Aula 21 SMA 300 GA

Miriam Manoel

ICMC/USP, São Carlos - SP

Terça-feira 06/06/2023

Na aula de hoje:

Cônicas – parte 3

- Rotação do sistema de coordenadas
- Exemplo de reconhecimento de cônicas usando rotação
- Exemplos de reconhecimento de cônicas usando translação e rotação

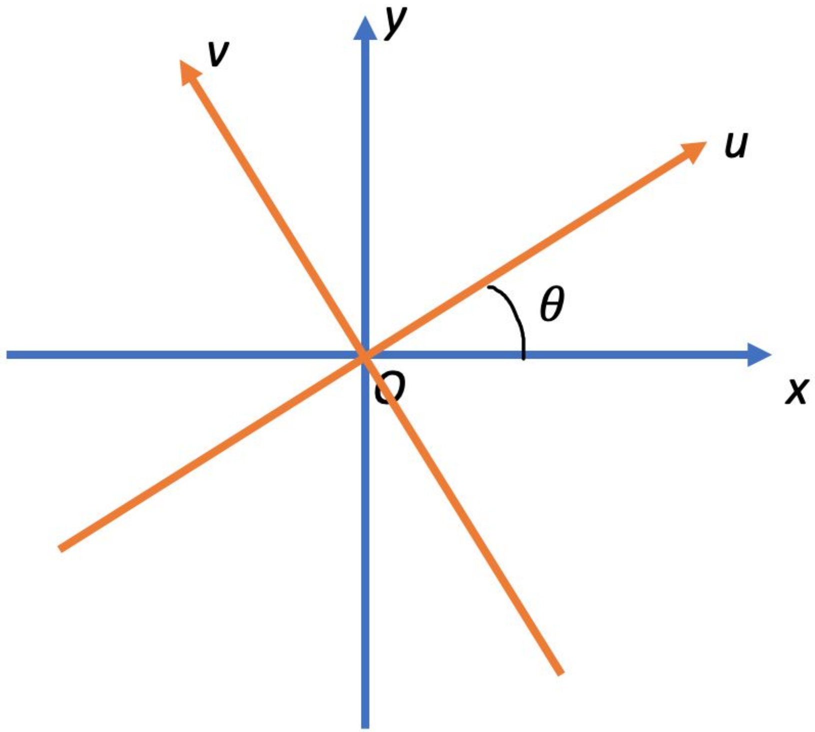
Nesta aula vamos trabalhar com a rotação do sistema de coordenadas, ainda com o objetivo de simplificar a expressão algébrica da cônica. Isto é, através de uma rotação, vamos passar para um novo sistema de coordenadas segundo o qual a mesma cônica tem equação ainda mais simplificada.

Com a **translação**, passamos para um novo sistema de coordenadas no qual a nova equação não tem os termos de grau 1.

Com uma **rotação**, eliminamos o termo misto.

Esses dois passos finalizam o processo, chegando na equação mais simples possível de uma cônica.

Rotação do sistema de coordenadas $(x\,,\,y)$



Rotação de ângulo θ no sentido anti-horário:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = u\cos\theta - v\operatorname{sen}\theta \\ y = u\operatorname{sen}\theta + v\cos\theta \end{cases}$$

Vamos ver como a rotação de ângulo θ no sentido anti-horário do sistema (x , y) afeta a equação

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

Substituindo as relações

$$\begin{cases} x = u\cos\theta - v\,\text{sen}\,\theta \\ y = u\,\text{sen}\,\theta + v\cos\theta \end{cases}$$

resulta em:

$$a(u\cos\theta - v\,\text{sen}\,\theta)^2 + b(u\cos\theta - v\,\text{sen}\,\theta)(u\,\text{sen}\,\theta + v\cos\theta) + c(u\,\text{sen}\,\theta + v\cos\theta)^2$$

$$+ d(u\cos\theta - v\,\text{sen}\,\theta) + e(u\,\text{sen}\,\theta - v\cos\theta) + f$$

Slide 6

Após a rotação a nova equação fica

$$a' u^2 + b' uv + c' v^2 + d' u + e' v + f'$$

Com

$$a' = a\cos^2\theta + b\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta + c\,\mathrm{sen}^2\theta$$

$$b' = -2a\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta + b(\cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\theta) + 2c\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta = (c-a)\,\mathrm{sen}\,2\theta + b\cos 2\theta$$

$$c' = a\,\mathrm{sen}^2\theta - b\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta + c\cos^2\theta$$

$$d' = d\cos\theta + e\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$e' = -d\,\mathrm{sen}\,\theta + e\cos\theta$$

$$f' = f$$

Vamos observar as 3 últimas igualdades do slide 6:

$$d' = d\cos\theta + e\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$e' = -d\,\mathrm{sen}\,\theta + e\cos\theta$$

$$f' = f$$

O que vemos:

- que a rotação não altera o termo independente;
- que o cálculo dos novos termos lineares (d' e e') são dados a partir dos antigos (d e e) seguindo a mesma fórmula matricial das coordenadas antigas e novas:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d' \\ e' \end{pmatrix}$$

Importante: Se $d = e = 0$, então $d' = e' = 0$. Ou seja, é vantagem começar com translação e depois fazer a rotação.

Queremos eliminar o termo quadratico misto, por isso vamos procurar θ de modo que $b' = 0$

Se $b = 0$, *não há* termo quadratico misto, então não precisamos fazer uma rotação do sistema de coordenadas.

Logo, aqui temos $b \neq 0$. Então

$$b' = 0 \iff (c-a)\,\mathrm{sen}\,2\theta + b\cos 2\theta = 0$$

$$\iff \boxed{\begin{array}{l} \tan(2\theta) = \dfrac{b}{a-c} \quad \text{quando } a \neq c \\ 2\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \text{isto é,} \quad \theta = \frac{\pi}{4} \quad \text{quando } a = c \end{array}}$$

ou

Após a rotação, a nova equação fica:

$$a'u^2 + c'v^2 + d'u + e'v + f' = 0$$

onde

$$\begin{cases} a' + c' = a + c \\ a' - c' = \dfrac{b}{\operatorname{sen} 2\theta} = b\sqrt{1 + \left(\dfrac{a-c}{b}\right)^2} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} d' \\ e' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$$

$$f' = f.$$

Exemplo: Reconheça a cônica: $4x^2 + 3\sqrt{3}xy + y^2 - 1 = 0$.

Rotação:

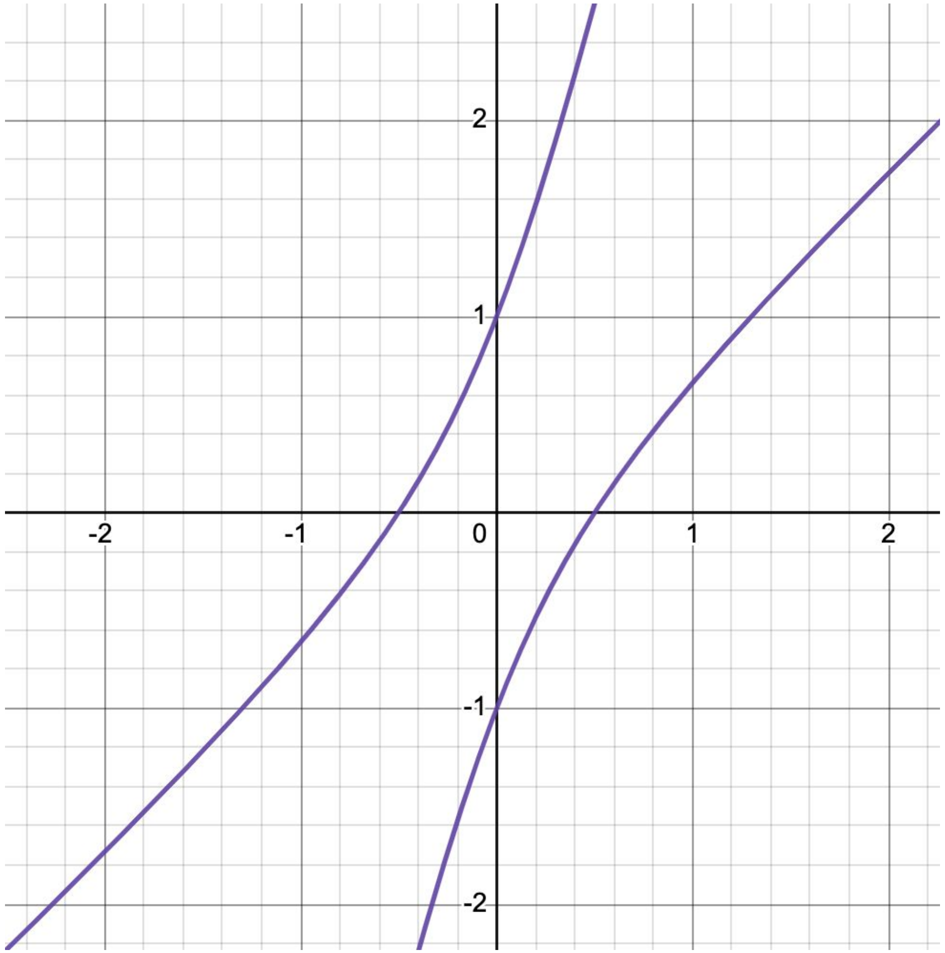
$$tg\,2\theta = \frac{b}{a-c} = \frac{3\sqrt{3}}{4-1} = \sqrt{3} \Rightarrow 2\theta = \pi/3 \Rightarrow sen 2\theta = \sqrt{3}/2$$

$$\begin{cases} a' + c' = 5 \\ a' - c' = 3\sqrt{3}\sqrt{1+\left(\frac{a-c}{b}\right)^2} = 3\sqrt{3}\sqrt{1+\left(3/3\sqrt{3}\right)^2} = 3\sqrt{3}\sqrt{4/3} = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a' + c' = 5 \\ a' - c' = 6 \end{cases} \Rightarrow a' = 11/2,\ c' = -\frac{1}{2}$$

Após a rotação, no sistema (u, v) a eq. é $\boxed{\frac{11}{2}u^2 - \frac{1}{2}v^2 - 1 = 0}$

$$4x^2 + 3\sqrt{3}xy + y^2 - 1 = 0$$



hipérbole

Exemplo: Reconheça a cônica:
$7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0.$

Translações:
$$\begin{cases} 2ah + bk = -d \\ bh + 2ck = -e \end{cases} \qquad \begin{cases} 14h + 6k = -28 \\ 6h - 2k = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} h = -2 \\ k = 0 \end{matrix}$$

Nova eq. no sistema (u,v):

$$7u^2 + 6uv - v^2 + f' = 0$$

$$f' = g(h,k) = 7(-2)^2 + 6(-2).0 - 0 + 28(-2) + 12.0 + 28 = 0$$

$$\boxed{7u^2 + 6uv - v^2 = 0}$$

$$7u^2 + 6uv - v^2 = 0$$

$$\text{tg}\, 2\theta = \frac{b}{a-c} = \frac{6}{8} = 3/4 = \frac{\text{sen}\, 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{3/5}{4/5} \Rightarrow \text{sen}\, 2\theta = 3/5$$

$$\begin{cases} a' + c' = 6 \\ a' - c' = 30/3 = 10 \end{cases} \qquad \begin{cases} a' + c' = 6 \\ a' - c' = 10 \end{cases} \Rightarrow a' = 8,\ c' = -2$$

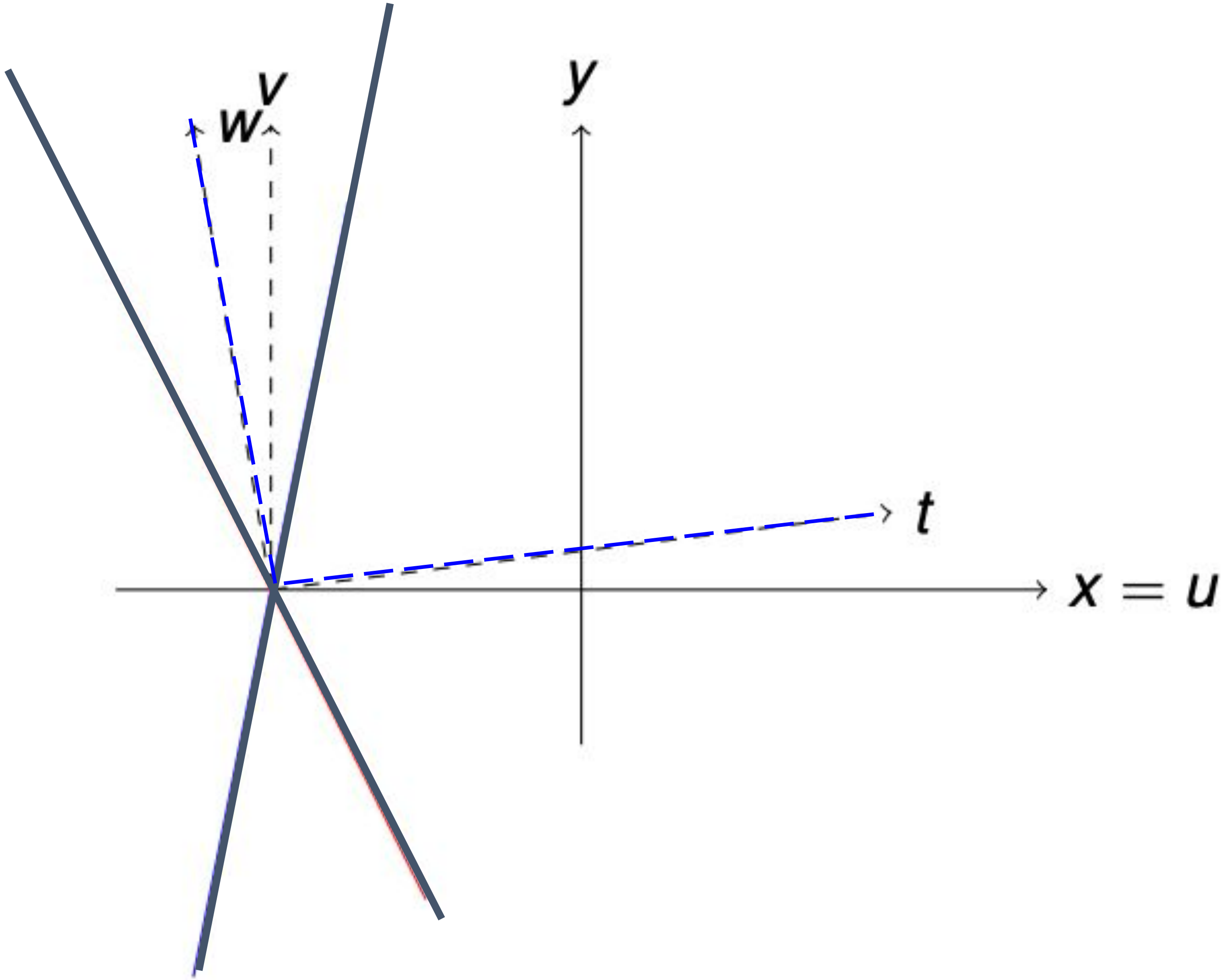
Após a rotação, a equação em (t,w) é

$$8t^2 - 2w^2 = 0$$

$$4t^2 - w^2 = 0$$

$(t-w)(t+w) = 0$: Par de retas concorrentes.

$$7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0$$



duas retas concorrentes

Exemplo: Reconheça a cônica:

$$16x^2 - 24xy + 9y^2 - 38x - 34y + 71 = 0$$

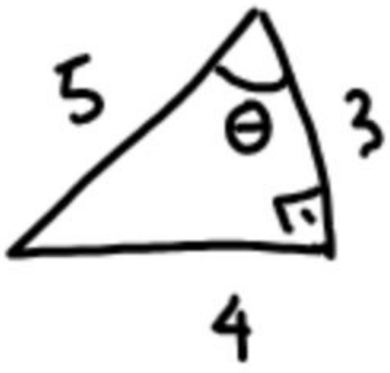
Translação: $\begin{cases} 32h - 24k = 38 \\ 24h + 18k = 34 \end{cases}$ $\begin{cases} 4h - 3k = 19/4 \\ -4h + 3k = 17/3 \end{cases}$: S I.

Rotação:

$tg 2\theta = \dfrac{b}{a-c} = -24/7 < 0 \Rightarrow 2\theta \in 2.^{\circ}$ quadrante $\Rightarrow$ $\cos 2\theta < 0$, $\operatorname{sen} 2\theta > 0$

$\begin{cases} a' + c' = 25 \\ a' - c' = -25 \end{cases} \Rightarrow a' = 0, \; c' = 25$

$$\begin{pmatrix} d' \\ e' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$$



$$\operatorname{sen}2\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2 2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{1+49/576}} = \frac{24}{25}$$

$$\cos^2 2\theta + \operatorname{sen}^2 2\theta = 1 \Rightarrow \cos 2\theta = -\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 2\theta} = -\sqrt{1-(24/25)^2} = -7/25$$

$$\downarrow$$

$$\cos 2\theta < 0$$

$$\left.\begin{aligned} \cos^2\theta &= \frac{1+\cos 2\theta}{2} = 9/25 \\ \operatorname{sen}^2\theta &= \frac{1-\cos 2\theta}{2} = 16/25 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \cos\theta = 3/5, \ \operatorname{sen}\theta = 4/5$$

$$\theta \cong 53^\circ$$

$$\begin{pmatrix} d' \\ e' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -38 \\ -34 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5}(-38) + \frac{4}{5}(-34) \\ -\frac{4}{5}(-38) + \frac{3}{5}(-34) \end{pmatrix} =$$

Após a rotação, a eq. em (t, w) é

$$0t^2 + 25w^2 - 50t + 10w + 71 = 0$$

$$\underbrace{25w^2}_{} - 50t + \underbrace{10w}_{} - 71 = 0$$

$$25\left(w + \frac{1}{5}\right)^2 - 50t - 71 = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{w} = w + \frac{1}{5} \\ 25\bar{w}^2 - 50t - 71 = 0 \\ \cdot \text{PARÁBOLA} \end{array} \right.$$

$$25\bar{w}^2 - 50t - 71 = 0$$

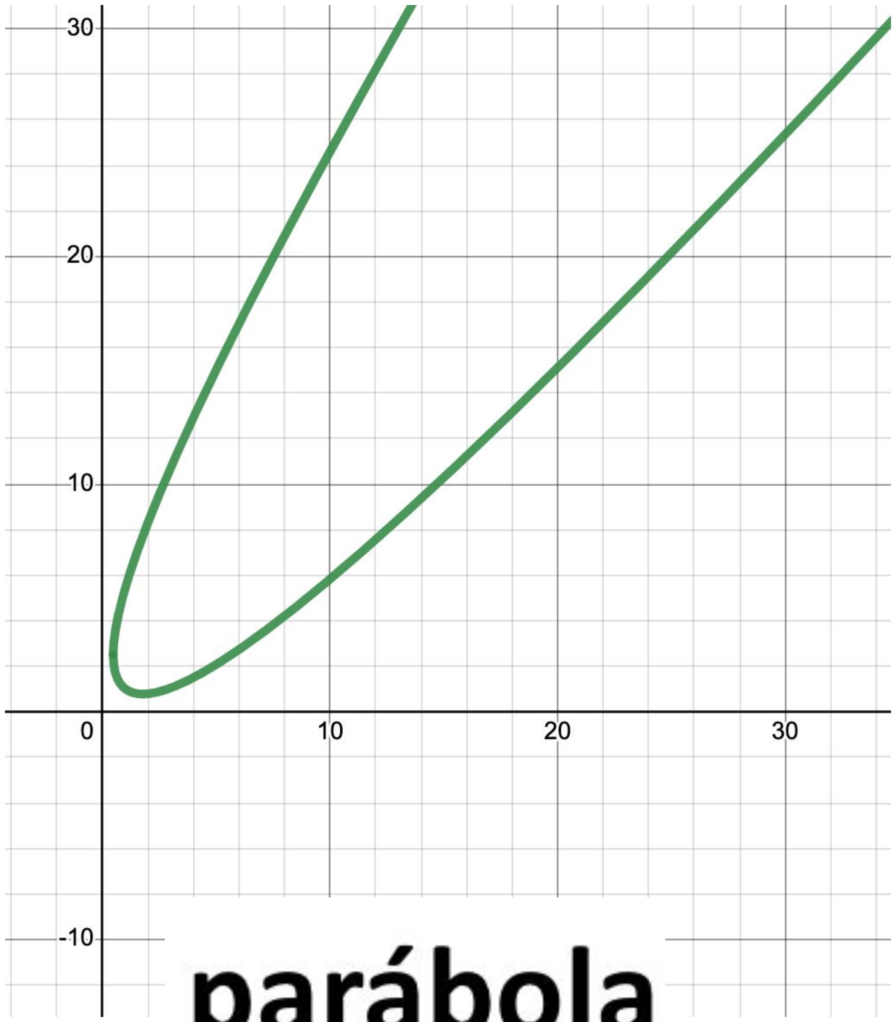
$$25\bar{w}^2 - 50\underbrace{\left(t - \tfrac{71}{50}\right)}_{\bar{t} \,=\, t - 71/50} = 0$$

$$25\bar{w}^2 - 50\bar{t} = 0$$

$$\boxed{\bar{w}^2 - 2\bar{t} = 0}$$ Parábola.

$$(x,y) \xrightarrow{\text{rotação}} (t,w) \xrightarrow{\text{translação}} (\bar{t},\bar{w})$$

$$16x^2 - 24xy + 9y^2 - 38x - 34y + 71 = 0$$



parábola

Exercício. (para casa)

(a) Use possível translação e rotação para achar a equação reduzida da cônica dada por

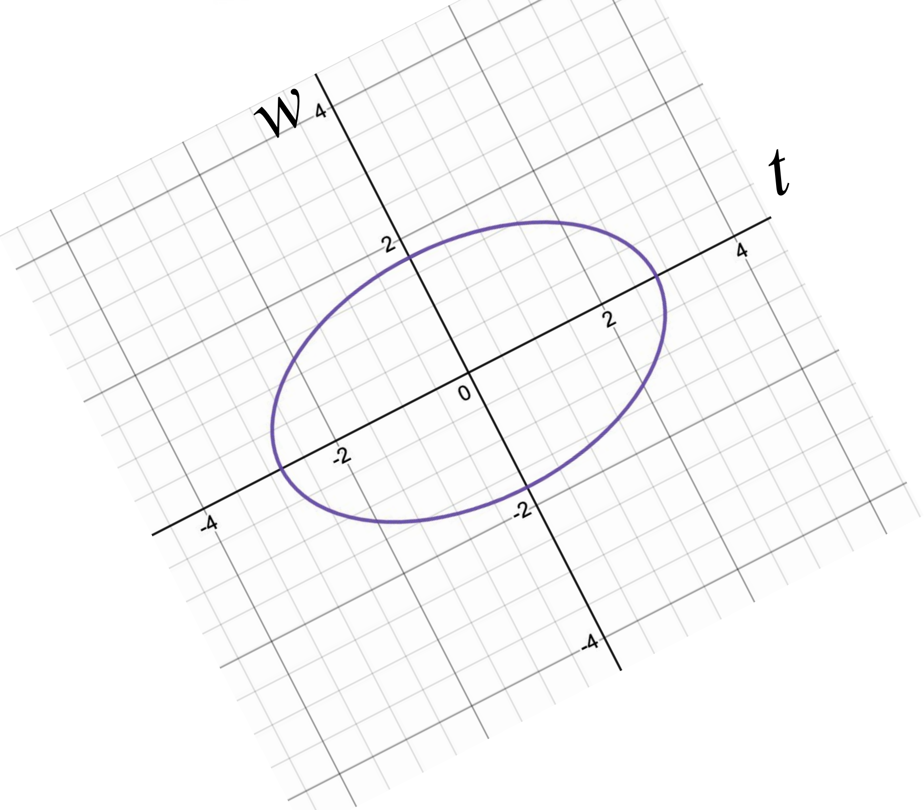
$$4x^2 - 4xy + 7y^2 + 12x + 6y - 9 = 0$$

(b) Identifique a cônica (ou seja, dê seu nome)

(c) Faça um esboço da cônica no sistema de coordenadas (x,y), juntamente com os sistemas auxiliares das mudanças de coordenadas.

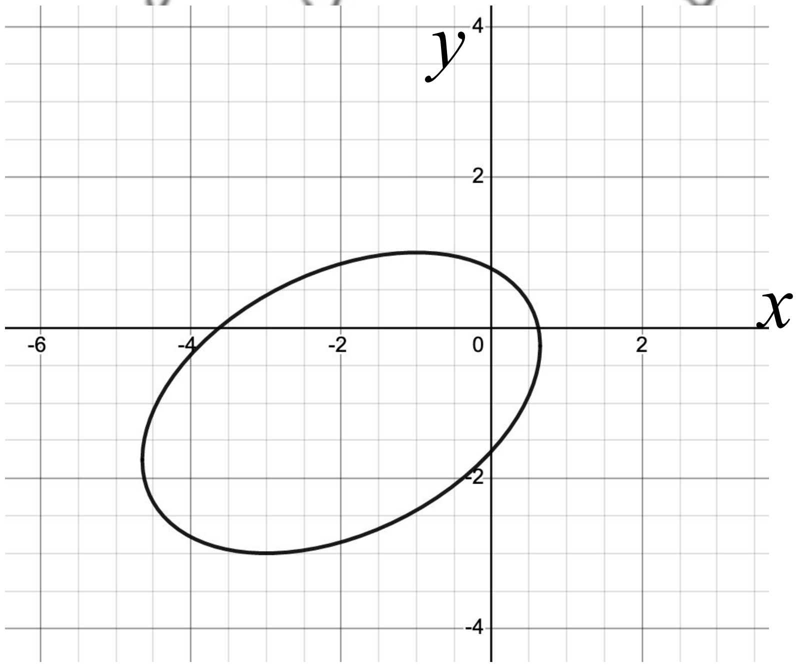
Resposta. A cônica é uma elipse.

$$\frac{t^2}{8} + \frac{w^2}{3} = 1$$



Esboço desta elipse no sistema de coordenadas (t, w)

$$4x^2 - 4xy + 7y^2 + 12x + 6y - 9 = 0$$



Esboço desta elipse no sistema de coordenadas (x, y)