SMA0300 Geometria Analítica
Aula 17

23/05/203, terça-feira

Miriam Manoel

Aula de hoje

Medida angular:

1) Ângulo entre duas retas
2) Ângulo entre reta e plano
3) Ângulo entre 2 planos

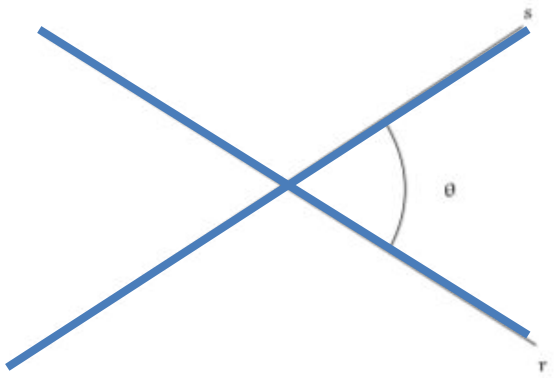
Distância:

Distância entre dois pontos

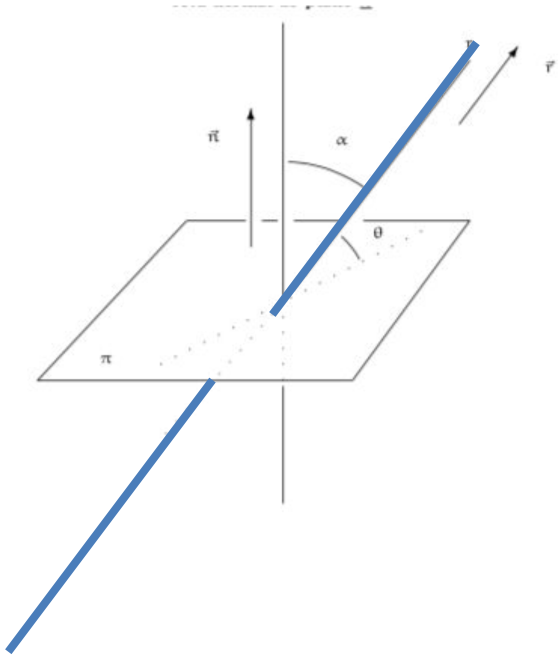
Distância de um ponto a uma reta

Ângulos

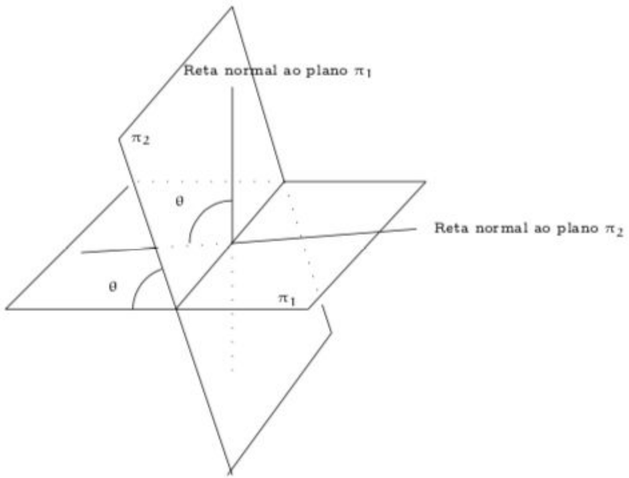
Ângulo entre duas retas



Ângulo entre reta e plano

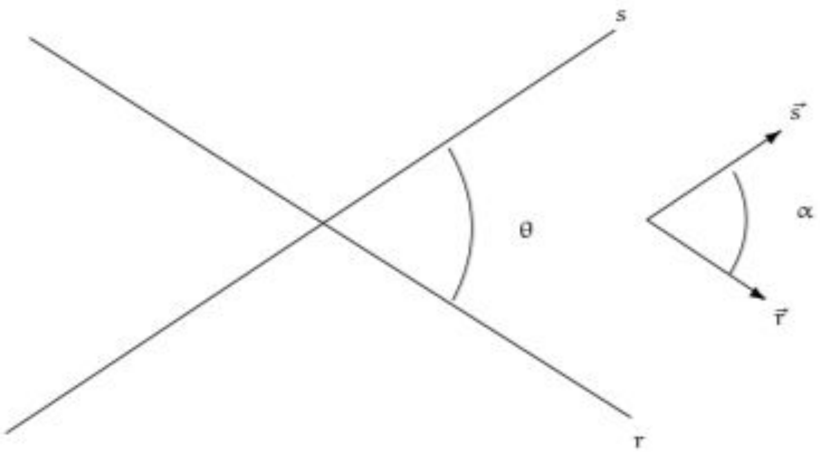


Ângulo entre dois planos

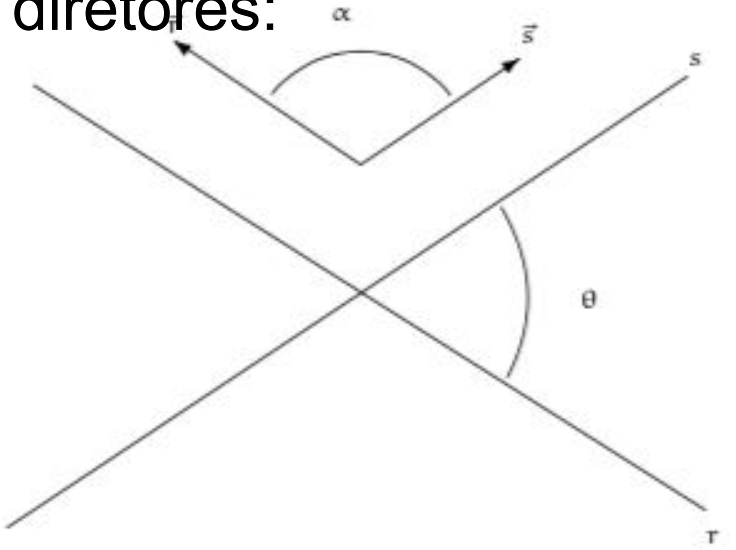


Ângulo entre duas retas

É o ângulo agudo dado pelo menor dentre os dois ângulos determinados por elas. Podemos encontrá-lo usando seus vetores diretores:



$$\cos(\theta) = \cos(\alpha) \overset{(9.1)}{=} \frac{\vec{r} \bullet \vec{s}}{\|\vec{r}\|\|\vec{s}\|}$$



$$\cos(\theta) = \cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha) \overset{(9.1)}{=} \frac{-\vec{r} \bullet \vec{s}}{\|\vec{r}\|\,\|\vec{s}\|}$$

Note que ângulo entre os vetores pode ser obtuso. Portanto, qualquer que seja o caso, o ângulo procurado é dado por

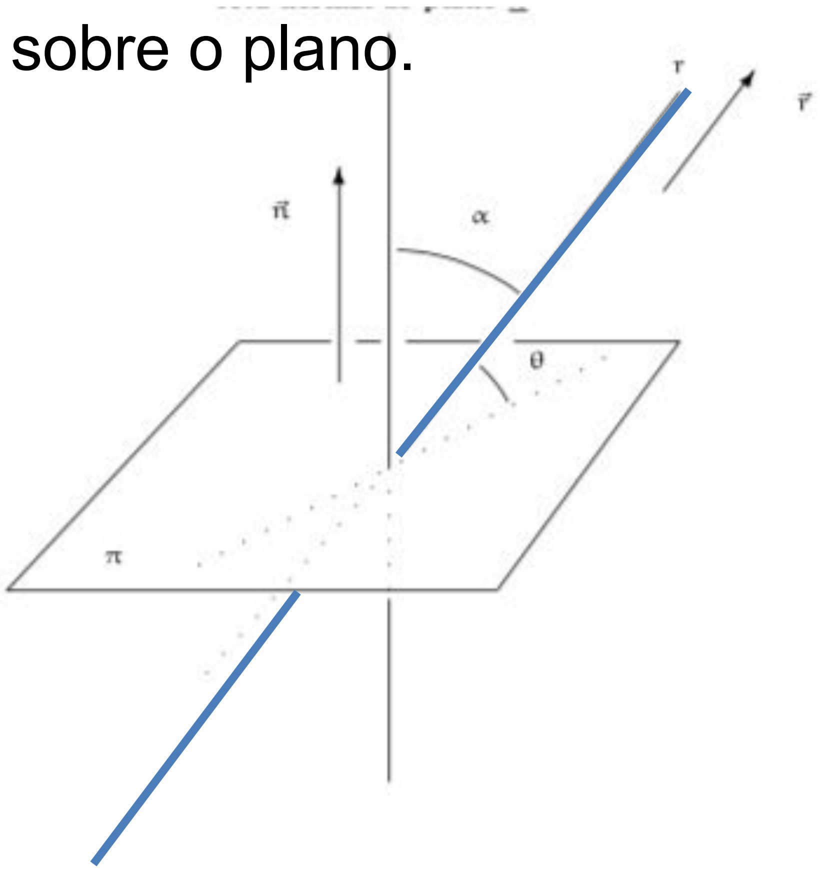
$$\cos(\theta) = \frac{|\vec{r} \bullet \vec{s}|}{\|\vec{r}\|\,\|\vec{s}\|}, \quad \text{ou ainda,} \quad \theta = \arccos\left(\frac{|\vec{r} \bullet \vec{s}|}{\|\vec{r}\|\,\|\vec{s}\|}\right)$$

Observação:

Na discussão anterior, o ângulo entre duas retas independe das suas posições relativas (ou seja, se são coincidentes, paralelas, concorrentes ou reversas).

Ângulo entre reta e plano

É o ângulo que a reta faz com a sua projeção sobre o plano.



Note inicialmente que $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\theta + \alpha = \frac{\pi}{2}$$ (veja na figura) .

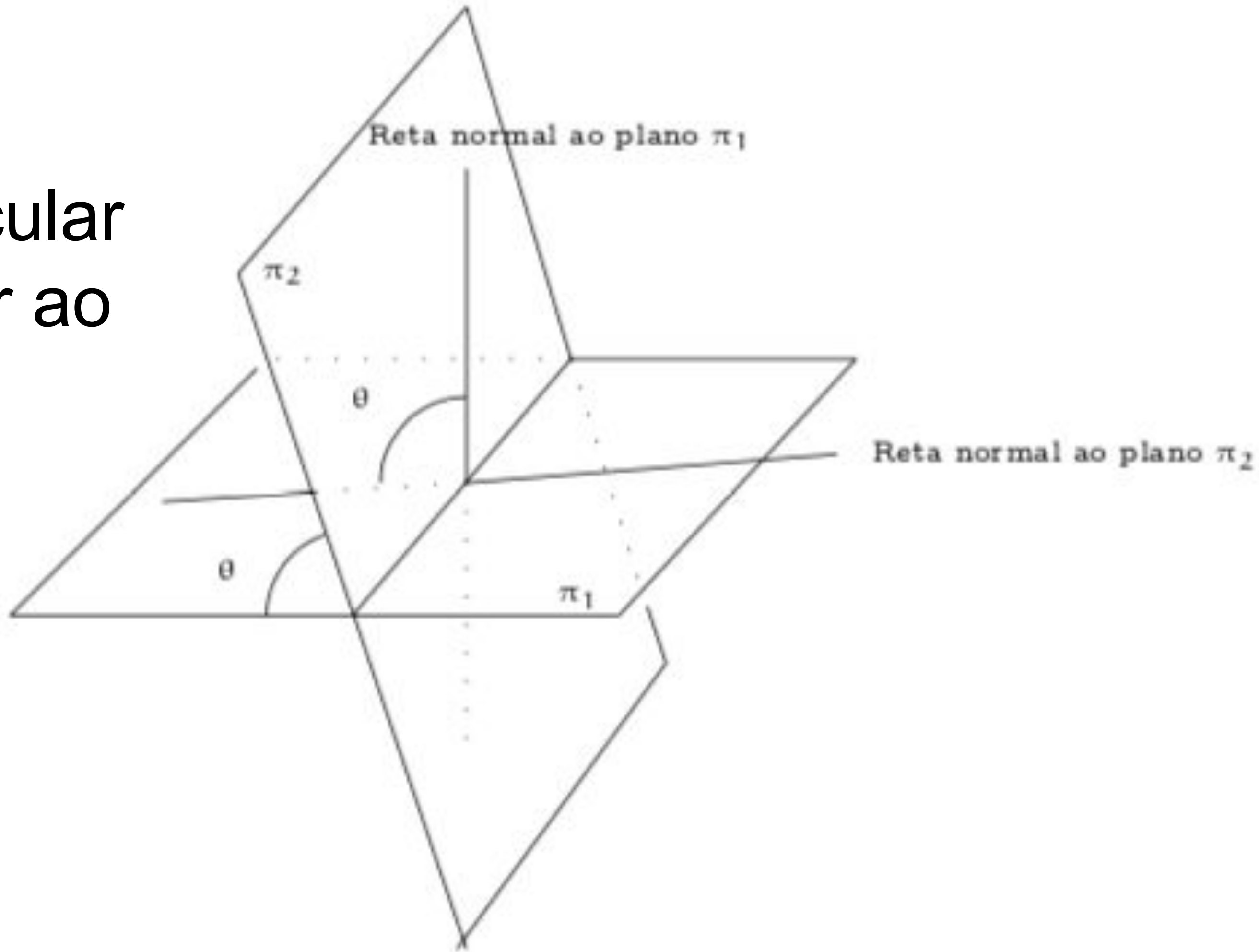
$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{r} \bullet \vec{n}|}{||\vec{r}||\ ||\vec{n}||}$$

$$\text{sen}(\theta) = \frac{|\vec{r} \bullet \vec{n}|}{||\vec{r}||\ ||\vec{n}||} \quad \text{ou} \quad \theta = \text{arcsen}\left(\frac{|\vec{r} \bullet \vec{n}|}{||\vec{r}||\ ||\vec{n}||}\right)$$

Ângulo entre dois planos

É o ângulo entre uma reta perpendicular a um plano e uma reta perpendicular ao outro plano.

Ou seja, encontrar este ângulo recai no caso de ângulo entre duas retas:



$$\cos(\theta) = \frac{|\vec{n}_1 \bullet \vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\| \, \|\vec{n}_2\|}, \quad \text{ou seja,} \quad \theta = \arccos\left(\frac{|\vec{n}_1 \bullet \vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\| \, \|\vec{n}_2\|}\right)$$

Exemplo *Encontrar a medida do ângulo entre os planos* $\underline{\pi_1}$ *e* $\underline{\pi_2}$

$$\pi_1 : (x, y, z) = (1, 0, 0) + \alpha \cdot (1, 0, 1) + \beta \cdot (-1, 0, 0), \quad \textit{para } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\pi_2 : x + y + z = 0$$

Exemplo *Encontrar o ângulo entre as retas* $\underline{r}$ *e* $\underline{s}$

$$r : (x, y, z) = (1, 1, 9) + \beta \cdot (0, 1, -1), \quad para \quad \beta \in \mathbb{R},$$

$$s : \begin{cases} x - 1 = y \\ z = 4 \end{cases}$$

Exemplo *Encontrar a medida do ângulo* $\underline{\theta}$, *entre a reta* $\underline{r}$ *e o plano* $\underline{\pi}$

$$r : (x, y, z) = (0, 1, 0) + \alpha \cdot (-1, 1, 0), \ \textit{para}\ \alpha \in \mathbb{R},$$
$$\pi : (x, y, z) = (0, 0, 10) + \beta \cdot (1, 0, 0) + \gamma \cdot (0, 1, -1) \quad \textit{para}\ \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Distância entre dois conjuntos – noção geral

De uma maneira geral, a distância entre dois conjuntos A e B é o *ínfimo* entre as distâncias entre um ponto qualquer do conjunto A e um ponto qualquer do conjunto B.

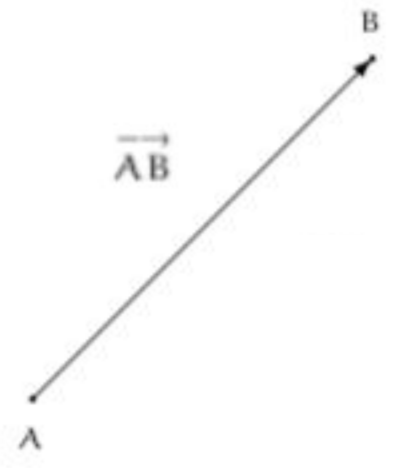
(A definição de ínfimo de um conjunto foi vista em Cálculo I.)

Distância entre dois pontos

É simplesmente dada pelo módulo do vetor determinado por estes dois pontos:

$$A = (a_1, a_2, a_3) \quad \text{e} \quad B = (b_1, b_2, b_3);$$

$$d(A, B) \doteq \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}\,.$$



Exemplo *Verifique se o triângulo* ΔABC ***é isósceles, onde***

$$A = (-1, -3, 4) \qquad B = (-2, 1, -4) \qquad e \qquad C = (3, -11, 5)$$

Resolução:

Calculemos:

$$\begin{aligned}
d(A, B) &= \sqrt{[-2-(-1)]^2 + [1-(-3)]^2 + (-4-4)^2} = \sqrt{81} = 9\,,\\
d(A, C) &= \sqrt{[3-(-1)]^2 + [-11-(-3)]^2 + (5-4)^2} = \sqrt{81} = 9\,,\\
d(B, C) &= \sqrt{[3-(-2)]^2 + [-11-1]^2 + [5-(-4)]^2} = \sqrt{250} = 5\sqrt{10}\,.
\end{aligned}$$

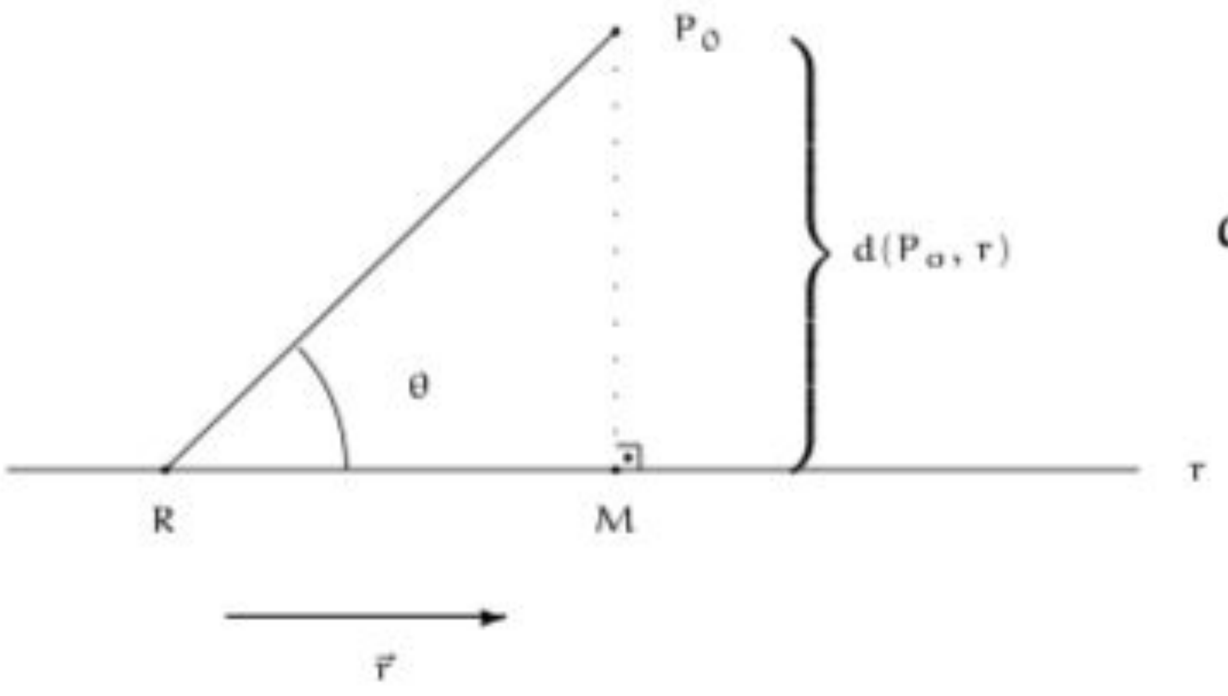
Como

$$d(A, B) = d(A, C)\,,$$

segue que o triângulo é **isósceles.**

Distância entre ponto e reta

$$P_o = (x_o, y_o, z_o) \quad \text{e} \quad r : X = R + \lambda \cdot \vec{r}, \text{ para } \lambda \in \mathbb{R}$$



$$d(P_o, r) = \frac{\left\| \overrightarrow{RP_o} \wedge \vec{r} \right\|}{\|\vec{r}\|}$$ com $R \in r$ arbitrário.

De fato, basta observar que a distância procurada pode ser dada como a altura do paralelogramo com base de comprimento $\|\vec{r}\|$.

Exemplo *Calcule a distância do ponto* $P_o = (0, -1, 0)$ *à reta* $\underline{r}$

$$r : \begin{cases} x = 2y - 1 \\ y = z + 1 \end{cases}$$

$$r : \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases} , \text{ para } \lambda \in \mathbb{R},$$

$$d(P_o, r) = \frac{\left\| \overrightarrow{RP_o} \wedge \vec{r} \right\|}{\|\vec{r}\|} = \frac{\|(1, -1, 1) \wedge (2, 1, 1)\|}{\|(2, 1, 1)\|}$$

$$= \frac{\|(-2, 1, 3)\|}{\|(2, 1, 1)\|} = \frac{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 3^2}}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{84}}{6} = \frac{\sqrt{21}}{3} \text{ u.c.}$$

Exemplo. Determine o lugar geométrico dos pontos equidistantes do ponto **A**, da reta **r** e da reta **s** dados abaixo:

$$A = (1,0,1) \qquad r : x = y = z \quad e \quad s : x - y = z = x + y.$$

$$r : (x,y,z) = (0,0,0) + \lambda \cdot (1,1,1) \quad \text{para } \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$s : (x,y,z) = (0,0,0) + \beta \cdot (1,0,1) \quad \text{para } \beta \in \mathbb{R}.$$

P pertence ao lugar geométrico em questão se, e somente se,

$$d(P, r) = d(P, s) = d(P, A)$$