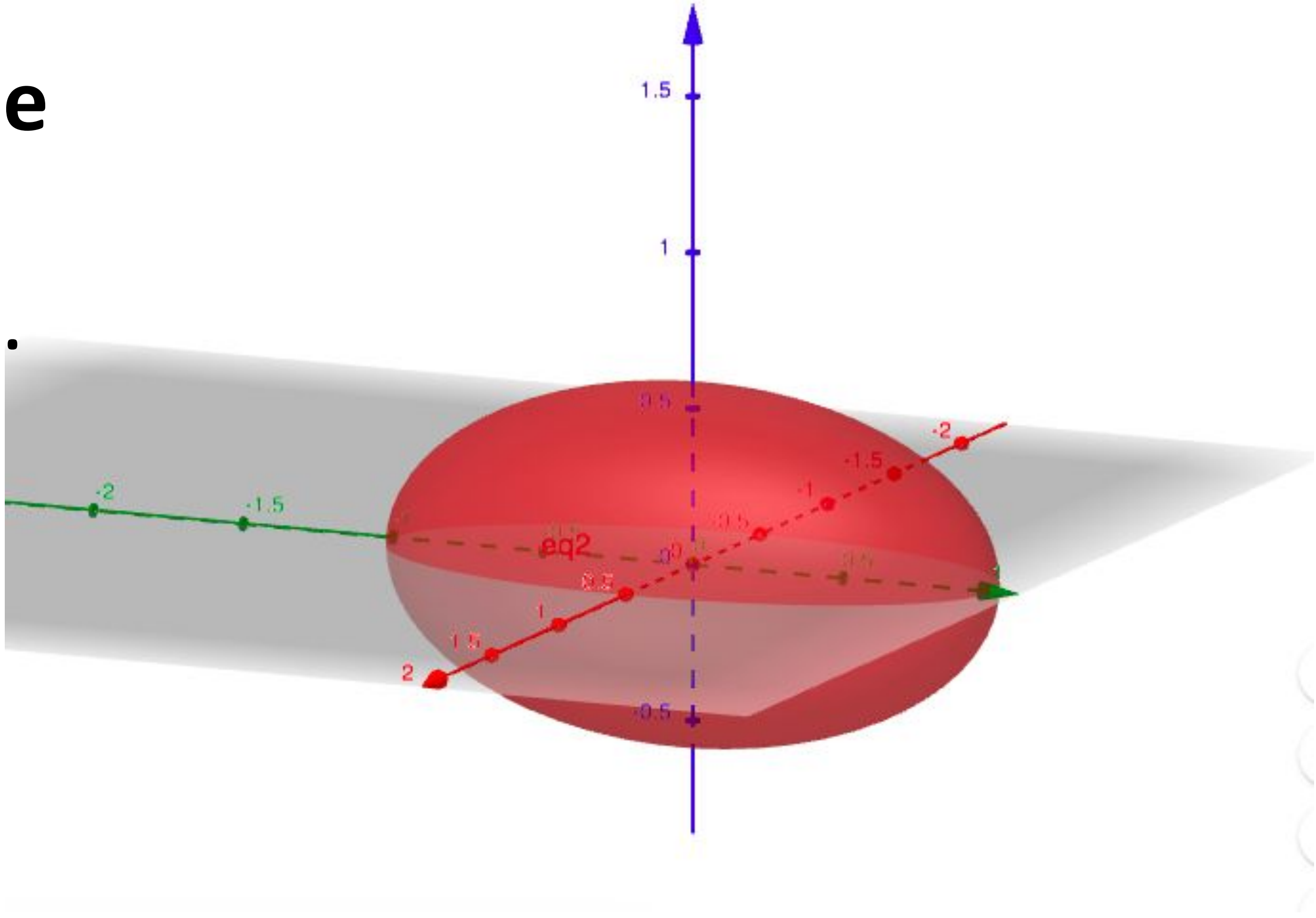
Definição. Chamamos **traço** de uma superfície S num plano π a curva dada pela intersecção de S e π.



Na figura, a curva em rosa é o traço do parabolóide S no plano y = k.

3. Elipsóide

Exemplo 1.



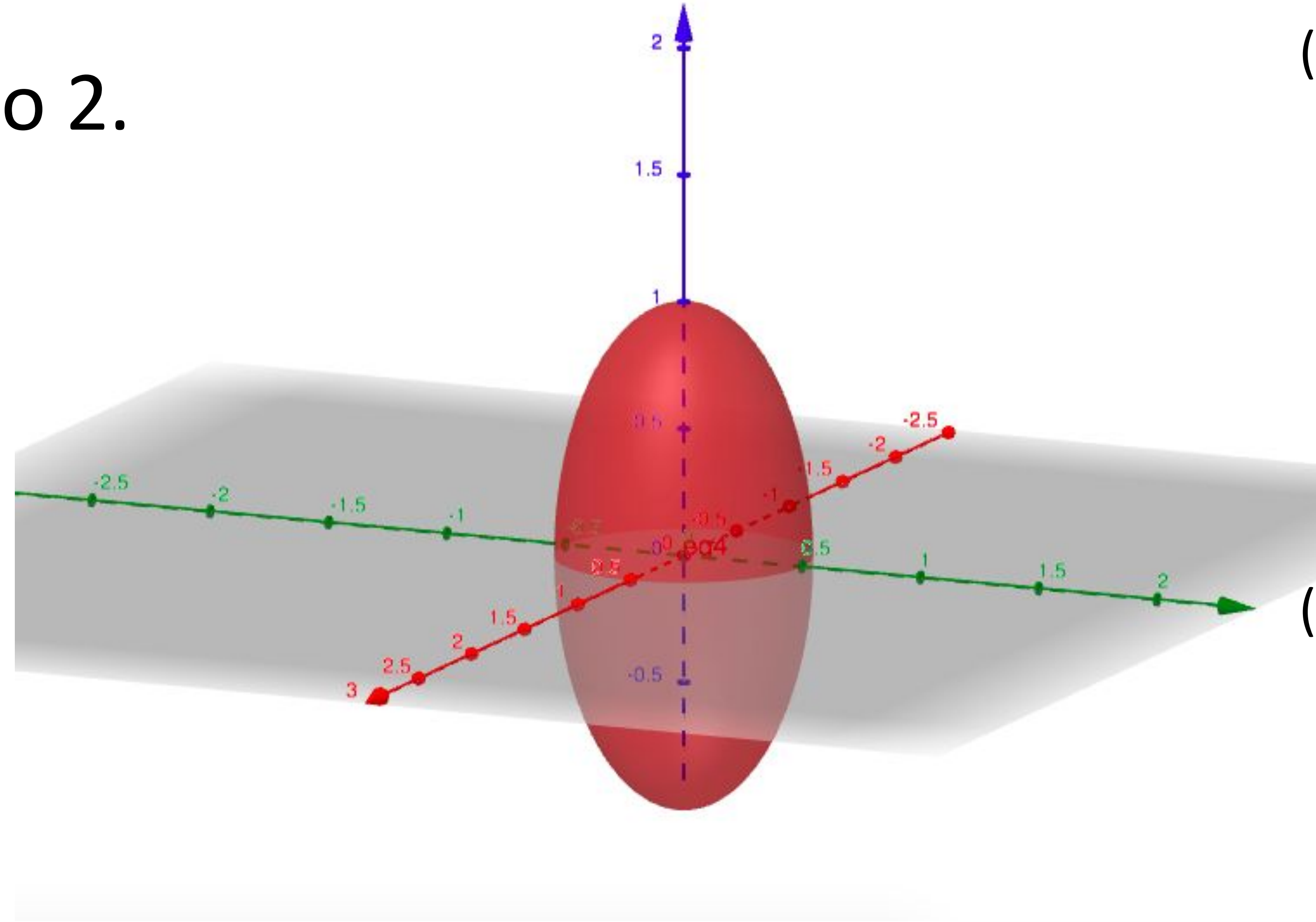
$$4x^2 + y^2 + 3z^2 = 1$$

Centro em O = (0,0,0)

Ajuda a entender a superfície quando entendemos os **traços** por planos
x = const.,
y = const.
e
z = const.

Ou seja, estudar a interseção da superfície com cada plano.

Exemplo 2.



$$4x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$$

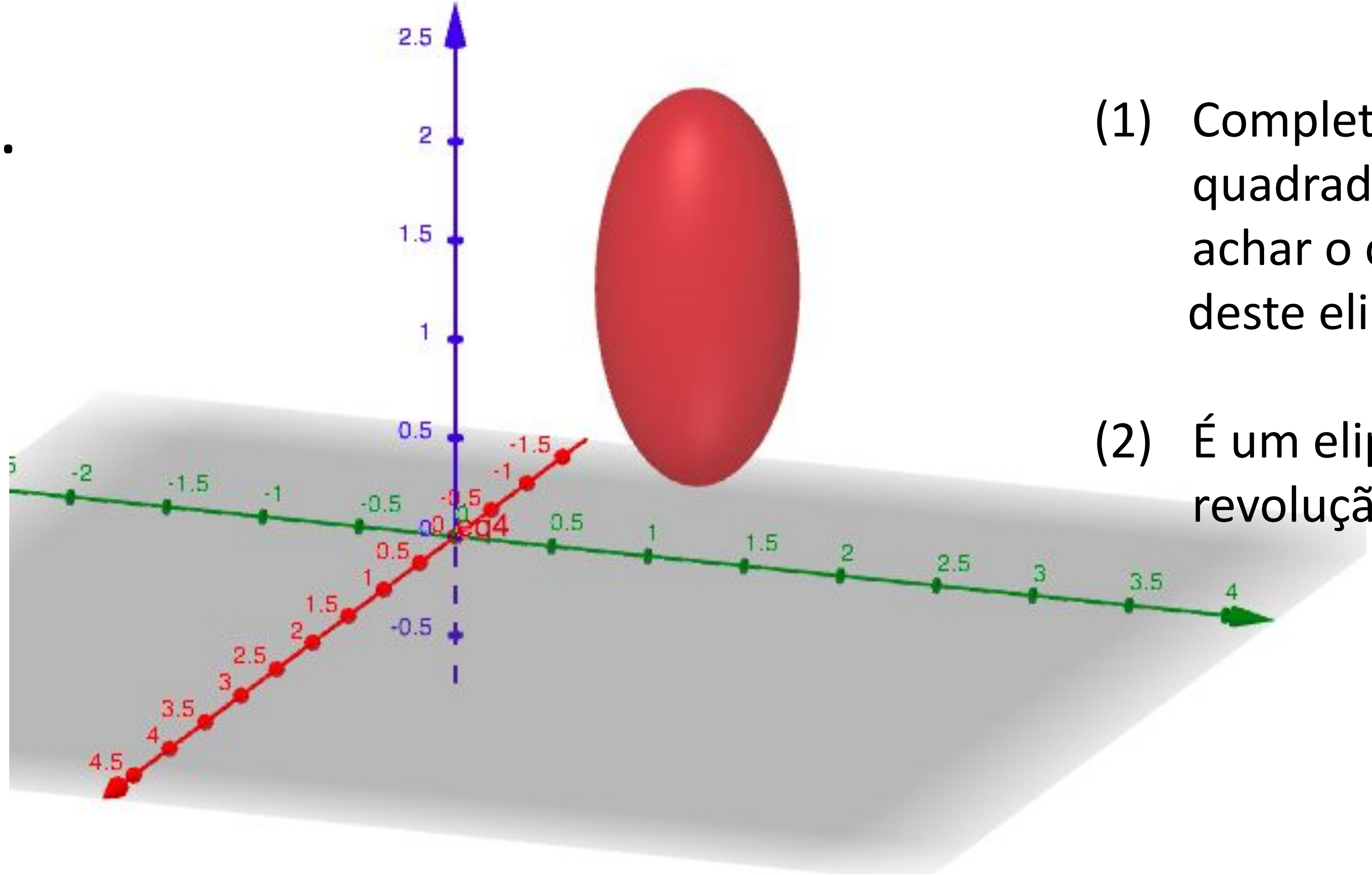
Centro em O = (0,0,0)

(1) Identifique o traço deste elipsóide nos planos z = k, para diferentes valores da constante k.

(2) Vamos entender o que é uma superfície de revolução e responder:

Este é um elipsóide de revolução?

Exemplo 3.



(1) Complete quadrados para achar o centro deste elipsóide.

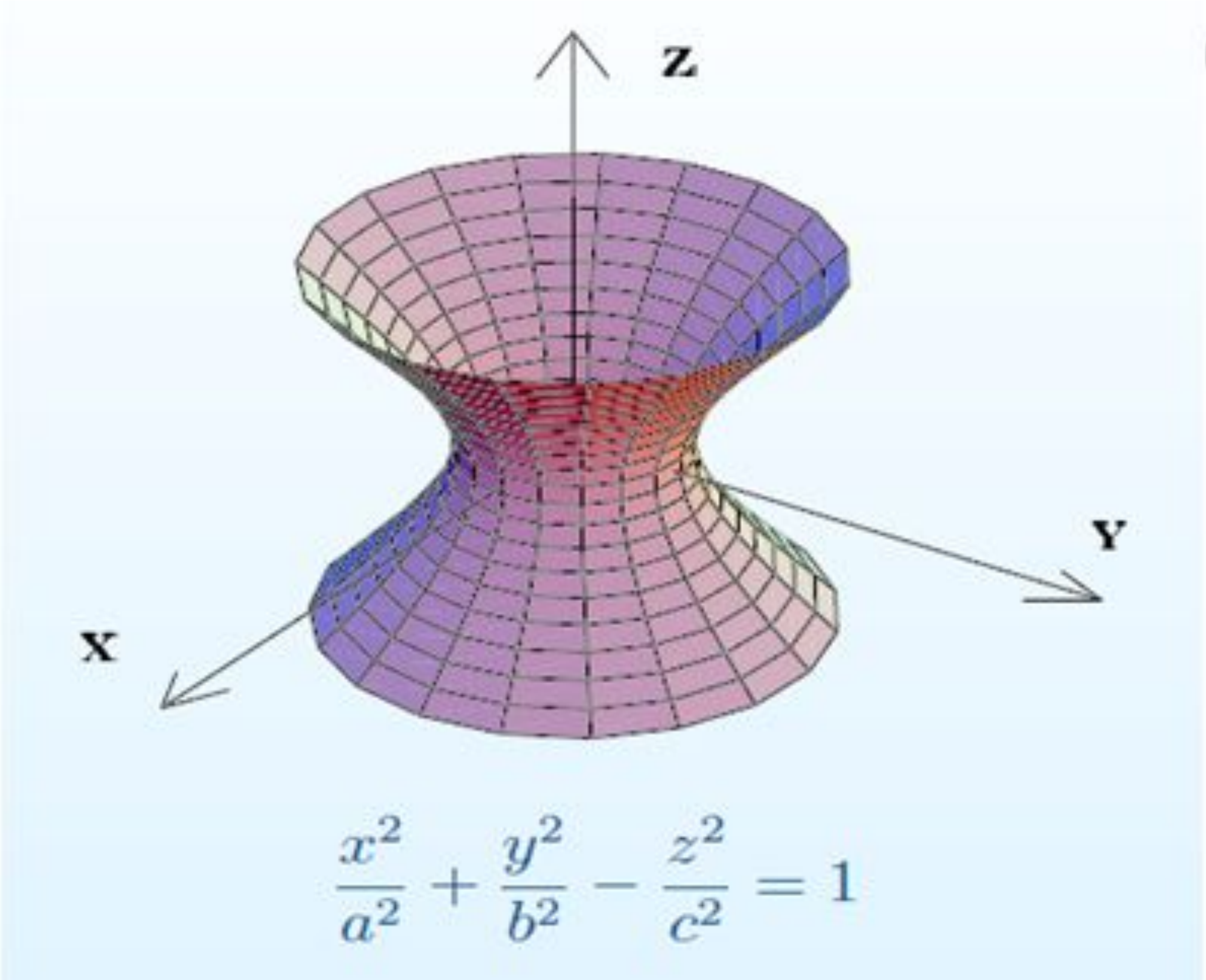
(2) É um elipsóide de revolução?

$$4x^2 + 4y^2 + z^2 - 16x - 16y - 4z = -35$$

Centro em C = (2,2,2)

4. Hiperbolóide de 1 folha

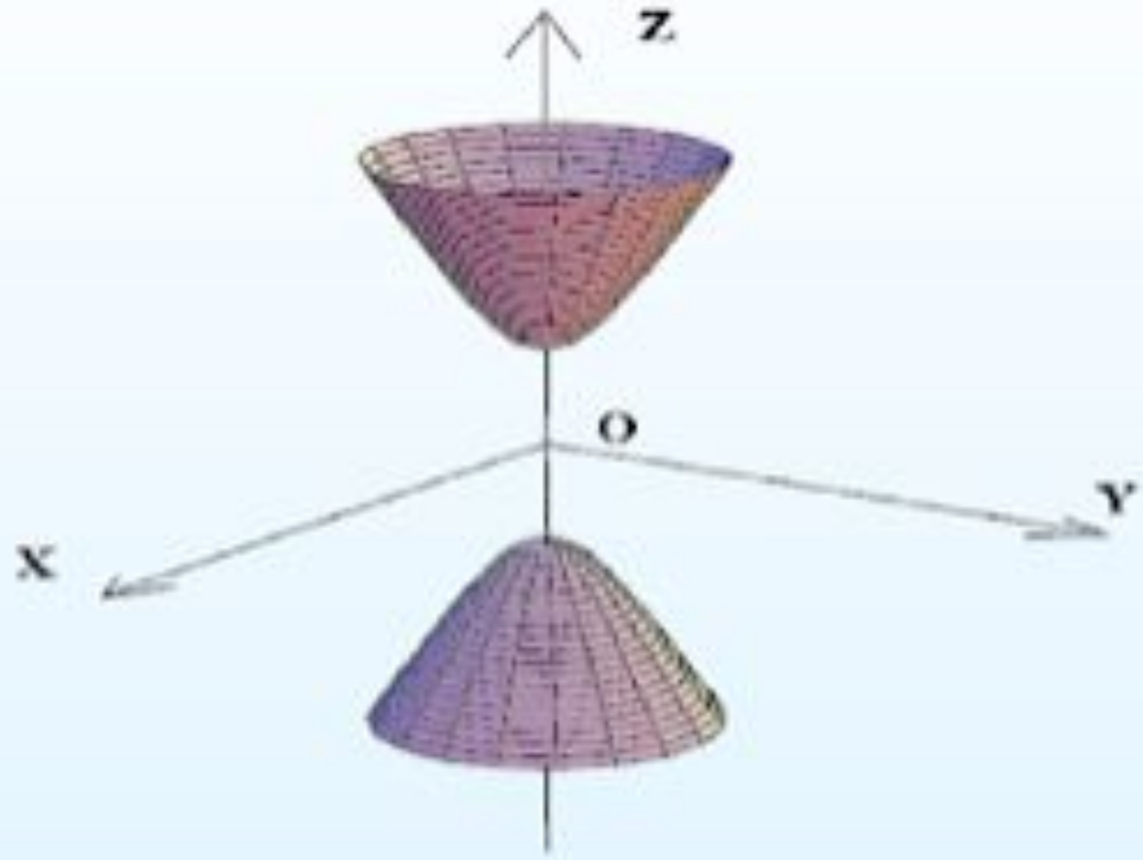
Exemplo.



Vamos enteder para quais valores de a, b, c este hiperbolóide de 1 folha é uma superfície de revolução.

5. Hiperbolóide de 2 folhas

Exemplo.



$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Vamos enteder para quais valores de a, b, c este hiperbolóide de 2 folhas é uma superfície de revolução.

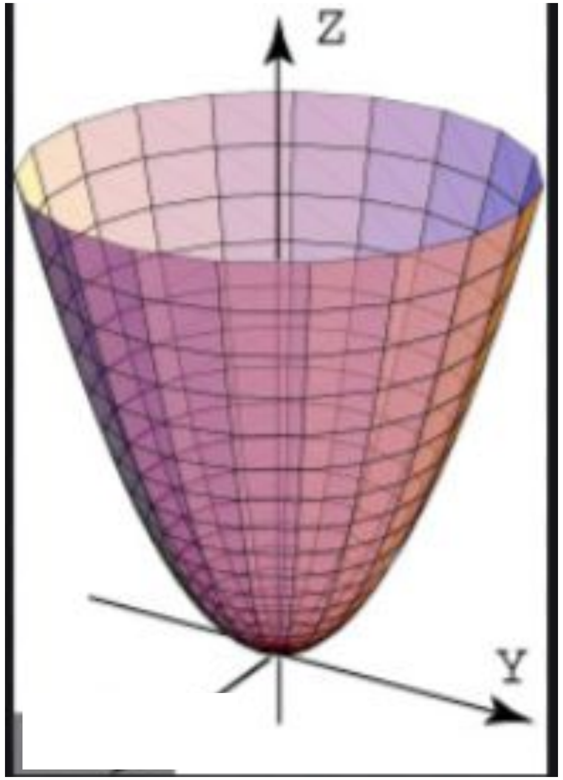
6. Parabolóide elíptico de revolução

BECD

Os traços por planos
z = constante
são circunferências.

Exemplo:

$$z = x^2 + y^2$$



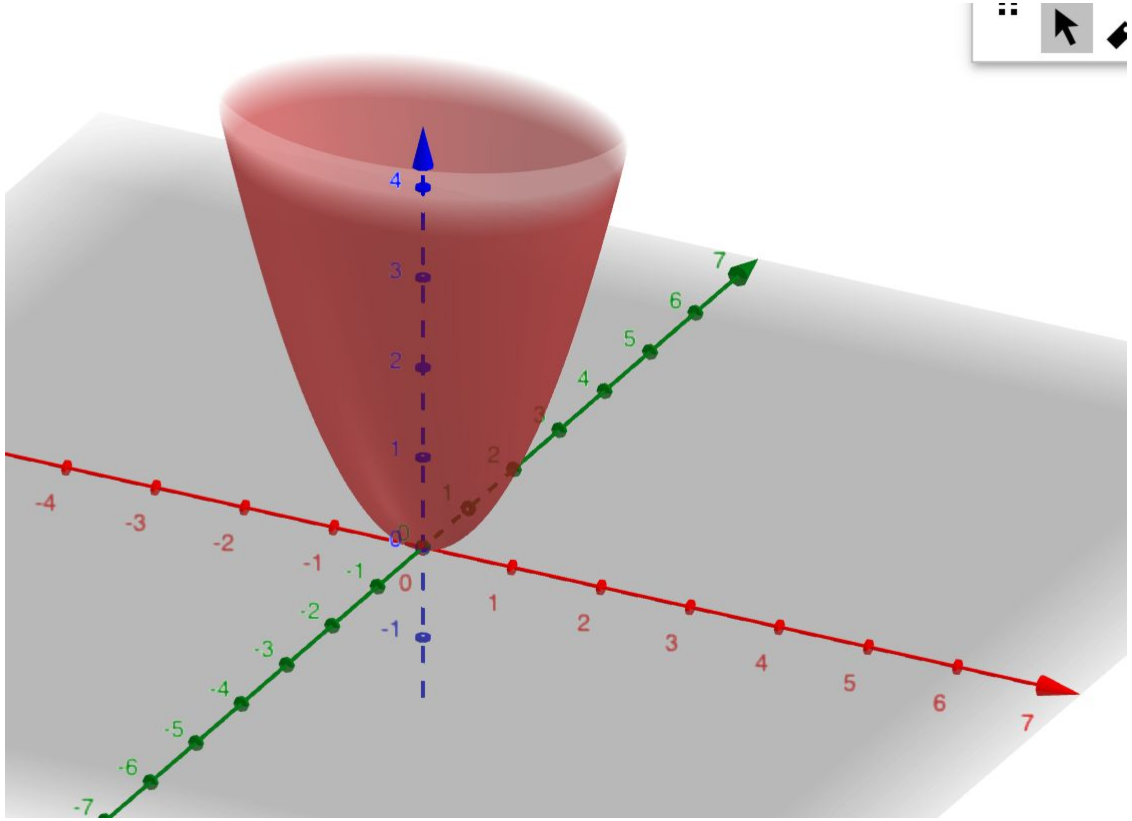
6. Parabolóide elíptico que não é de revolução

Prod

Os traços por planos
z = constante
são elipses.

Exemplo:

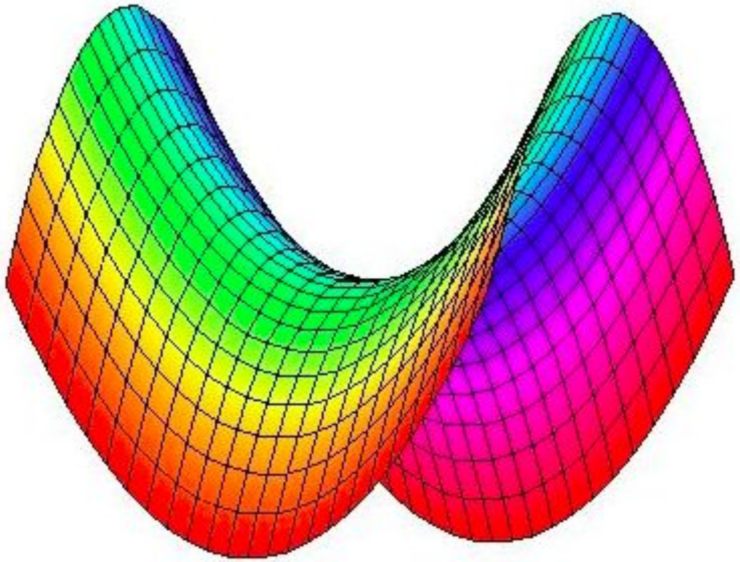
$$z = x^2 + 2y^2$$



7. Parabolóide hiperbólico (ou “sela de cavalo”)

Exemplo:

$$z = -x^2 + y^2$$

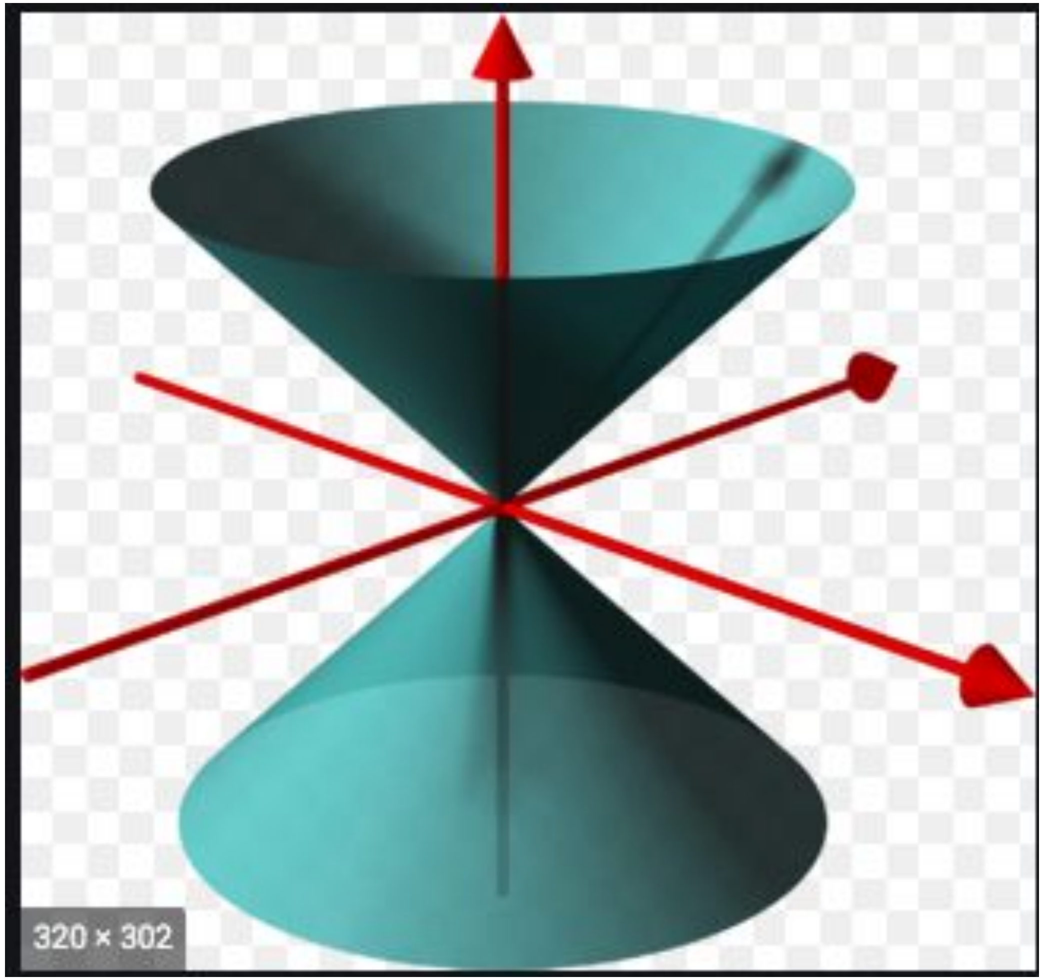


Os traços por planos z = k são hipérboles, se k diferente de zero.
O traço no plano x = 0 é uma parábola com concavidade para cima.
O traço no plano y = 0 é também uma parábola com concavidade para baixo.
O traço no plano z = 0 é um par de retas concorrentes.

8. Cone

Exemplo 1.

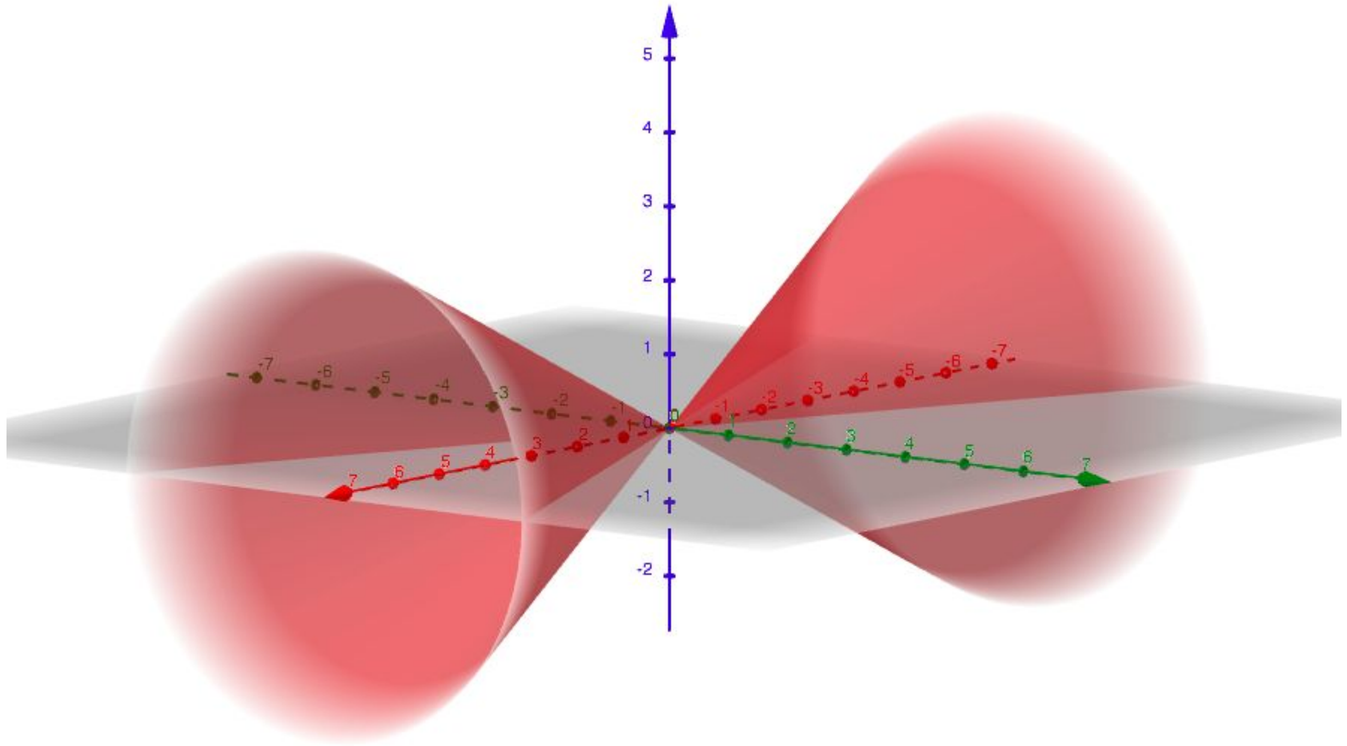
$$z^2 = x^2 + y^2$$



Este cone é de revolução. O eixo de revolução é o eixo-z.

Exemplo 2.

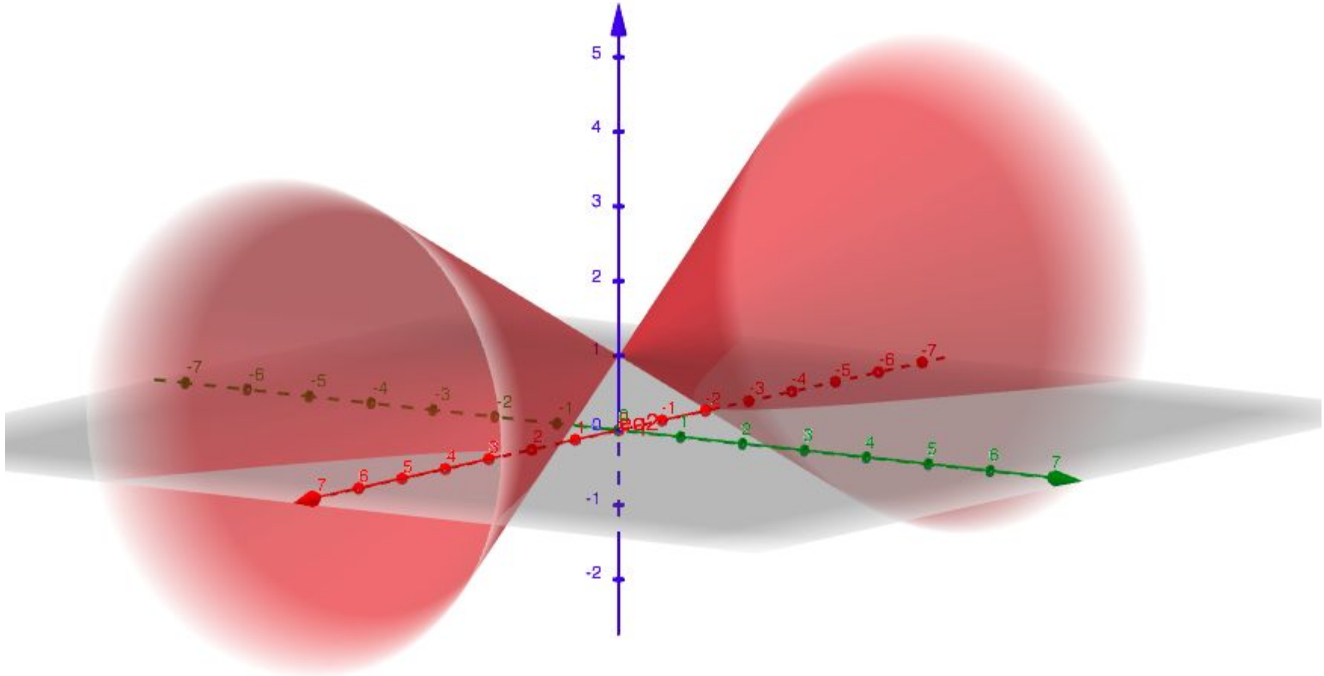
$$x^2 = y^2 + z^2$$



Este cone é de revolução. O eixo de revolução é a reta que passa pelo vértice V = (0,0,0) e tem vetor diretor $\vec{v} = (1, 0, 0)$

Exemplo 3.

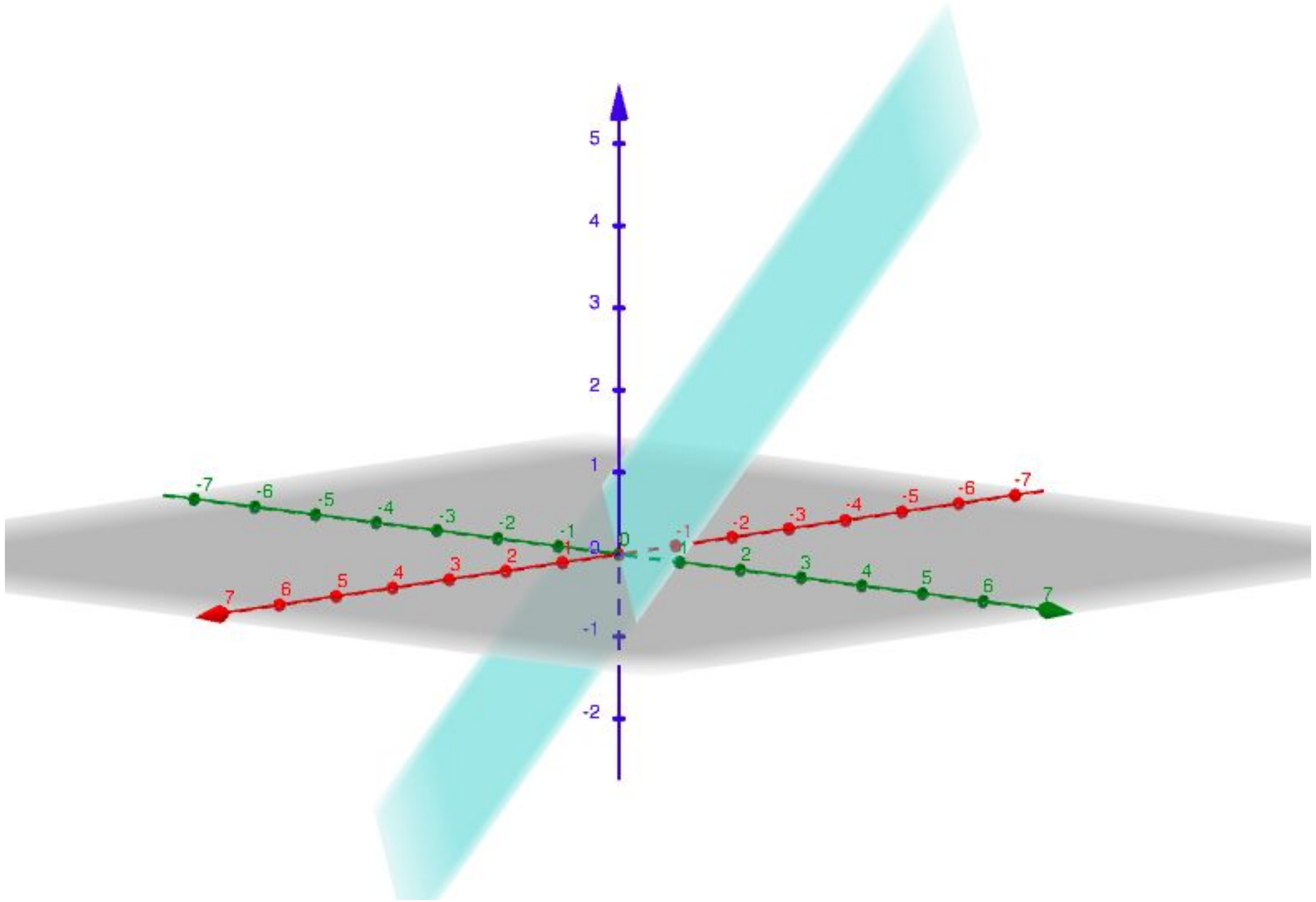
$$x^2 = y^2 + (z-1)^2$$



Este cone é de revolução. O eixo de revolução é a reta que passa pelo vértice V = (0,0,1) e tem vetor diretor $\vec{v} = (1,0,0)$

9. Plano

Exemplo:

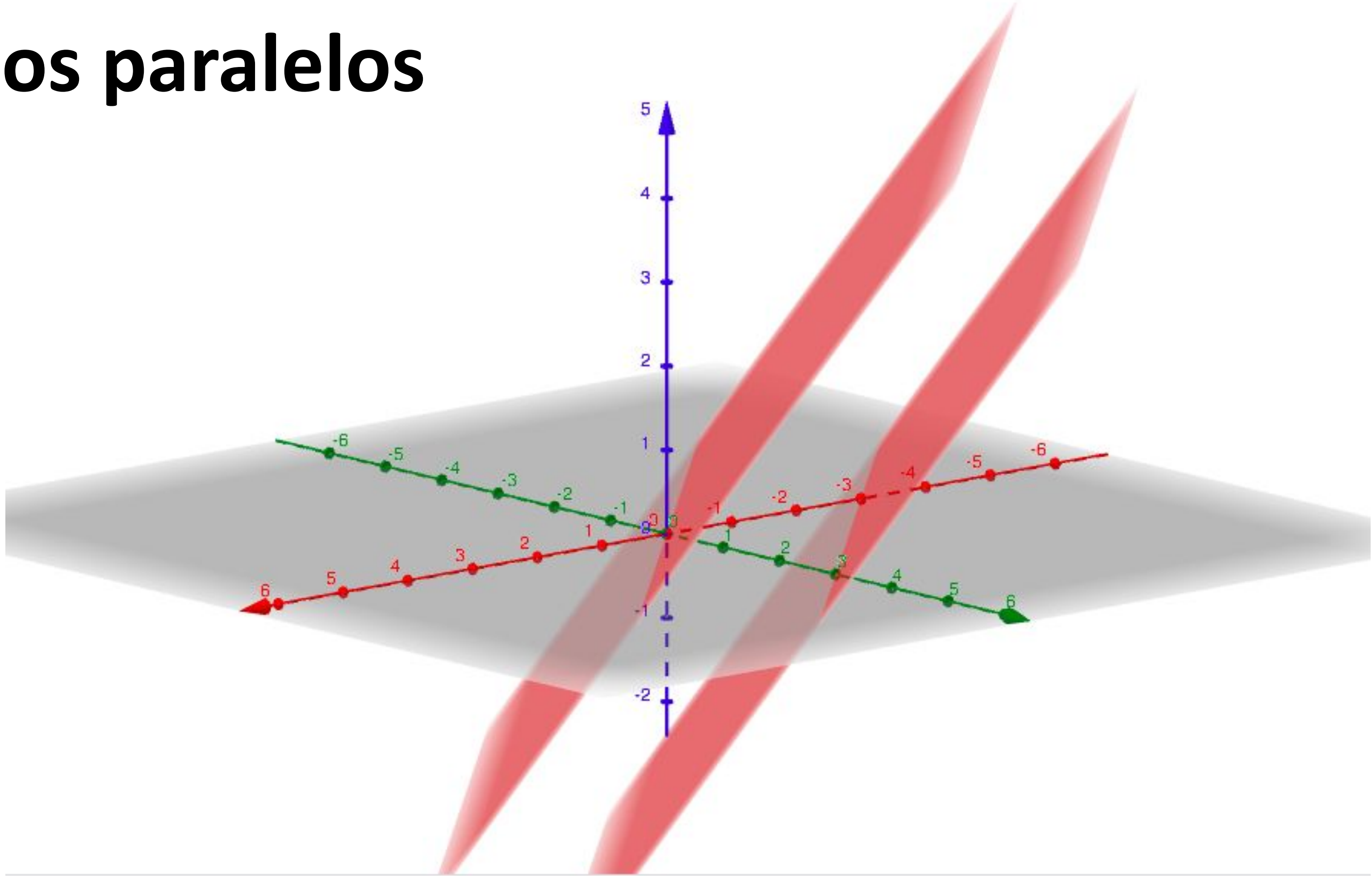


$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2yz = 0$$

$$(x - y + z)^2 = 0$$

10. Dois planos paralelos

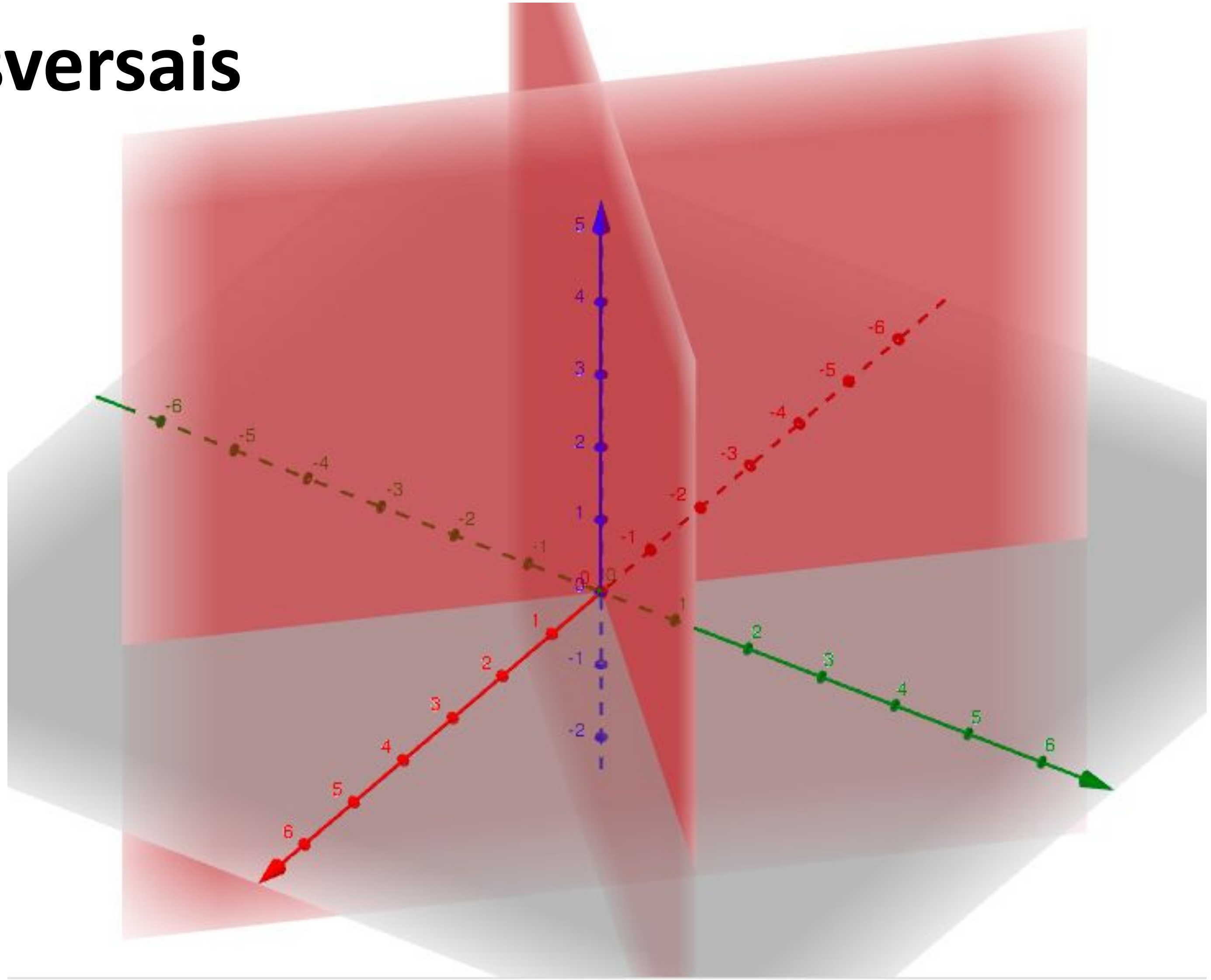
Exemplo:



$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2yz + 3x - 3y + 3z = 0$$

$$(x - y + z) \cdot (x - y + z + 3) = 0$$

11. Dois planos transversais

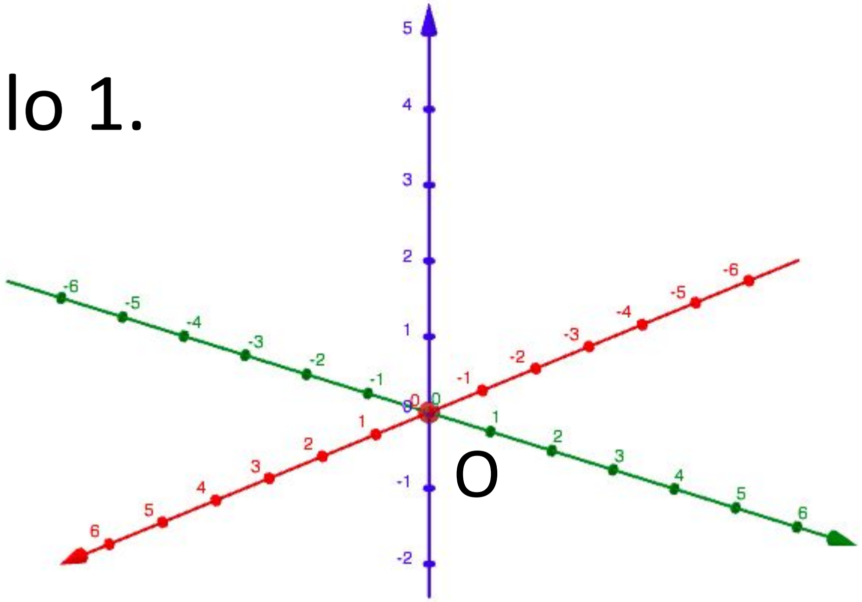


$$x^2 - y^2 = 0$$

$$(x - y) \cdot (x + y) = 0$$

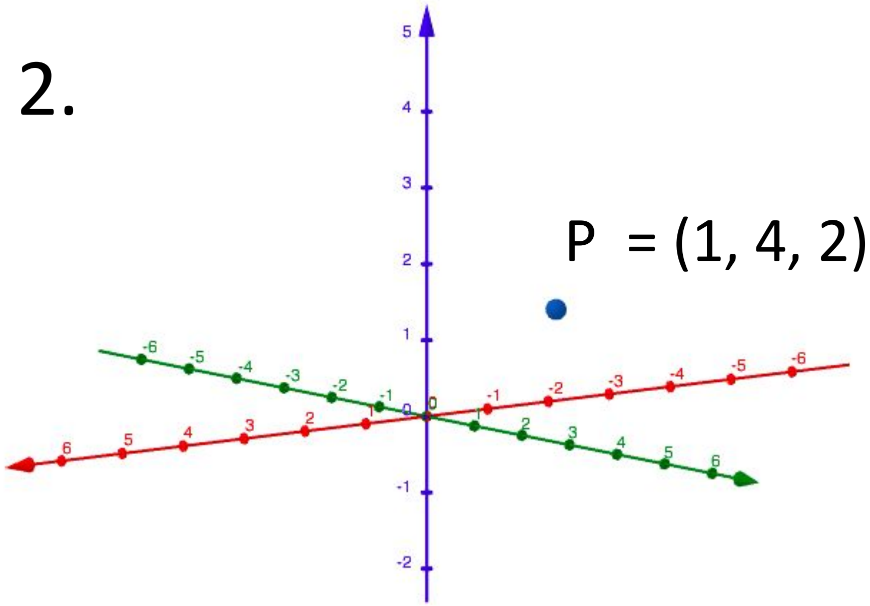
12. Ponto

Exemplo 1.



$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

Exemplo 2.



$$(x-1)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2 = 0$$

13. Conjunto vazio

Exemplo. $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$

Para casa:

Use o geogebra 3d para esboçar as quádricas dadas pelas equações abaixo. Depois de entender a figura, reconheça como um dos tipos vistos na aula de hoje.

(a) $x^2 - y^2 + z^2 = 1$

(b) $x^2 - y^2 = 1$

(c) $z = x^2 + y^2$

(d) $z^2 = x^2 + y^2$