Aula 19 - SMA 300 GA

Miriam Manoel

ICMC/USP, São Carlos - SP

Terça-feira 30/05/2023

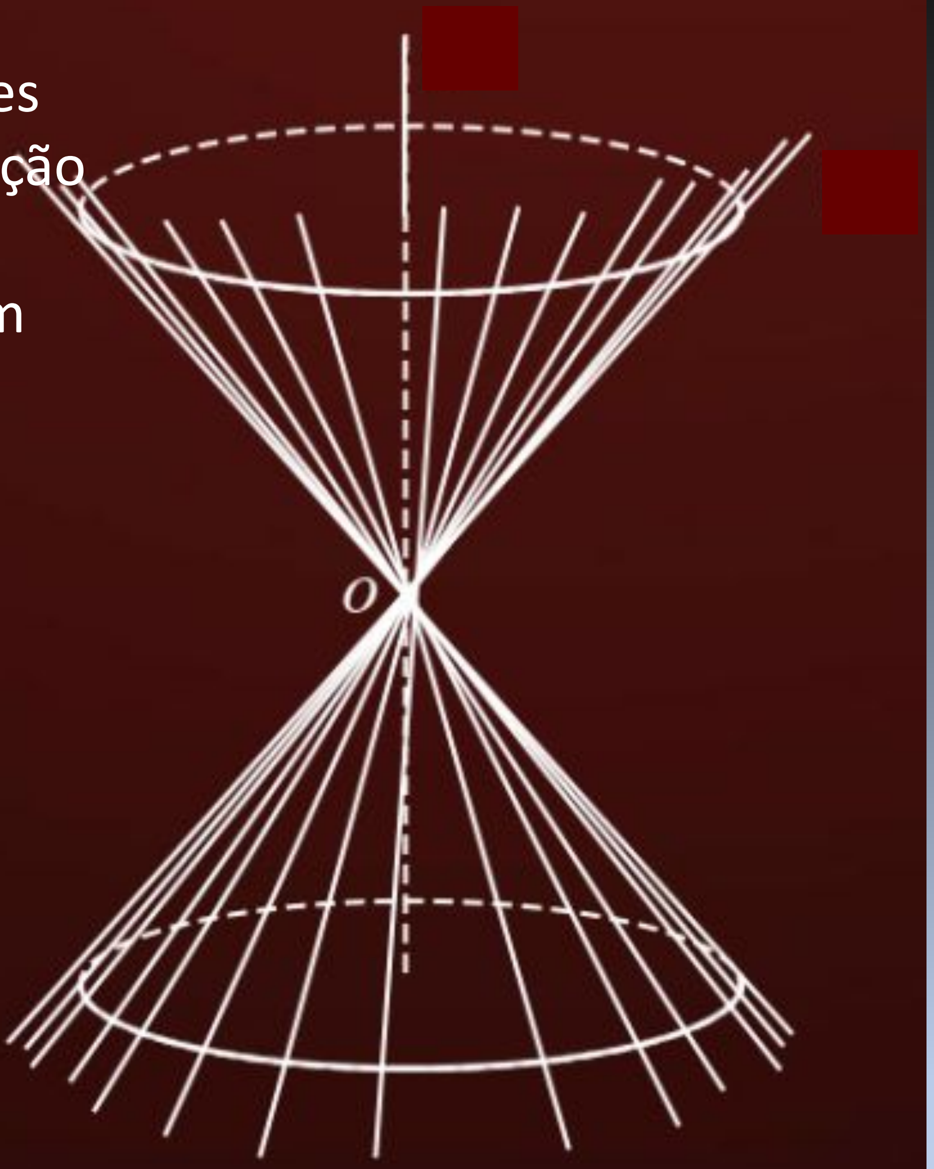
Conteúdo:

Cônicas – parte 1

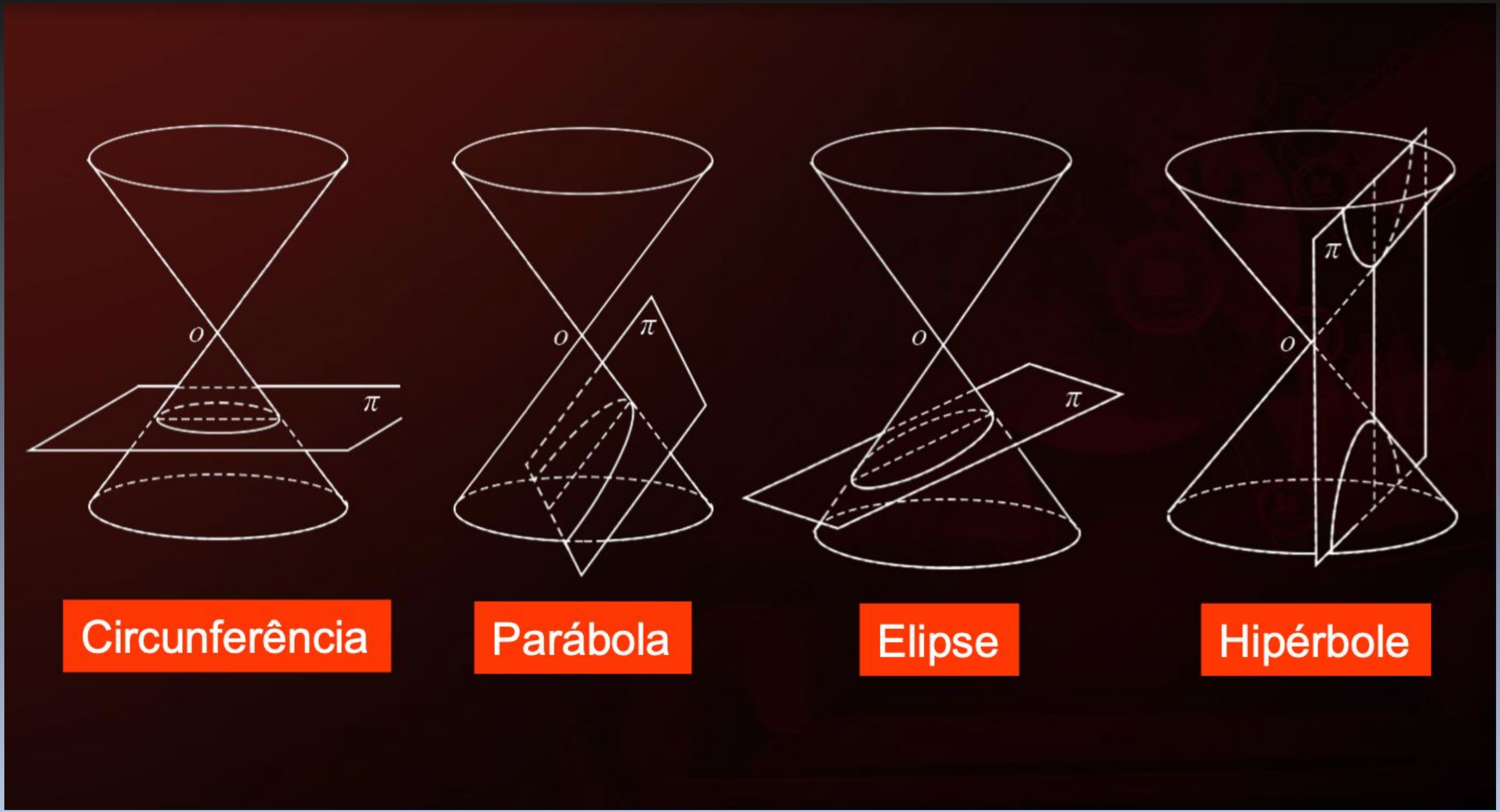
- Ver as cônicas geometricamente: como interseção do cone por planos
- O sistema de coordenadas canônico do plano
- As cônicas clássicas (não degeneradas): circunferência, elipse, hipérbole e parábola
- As cônicas degeneradas
- Definição algébrica de cônica
- Exemplos

O cone

A partir de duas retas concorrentes em um ponto O, o cone de revolução é o lugar geométrico dos pontos obtidos pela revolução de uma em torno da outra mantendo-se constante o ângulo de giro.

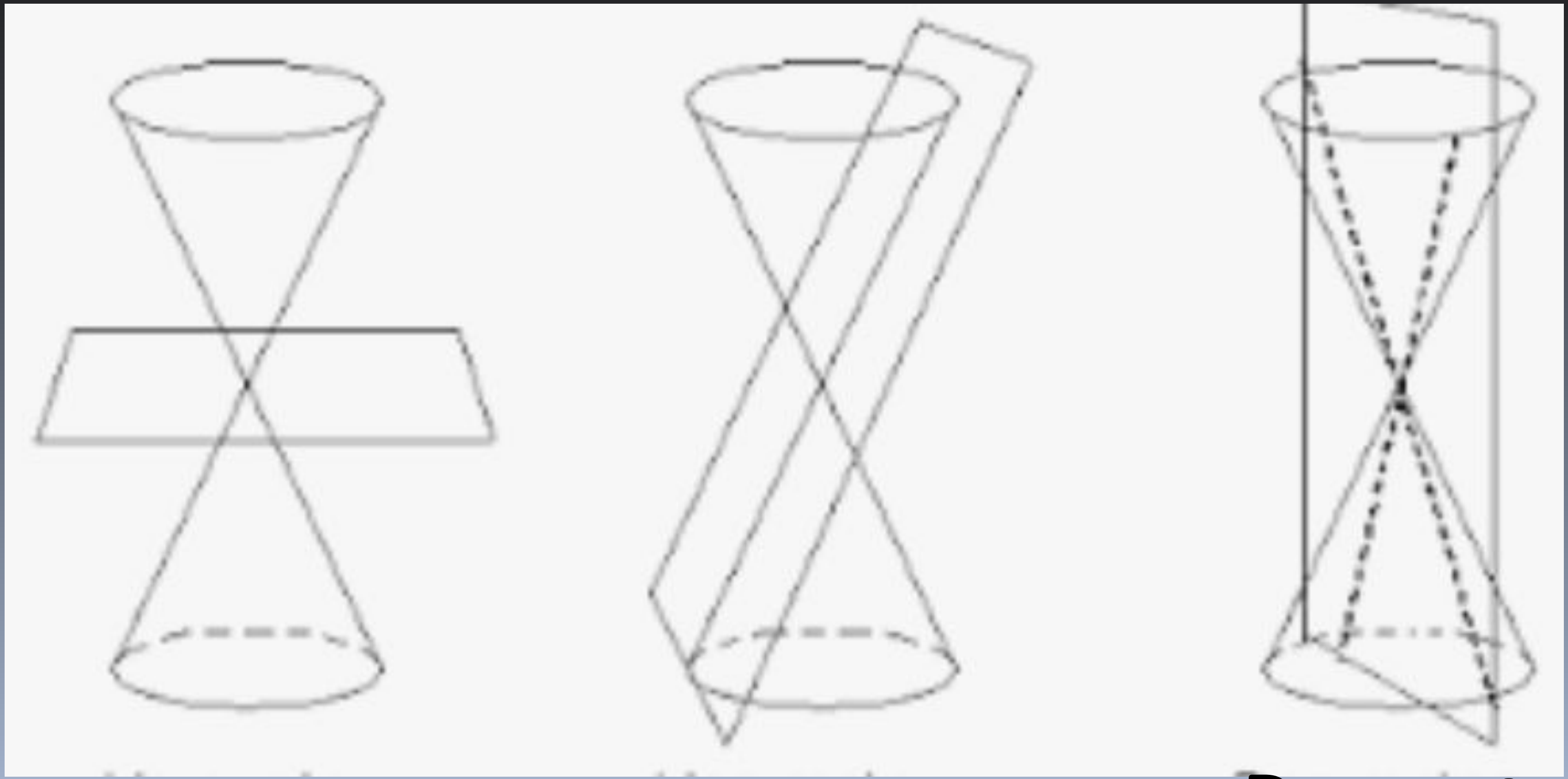


As cônicas clássicas como secções do cone:



Com secção do cone queremos dizer <u>interseções do cone por planos</u>.

Outras cônicas, chamadas cônicas degeneradas:



Ponto

Reta

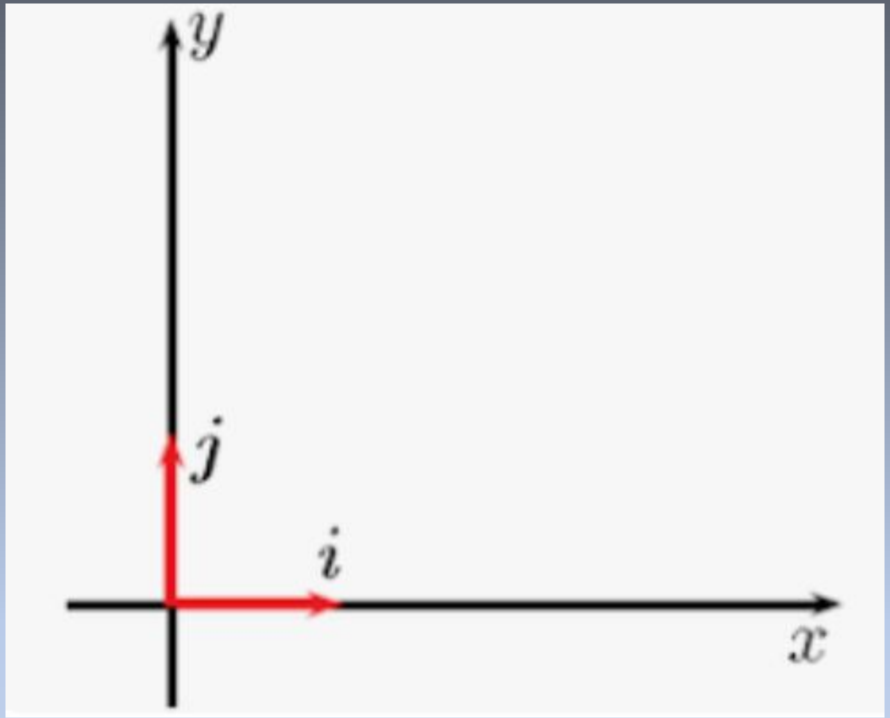
Duas retas concorrentes

O sistema de coordenadas de pontos no plano

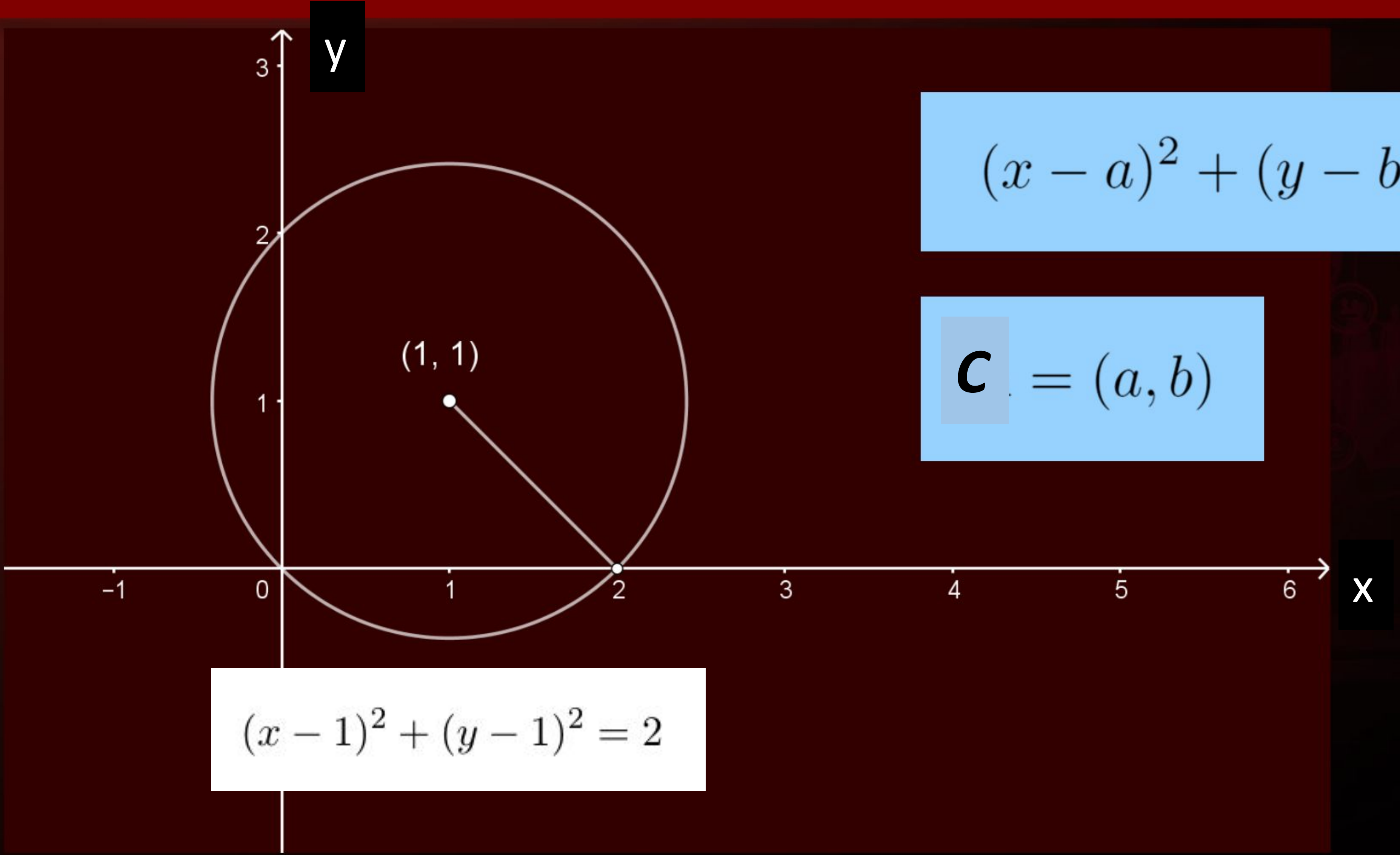
A cônica é uma curva plana. Vamos fazer todo o estudo das cônicas no sistema de coordenadas x , y.

Agora, todo ponto tem a terceira coordenada nula (z = 0). Desta forma, passamos a expressar um ponto (x, y, 0) como (x , y).

O sistema de coordenadas consiste então da origem O = (0,0) e dos vetores i e j da base canônica:



CIRCUNFERÊNCIA

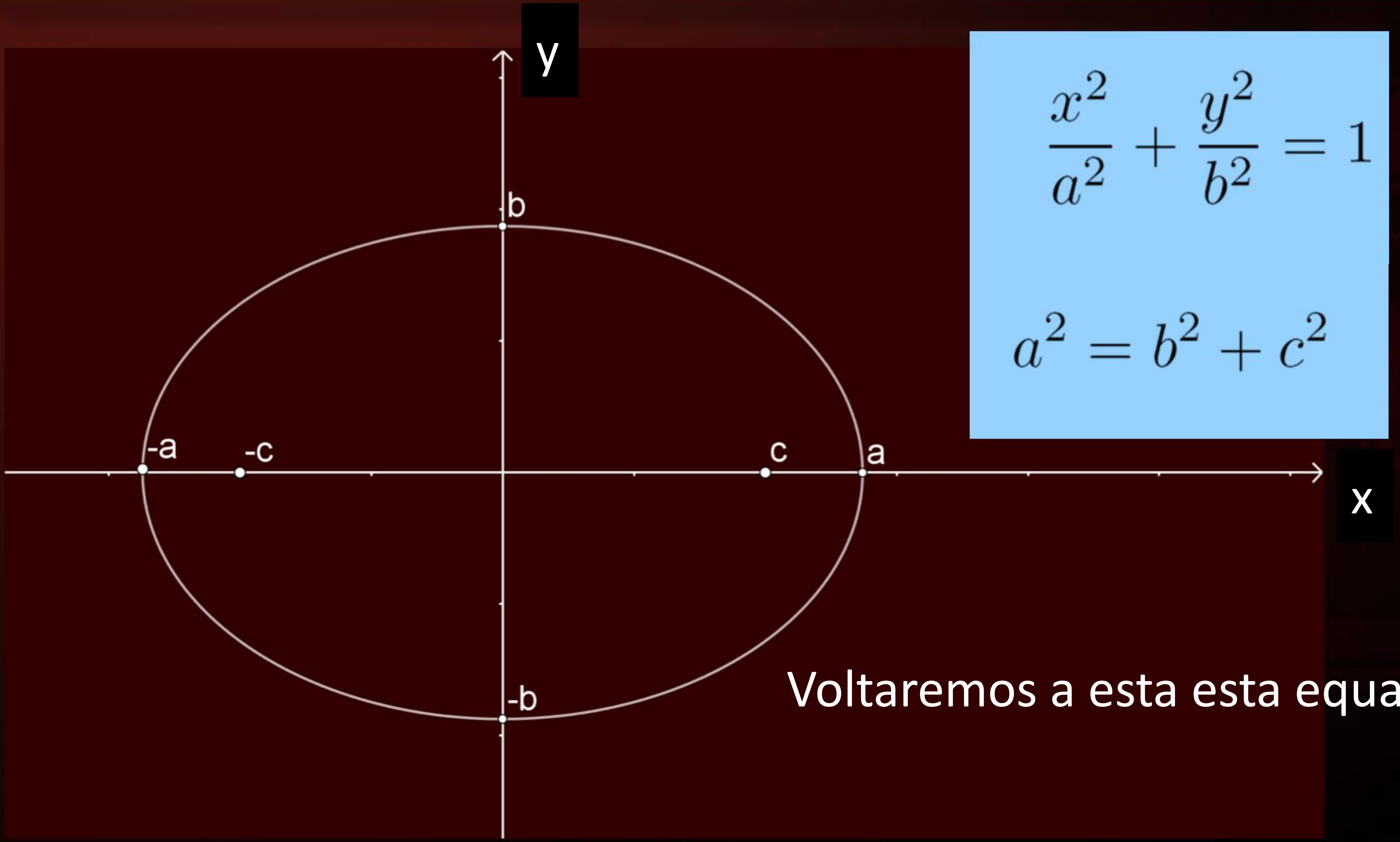


$$(x-1)^2+(y-1)^2=2$$

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

$$C=(a,b)$$

ELIPSE e sua equação na forma reduzida

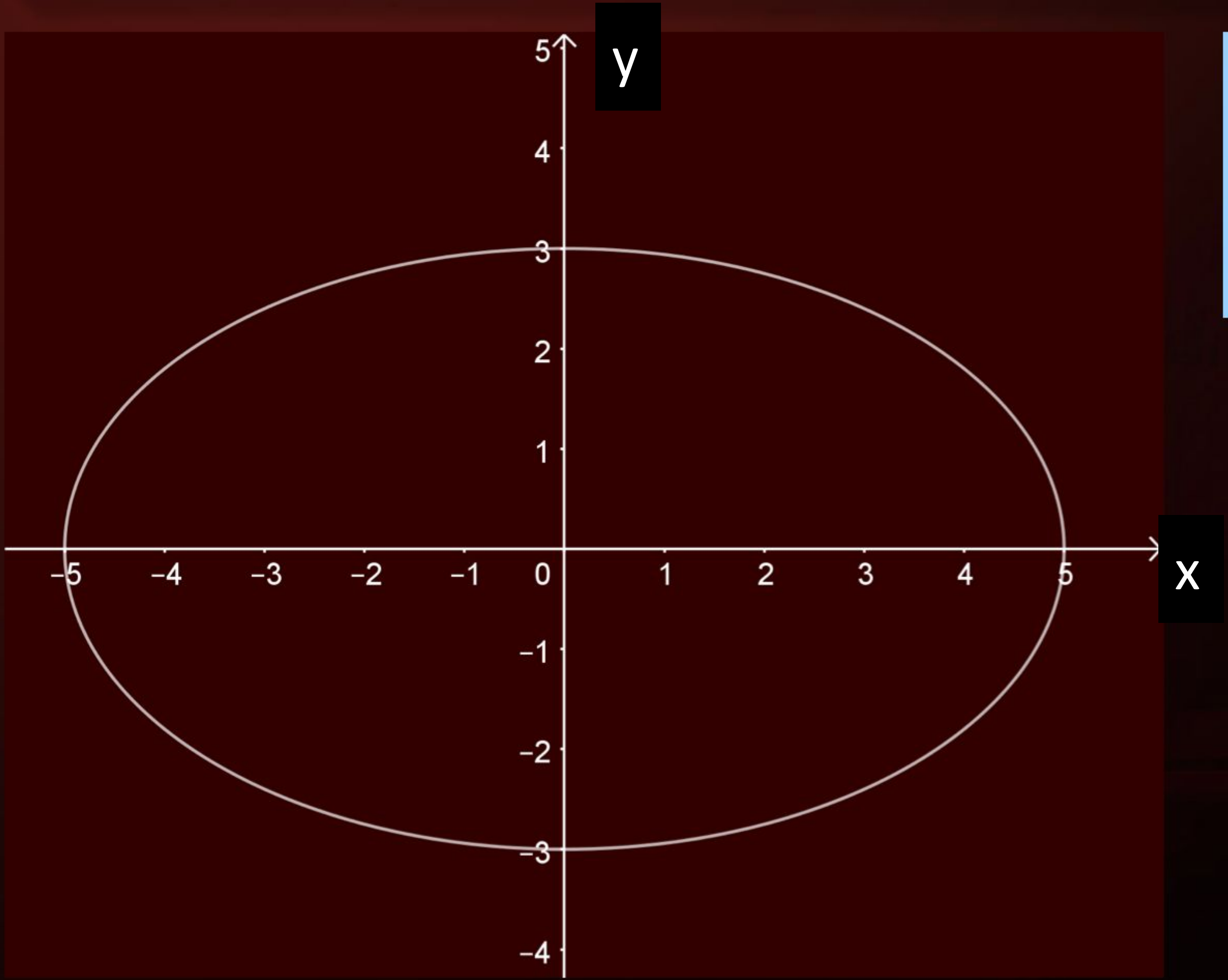


$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

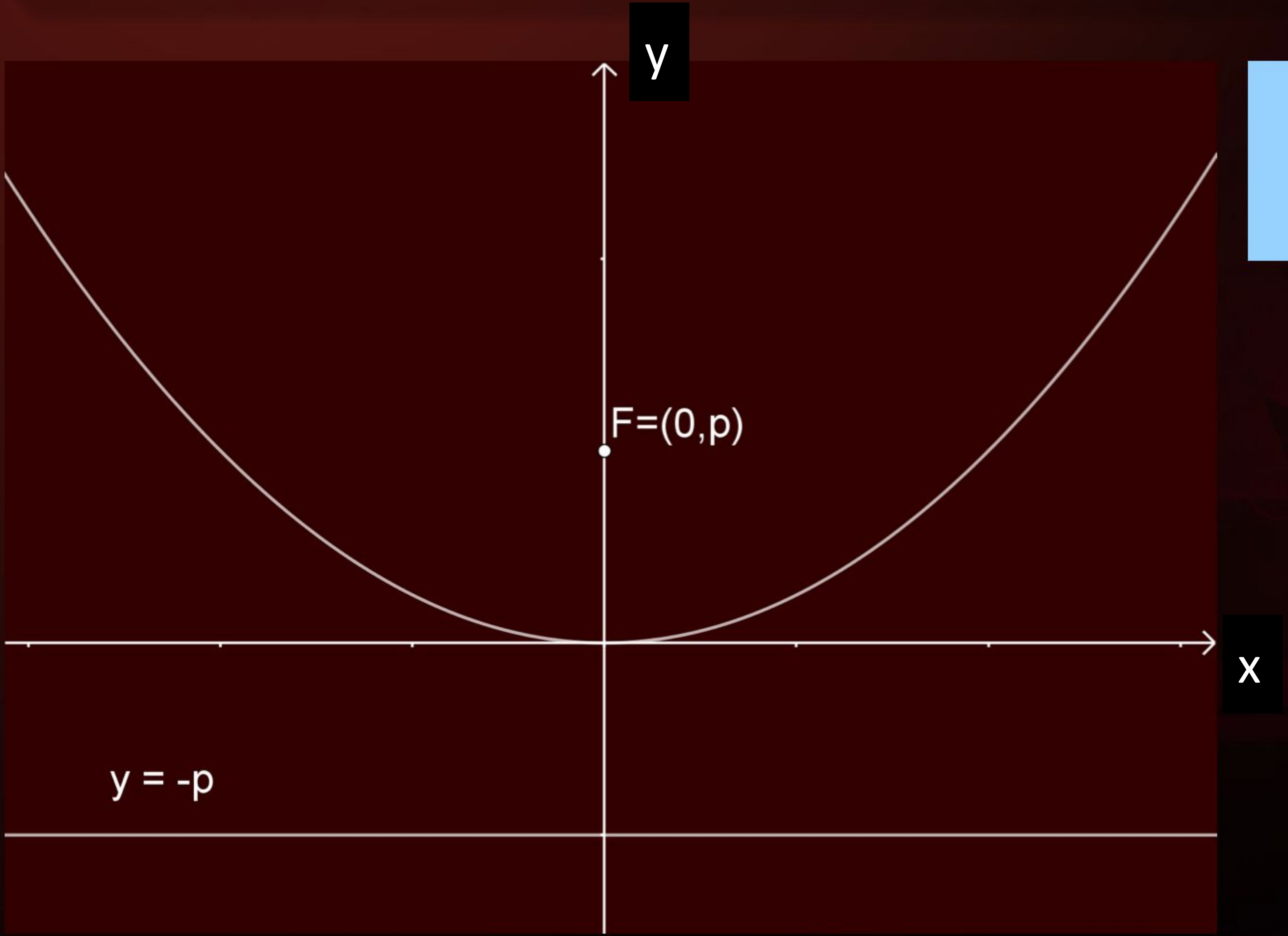
Voltaremos a esta esta equação ao final da aula.

ELIPSE - exemplo de equação na forma reduzida



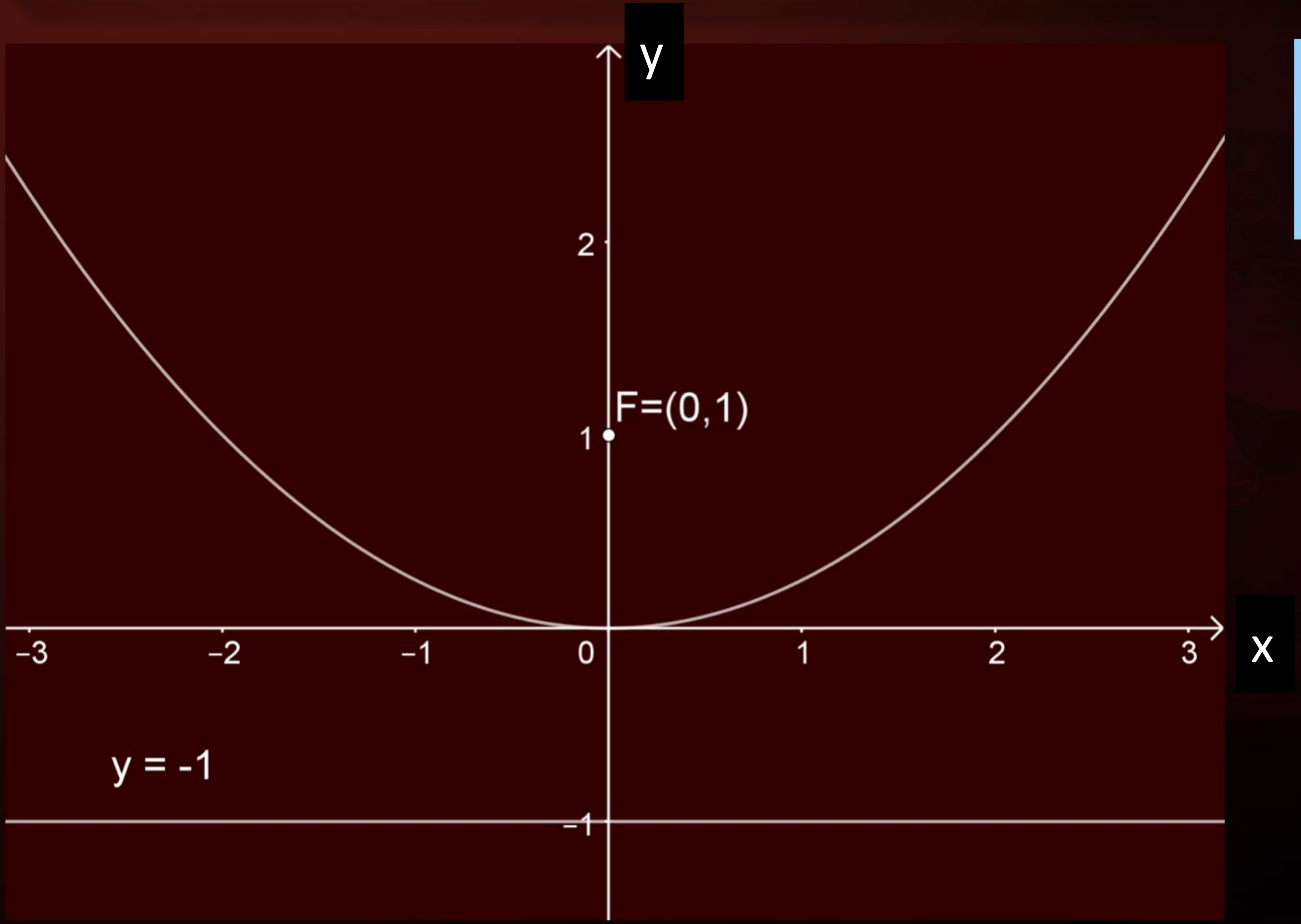
$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

PARÁBOLA e sua equação na forma reduzida



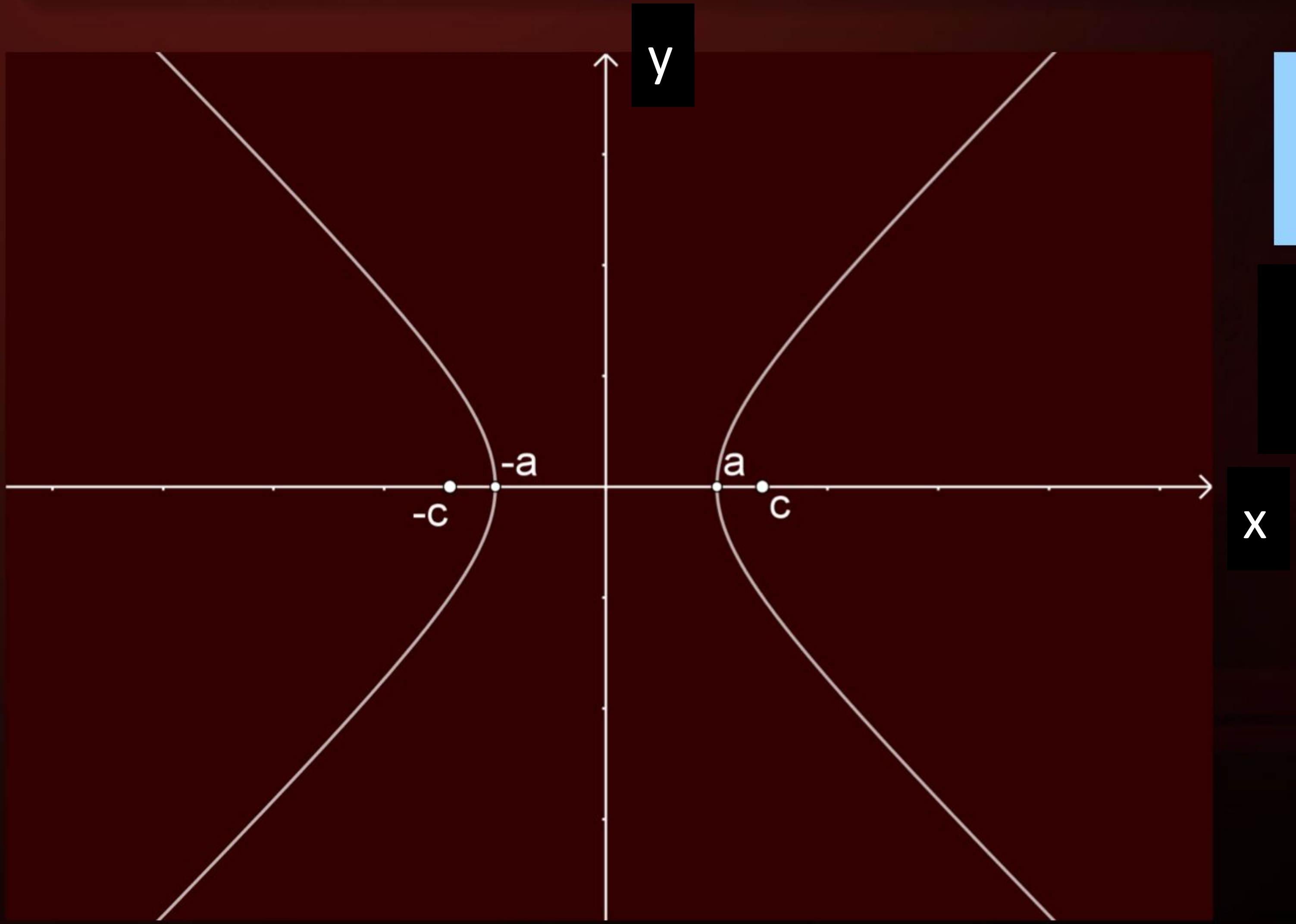
$$x^2 - 4py = 0$$

PARÁBOLA - exemplo de equação na forma reduzida



$$x^2 - 4y = 0$$

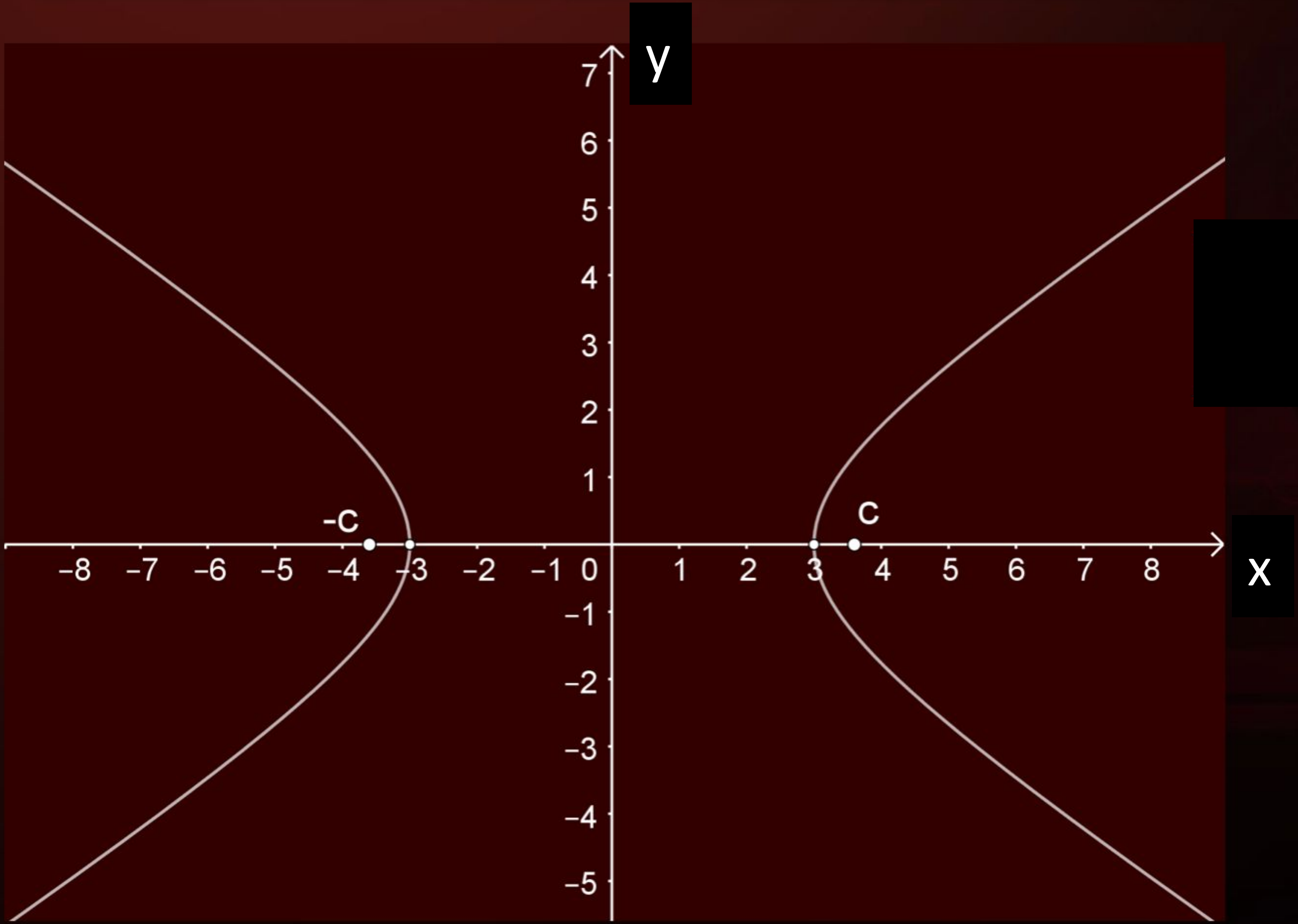
HIPÉRBOLE e sua equação na forma reduzida



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

[redacted]

HIPÉRBOLE - exemplo de equação na forma reduzida



$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$$

Cônicas – Definição algébrica:

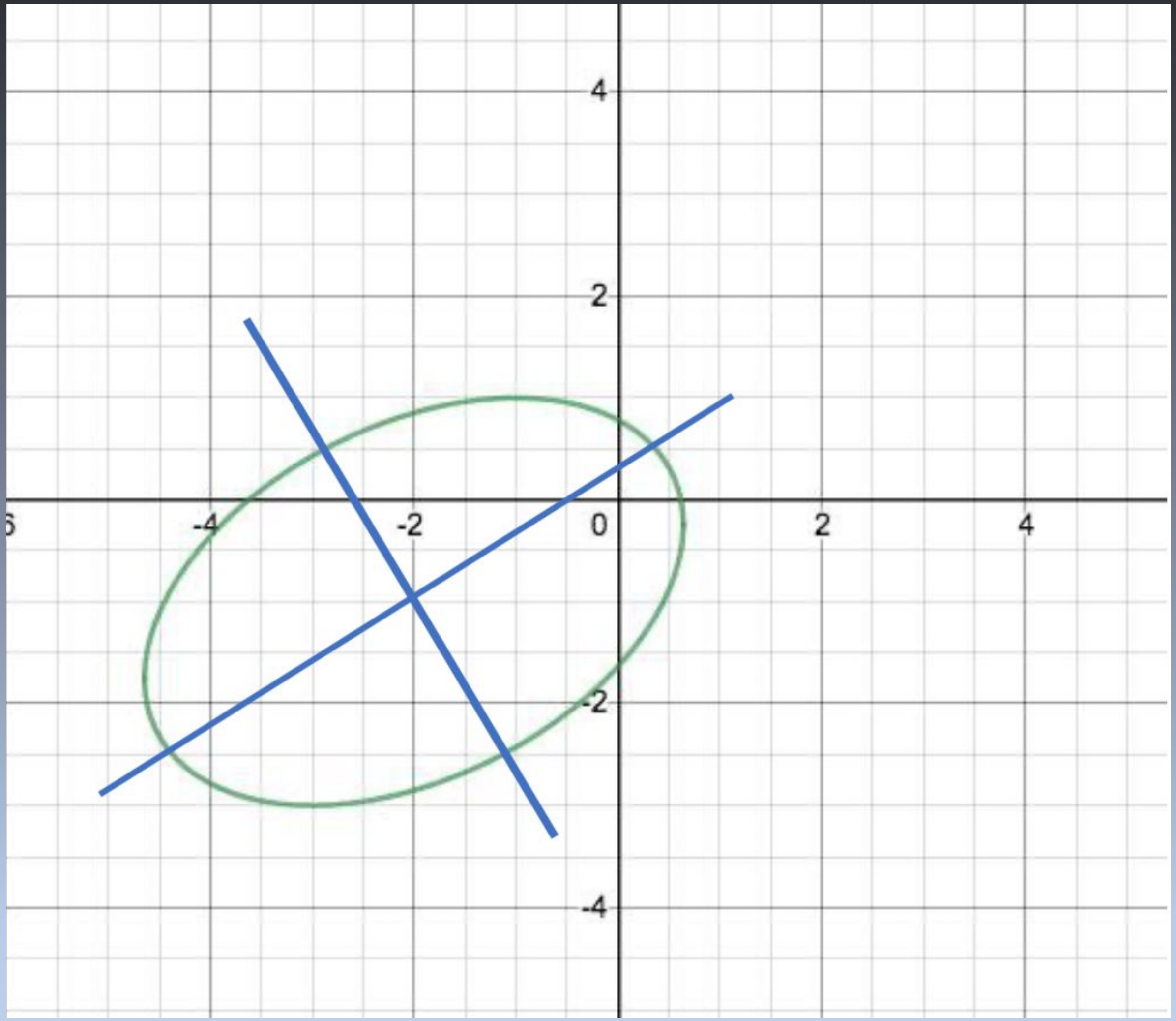
Cônica é o lugar geométrico dos pontos (x,y) do plano que satisfazem uma equação polinomial de grau 2:

$$a\,x^2 + b\,x\,y + c\,y^2 + d\,x + e\,y + f = 0,$$

com $a^2 + b^2 + c^2$ diferente de zero.

Exemplo.

$$4x^2 - 4xy + 7y^2 + 12x + 6y - 9 = 0$$

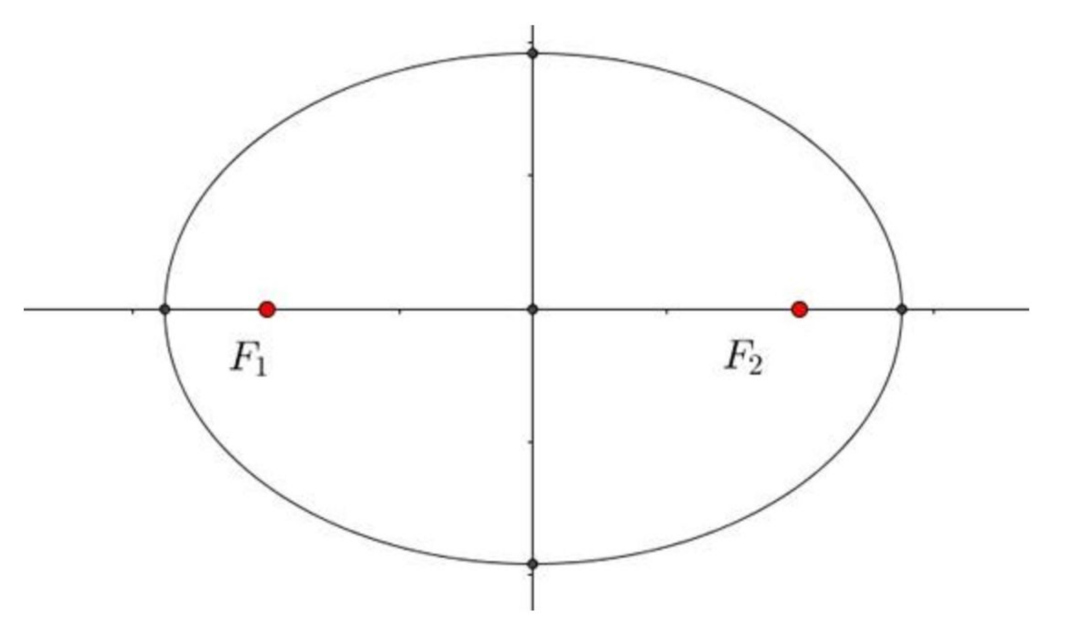


Elipse

É o lugar geométrico dos pontos de um plano cujas distâncias a dois pontos fixos desse plano têm soma constante.

Estes pontos fixos são chamados **Focos** da elipse.

Esta **constante** é usualmente chamada 2a, com a um escalar positivo.



A elipse é uma cônica com centro
F1 e F2 representam os focos de elipse
Há 4 vértices.
Eixo maior e eixo menor.
Distância entre os vértices no eixo menor: 2b
Distância entre os vértices no eixo maior: 2a
Distância focal (entre os focos F1 e F2): 2c
Excentricidade da elipse: é a razão e = c / a

Equação reduzida:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Dedução da equação reduzida da elipse

Vamos deduzir a equação de uma elipse particular, que tem seus eixos sobre os eixos coordenados, com seu centro sobre o centro (0,0) do sistema de coordenadas e seus focos sobre o eixo-x, ou seja, $F_1 = (-c,0)$ e $F_2 = (c,0)$.

2

$$X = (x,y)$$

$$X \in \text{Elipse} \iff d(X,F_1) + d(X,F_2) = 2a$$

$$\iff \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\iff \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\implies (x+c)^2 + y^2 = \left(2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2$$

$$\iff x^2 + 2cx + c^2 + y^2 =$$

$$= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

$$\Longleftrightarrow \quad 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 4a^2 - 4cx$$

$$\Longleftrightarrow \quad a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2 - cx$$

$$\Longleftrightarrow \quad a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = a^4 - 2ca^2x + c^2x^2$$

$$\Longleftrightarrow \quad a^2x^2 - 2ca^2x + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2ca^2x + c^2x^2$$

$$\Longleftrightarrow \quad \underbrace{(a^2 - c^2)}_{=b^2}x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

$c < a \Longrightarrow a^2 - c^2$ é positivo

$$b^2 = a^2 - c^2$$

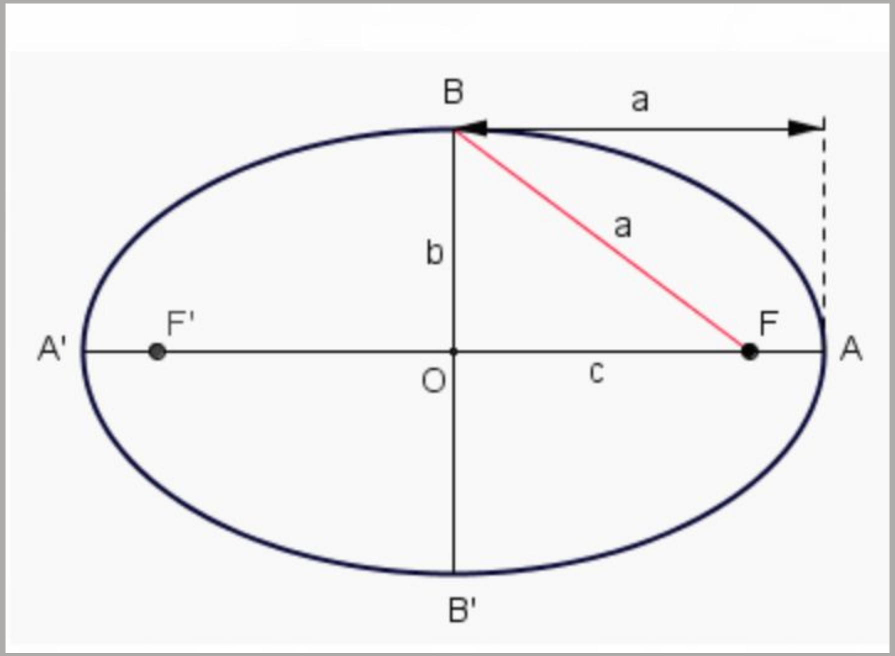
$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$$

a e b são ambos distintos de zero. Logo, podemos dividir a expressão acima por $a^2 b^2$ em, assim, chegamos à equação reduzida:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$



Exemplo. Fazer o esboço das elipses

$$x^2/9 + y^2/4 = 1$$

$$4x^2 + 9y^2 = 36$$

$$9x^2 + 4y^2 = 36$$

$$2x^2 + 5y^2 = 40$$

Qual é a distância focal de cada elipse?

Qual é a excentricidade de cada elipse?

Exemplos aleatórios de equações de cônicas

Faremos em aula.

Exercício (para casa).

Use o programa *online* Desmos 2D* para esboçar a cônica

$$x^2 - y^2 = a$$

Para diferentes valores de a : a = 4, 1, 0, - 1, - 4. Faça prints e entregue em um único pdf.

Sugestão. Depois de plotar cada uma das curvas, use o recurso de animação do Desmos* fazendo a variar.