Aula 22 SMA 300 GA

Miriam Manoel

ICMC/USP, São Carlos - SP

Terça-feira 13/06/2023

Na aula de hoje:

Cônicas – parte 3

- Exercícios deixados para casa: Aulas 19 e 21
- Mais um exemplo de reconhecimento de cônicas usando translação e rotação
- Quádricas - parte 1: superfície esférica, plano tangente e plano secante

Exercício (para casa).

Use o programa *online* Desmos 2D* para esboçar a cônica

$$x^2 - y^2 = a$$

para os seguintes valores de a: a = 4, 1, 0, - 1, - 4.

Sugestão. Depois de plotar cada uma das curvas, use o recurso de animação do Desmos* fazendo **a** variar.

Exercício. (para casa)

(a) Use possível translação e rotação para achar a equação reduzida da cônica dada por

$$4x^2 - 4xy + 7y^2 + 12x + 6y - 9 = 0$$

(a) Identifique a cônica (ou seja, dê seu nome)

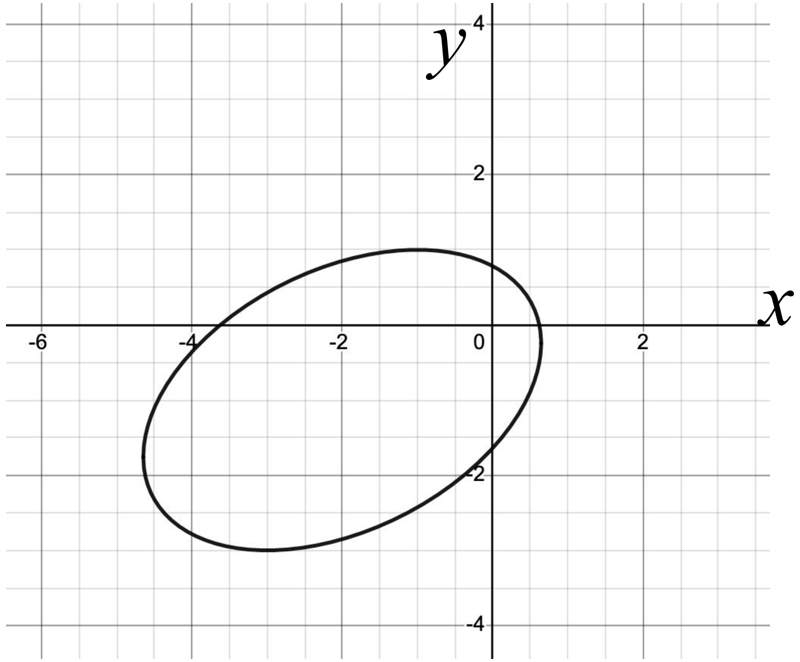
(a) Faça um esboço da cônica no sistema de coordenadas (x,y), juntamente com os sistemas auxiliares das mudanças de coordenadas.

Resposta. A cônica é uma elipse.

Equação reduzida após translação e rotação:

$$\frac{t^2}{8} + \frac{w^2}{3} = 1$$

$$4x^2 - 4xy + 7y^2 + 12x + 6y - 9 = 0$$



Esboço desta elipse no sistema de coordenadas (x, y)

Exemplos com o Desmos.

Use o Desmos 2D para fazer os esboços das seguintes cônicas:

$$7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 27 = 0$$

$$7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0$$

$$7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 29 = 0$$

$$x^2 + 6xy + y^2 + 28x + 12y + 27 = 0$$

Quádricas.

Definição.

Chamamos quádrica o lugar geométrico dos pontos (x ,y ,z) em $\mathbf{R}^3$ que satisfazem uma equação polinomial de grau 2:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0.$$

onde os coeficientes dos termos de grau 2 não se anulam simultaneamente.

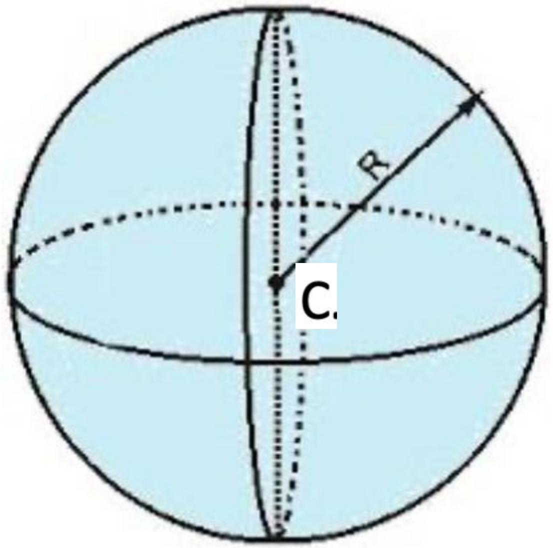
Nosso objetivo:

Estudar equações reduzidas. Não vamos estudar a equação em toda sua generalidade como fizemos para as cônicas.

A única quádrica que estudaremos em sua forma geral é a **superfície esférica**.

A superfície esférica.

Definição geométrica: Dado um ponto C= (x_o, y_o, z_o) e um número real $R > 0$, chamamos **superfície esférica** de centro C e raio R o lugar geométrico dos pontos (x,y,z) que distam R do ponto C.



$$X = (x, y, z) \in sup.esférica \iff \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = R \iff$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x_0 x - 2y_0 y - 2z_0 z + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - R^2 = 0$$

Portanto,

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

é equação de uma superfície esférica se e somente se,

$$a^2 + b^2 + c^2 - 4d > 0$$

em cujo caso seu centro é

$$C = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right)$$

e seu raio é

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}$$

Note! Partindo da equação

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

podemos completar quadrados para descobrir o centro e o raio.

Note: Dependendo dos valores de $a, b, c, d,$ a equação acima pode ser de:

- Uma superfície esférica, se $\boldsymbol{R} > 0$
- Um ponto, se $\boldsymbol{R} = 0$
- Conjunto vazio, se $\boldsymbol{R} < 0$

$$\boxed{R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}}$$

Exemplo. Qual o centro e o raio da superfície esférica

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 2z - 3 = 0$$

Completando quadrados, a equação acima fica:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 9$$

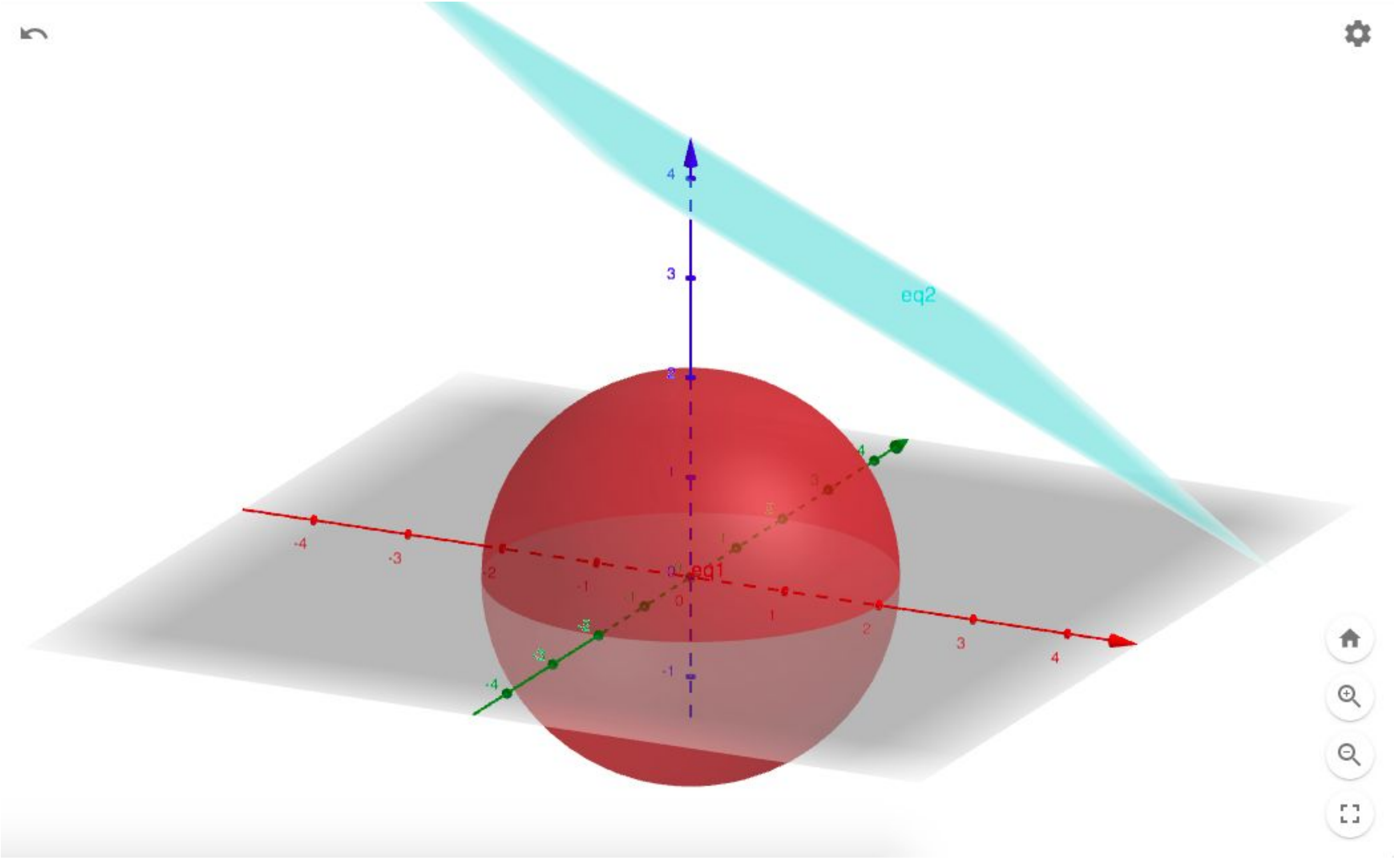
Resposta: Centro no ponto C = (1,2,1) e raio $\boldsymbol{R}$ = 3.

Agora na equação troque -3 por 6 e identifique.

Agora na equação troque de -3 por 15 e identifique.

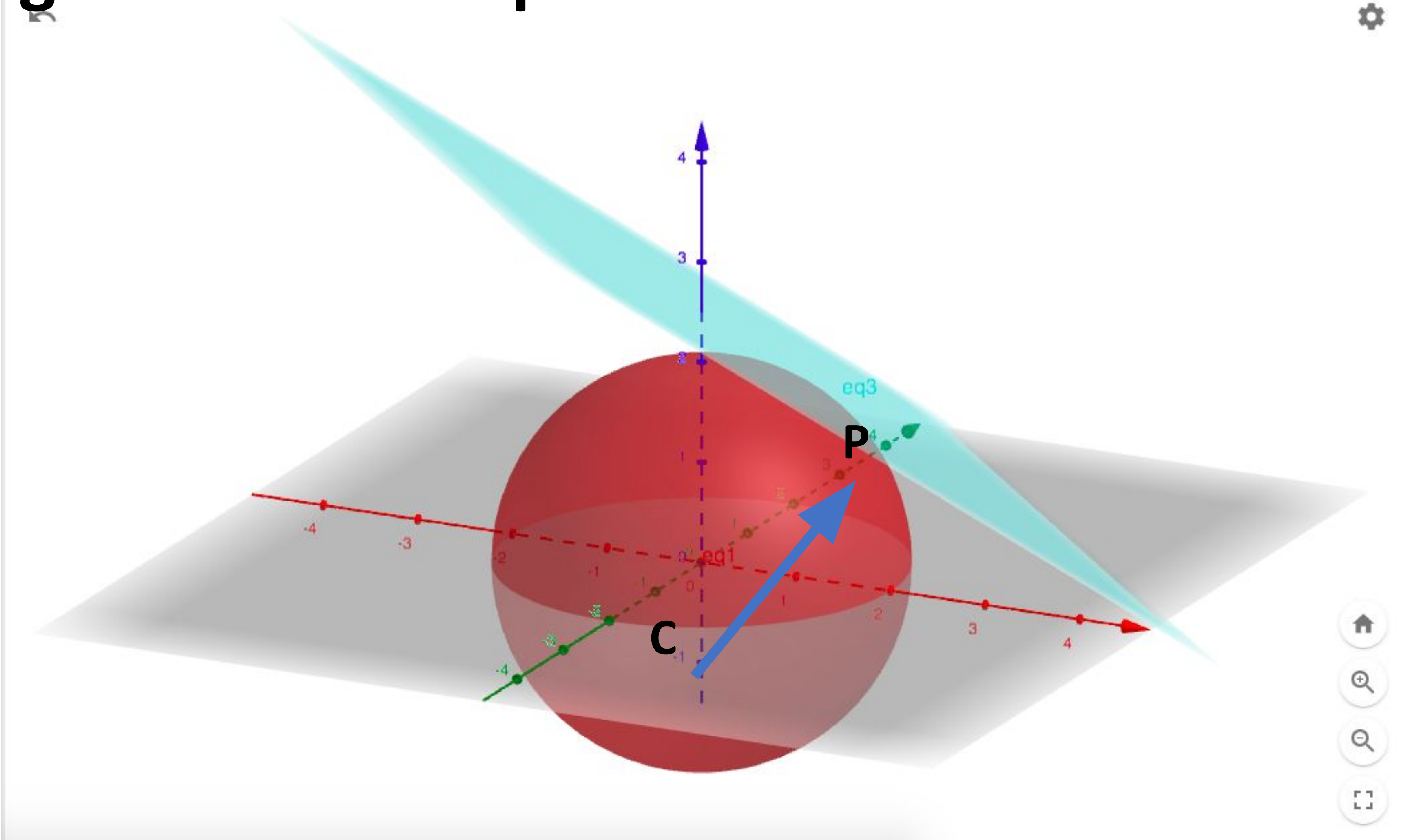
Posição relativa de plano e superfície esférica.

Um plano que não intercepta a superfície esférica.



A intersecção do plano e da superfície esférica é o vazio.

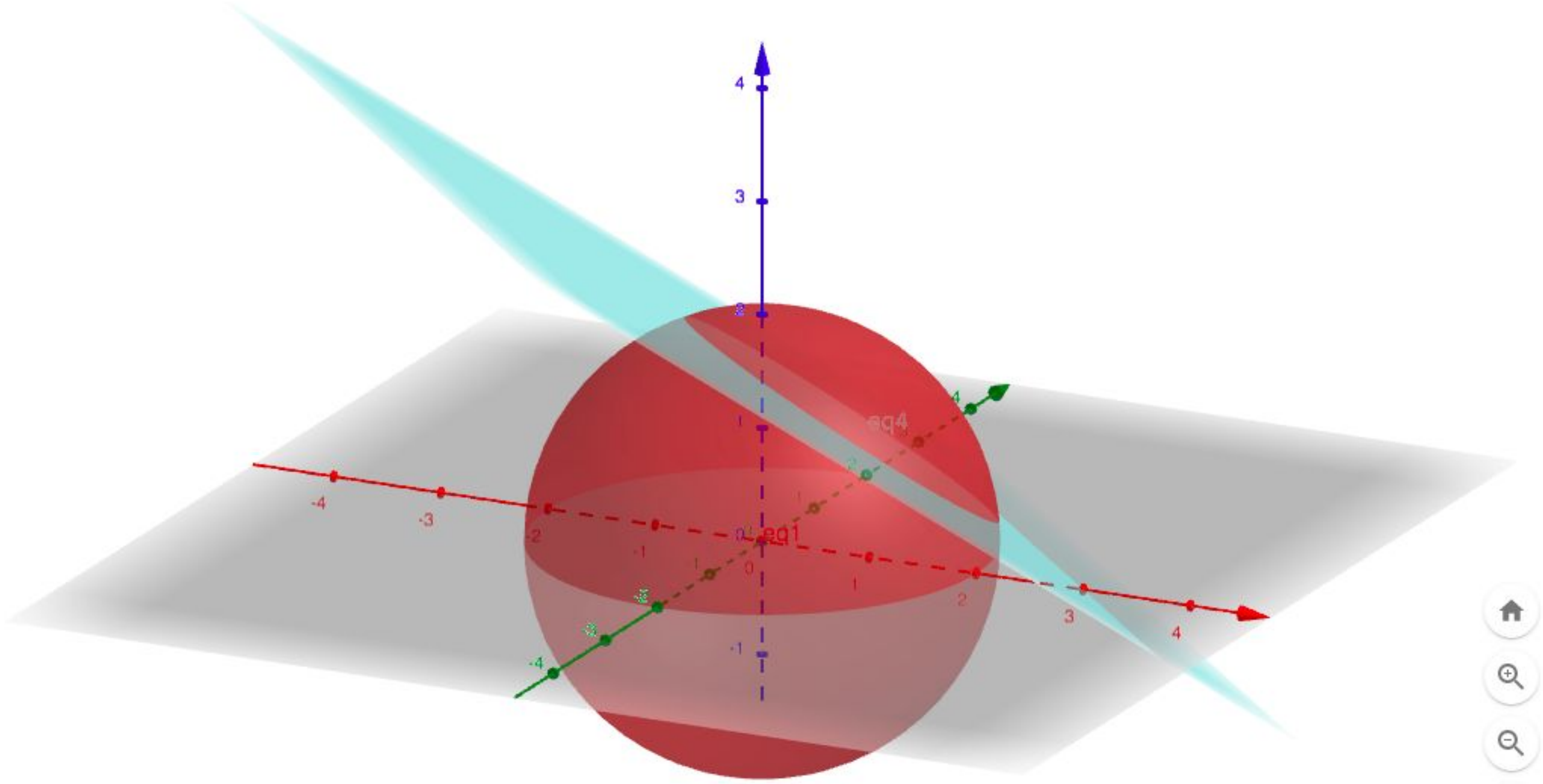
Plano tangente a uma superfície esférica.



A intersecção do plano e da superfície esférica é um ponto P.

O vetor $\overrightarrow{CP}$ é vetor normal ao plano tangente no ponto P

Um plano secante à superfície esférica.



A intersecção do plano e da superfície esférica é uma circunferência.

Exemplo. Dê a equação geral do plano que é tangente à superfície esférica

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 7 = 0$$

no ponto P = (3, 0, 2).