SMA0300 Geometria Analítica
Aula 13

09/05/2022, terça-feira

Miriam Manoel

Na aula de hoje…

Equação geral do plano - parte 2

Conversão da equação vetorial do plano para equação geral do plano e vice-versa

Posição relativa entre dois planos - parte 1

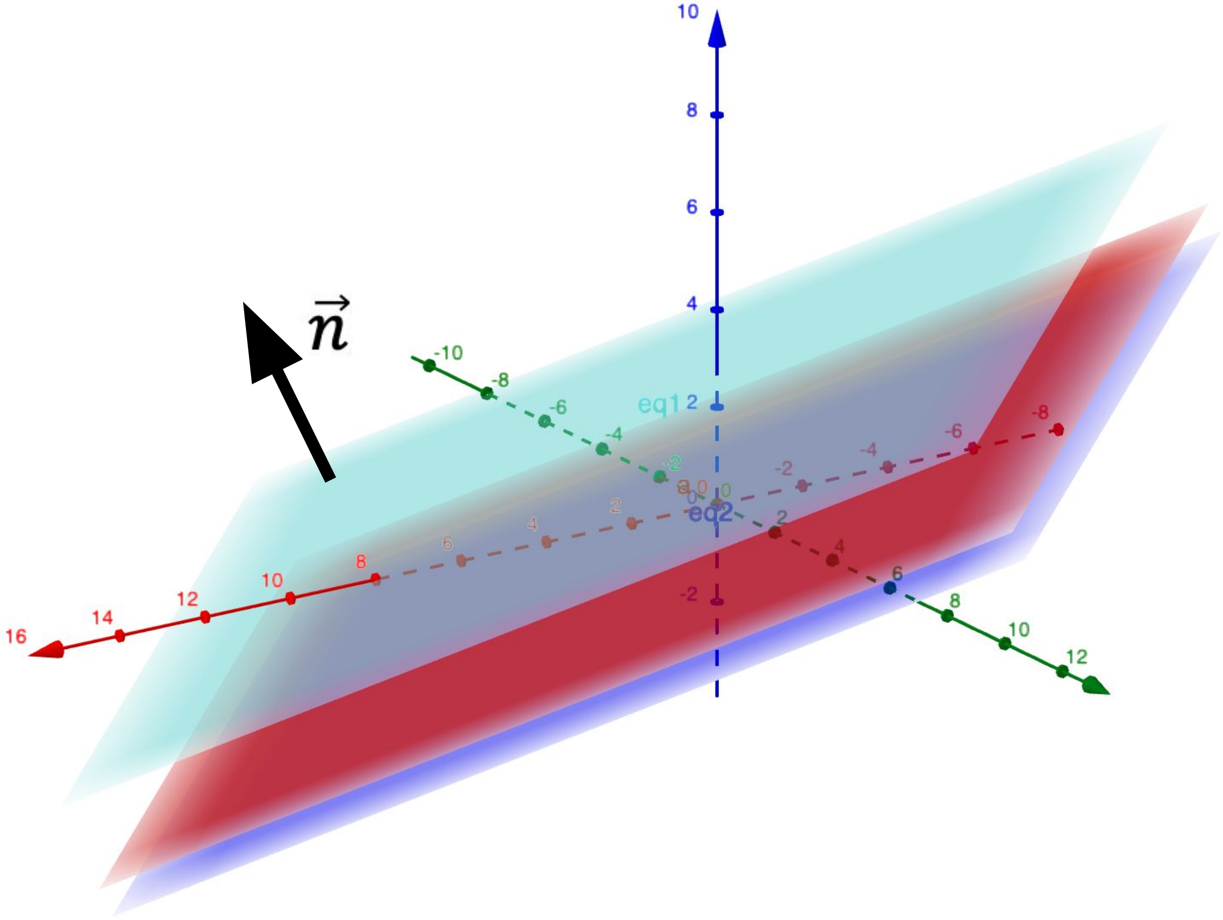
3 planos que se interceptam em um único ponto - caracterização algébrica

Retomado a equações gerais dos planos vistas no final da aula passada:

$$x - y + 3z - 8 = 0$$

$$x - y + 3z - 2 = 0$$

$$x - y + 3z = 0$$



são <u>equações gerais</u> de planos paralelos.

Exercício 1

(a) Dê a equação paramétrica da reta **r** dada pela intersecção dos planos π_1 e π_2 cujas equações gerais são dadas abaixo

$$\pi_1 : \; 2x - y + z = 0$$

$$\pi_2 : \; x + y - 1 = 0.$$

(b) Compare o vetor diretor da reta com o produto vetorial dos vetores normais dos planos.

Exercício 2

Seja π um plano cuja equação vetorial é

$$X = (1, 2, -3) + \lambda\,(2, 1, 0) + \mu(1, 1, 5), \quad \lambda, \mu \in \mathbf{R}$$

Qual é a equação geral de π ?

Exercício 3

Seja π um plano cuja equação geral é

$$2x - y + 2z + 3 = 0$$

Qual é uma possível equação vetorial do plano π ?

Resolução.

$\vec{n}$ = (2, − 1, 2) é vetor normal a π $\Rightarrow$ (1, 0, -1) e (1, 2, 0) são vetores diretores de π

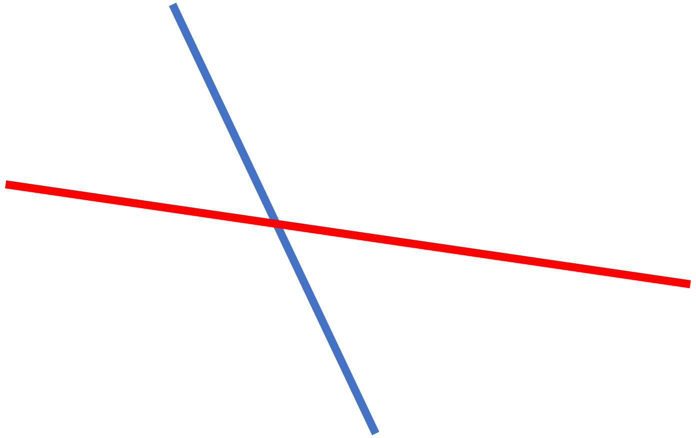
P = (0, 3, 0) ∈ π

Logo, a equação vetorial do plano π é

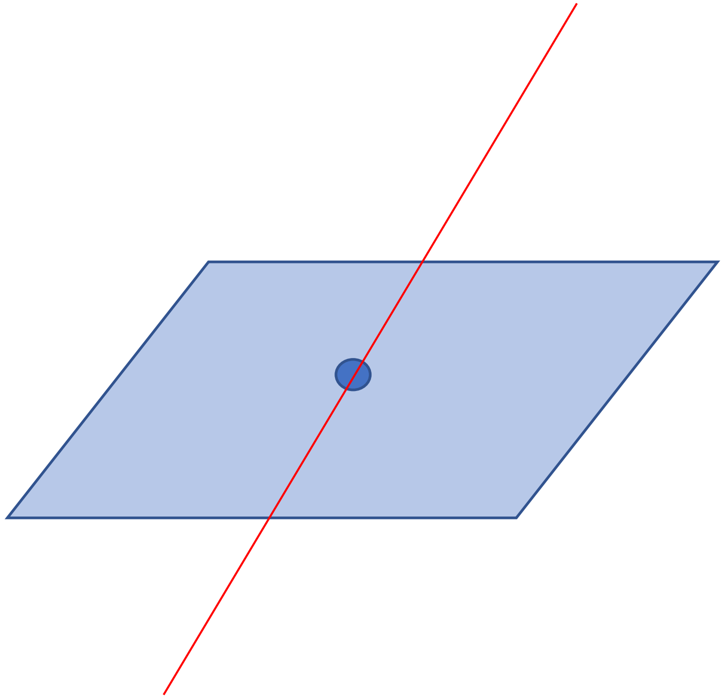
$$X = (0,3,0) + \lambda\,(1,0,-1) + \mu\,(1,2,0), \quad \lambda, \mu \in \mathbf{R}$$

Estudo da posição relativa: retas e planos

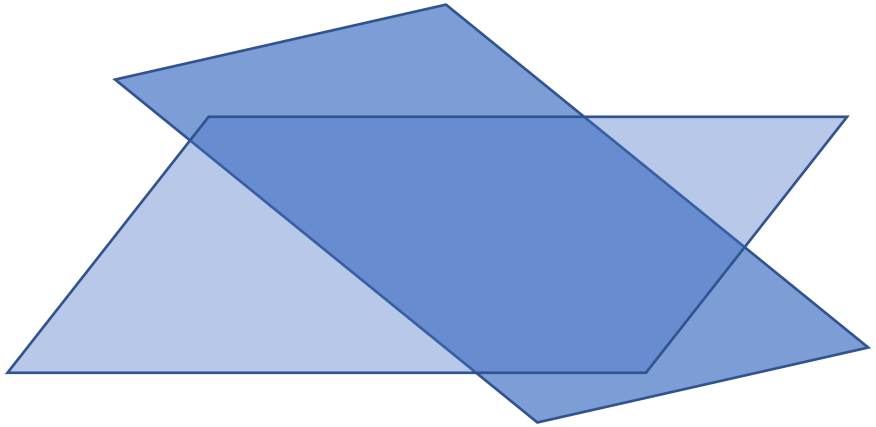
Por exemplo:



Retas concorrentes



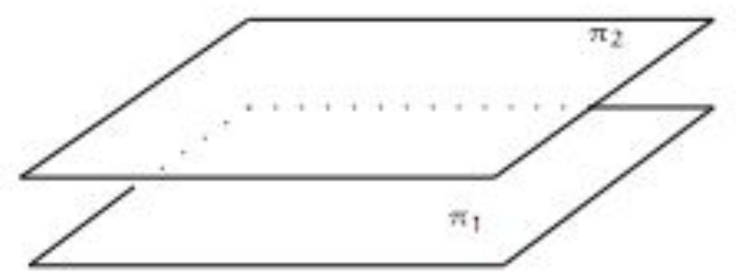
Reta e plano concorrentes



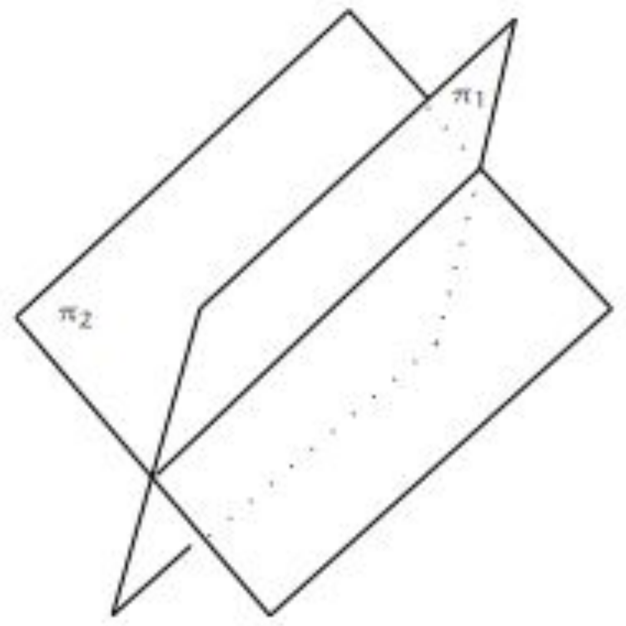
Planos concorrentes

Posição relativa entre dois planos

Geometricamente:



Paralelos



Transversais

Coincidentes

Algebricamente:

Vamos discutir a partir da equação geral dos dois planos:

$$\pi_1 : \ a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$$

$$\pi_2 : \ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$$

Coincidentes: $(a_2, b_2, c_2) = \alpha\,(a_1, b_1, c_1)$ e $d_2 = \alpha\, d_1$, para algum α

Paralelos: $(a_2, b_2, c_2) = \alpha\,(a_1, b_1, c_1)$, para algum α mas $d_2 \neq \alpha\, d_1$

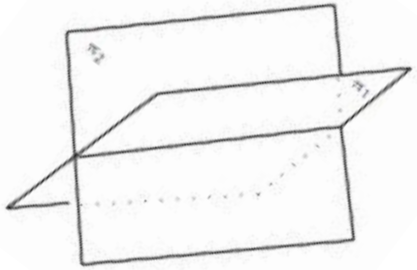
Transversais $(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2)$ L.I.

Exemplo 1. Verificar a posição relativa entre os dois planos dados por:

$$\pi_1 : x - y + z + 2 = 0$$

$$\pi_2 : x - y + 2z = 0$$

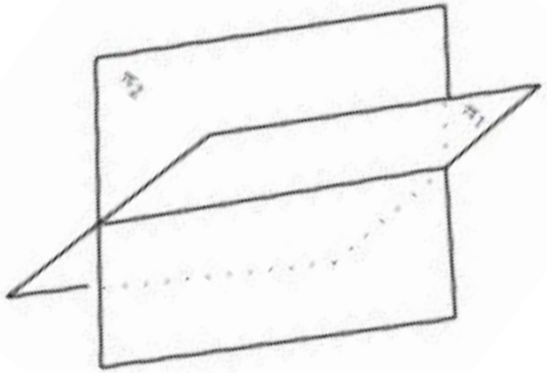
São transversais pois $(1, -1, 1)$, $(1, -1, 2)$ são L.I.



Retomando o Exemplo 1:

$\pi_1 : x - y + z + 2 = 0$

$\pi_2 : x - y + 2z = 0$



Pergunta: o que representa geometricamente o conjunto solução do sistema abaixo?

$$\begin{cases} x - y + z + 2 = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

S.P.D.?

S.P.I.?

S.I.?

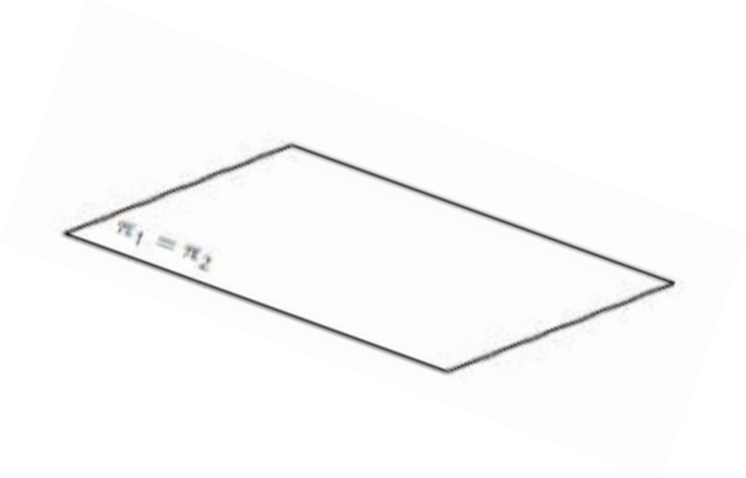
Resposta: UMA RETA $(\pi_1 \cap \pi_2 = reta)$

Exemplo 2. Verificar a posição relativa entre os dois planos dados

$$\pi_1 : \ x - y + 2z + 3 = 0$$

$$\pi_2 : 3x - 3y + 6z + 9 = 0$$

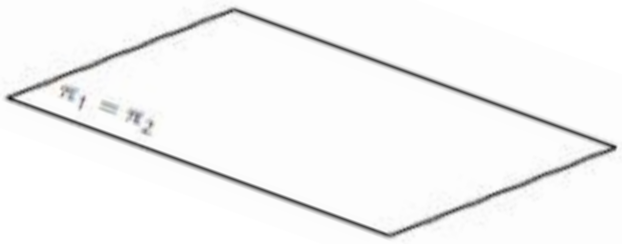
São coincidentes pois $(3, -3, 6) = 3\,(1, -1, 2)$ e $d_2 = 3\ d_1$



Retomando o Exemplo 2:

$$\pi_1 : x - y + 2z + 3 = 0$$

$$\pi_2 : 3x - 3y + 6z + 9 = 0$$



O que representa geometricamente o conjunto solução do sistema abaixo?

$$\begin{cases} x - y + 2z + 3 = 0 \\ 3x - 3y + 6z + 9 = 0 \end{cases}$$

S.P.D.?

S.P.I.?

S.I.?

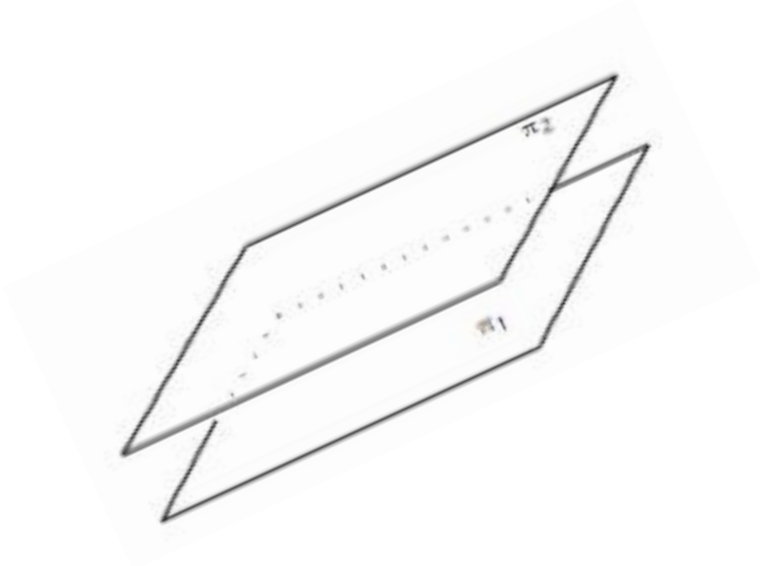
Resposta: UM PLANO $(\pi_1 \cap \pi_2 = \pi_1 = \pi_2)$

Exemplo 3. Verificar a posição relativa entre os dois planos dados

$$\pi_1 : \ x - y + 2z + 3 = 0$$

$$\pi_2 : x - y + 2z + 4 = 0$$

São paralelos pois $\quad (1, -1, \ 2) = 1\,(1, -1, 2)$ e $\quad d_2 \neq \ d_1$



Retomando o Exemplo 3:

$\pi_1 : x - y + 2z + 3 = 0$

$\pi_2 : x - y + 2z + 4 = 0$

O que representa geometricamente o conjunto solução do sistema abaixo?

$$\begin{cases} x - y + 2z + 3 = 0 \\ x - y + 2z + 4 = 0 \end{cases}$$

S.P.D.?

S.P.I.?

S.I.?

Resposta: O CONJUNTO VAZIO ($\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$)

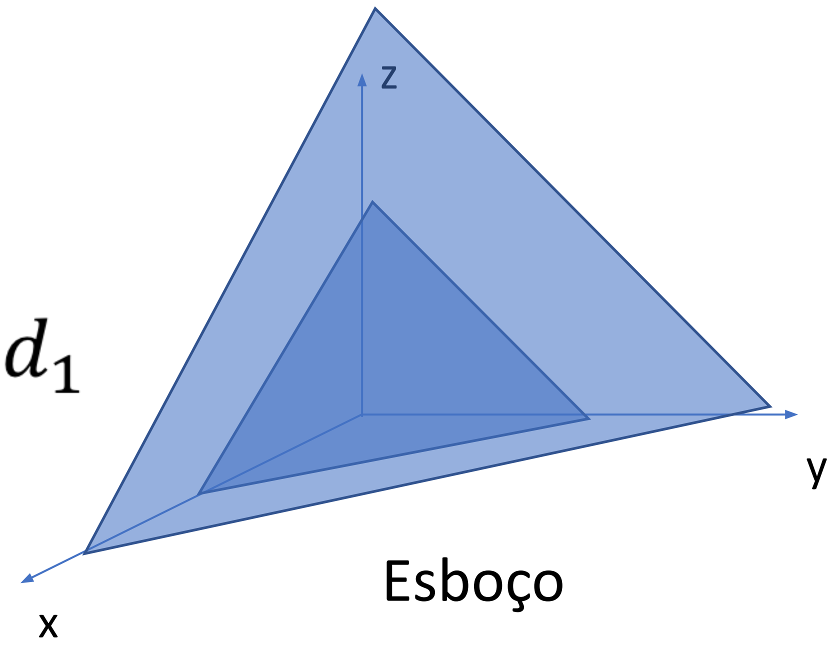
Exercício. **Verificar a posição relativa entre os dois planos dados. Faça um esboço no sistema de coordenadas- O,x,y,z.**

$$\pi_1 : \; 6x + 2y + 3z - 6 = 0$$

$$\pi_2 : 6x + 2y + 3z - 12 = 0$$

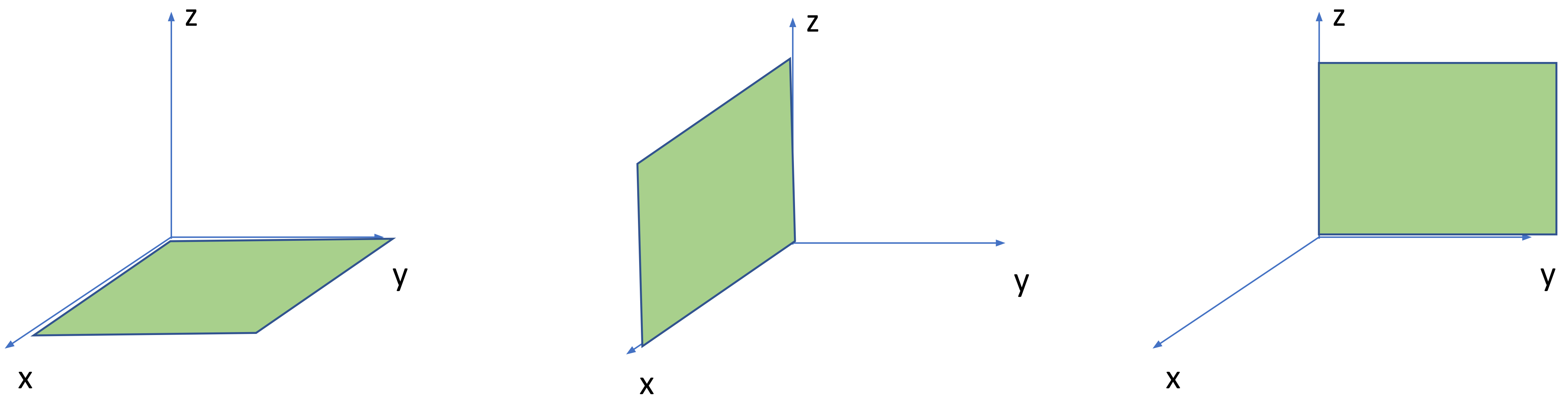
Os planos são paralelos (e distintos), pois

$$(a_2, b_2, \; c_2) = (a_1, b_1, \; c_1) \;\; \text{mas} \;\; d_2 \neq d_1$$



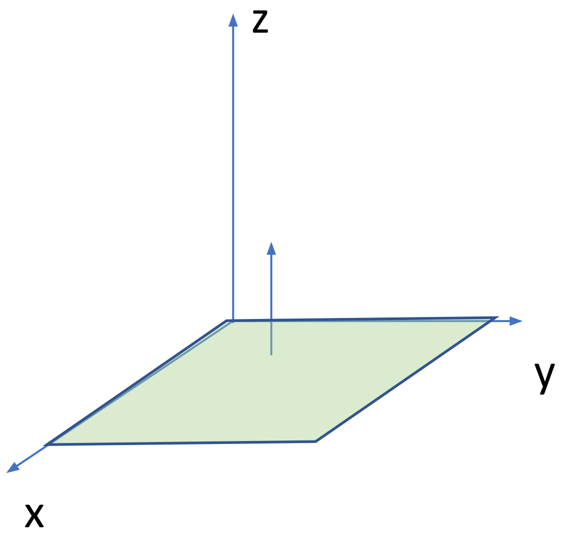
Esboço

Exercício. **Dê a equação geral dos três planos coordenados, ou sejam do plano-*x,y* , do plano-*x,z* e do plano-*y,z* dados nas figuras.**



Tomemos primeiramente o plano-x,y, que é o plano que contém o eixo-x e o eixo-y.

- O versor é normal a este plano $\Rightarrow$ $z + d = 0$
- Este plano passa pela origem $O = (0,0,0) \Rightarrow d = 0.$



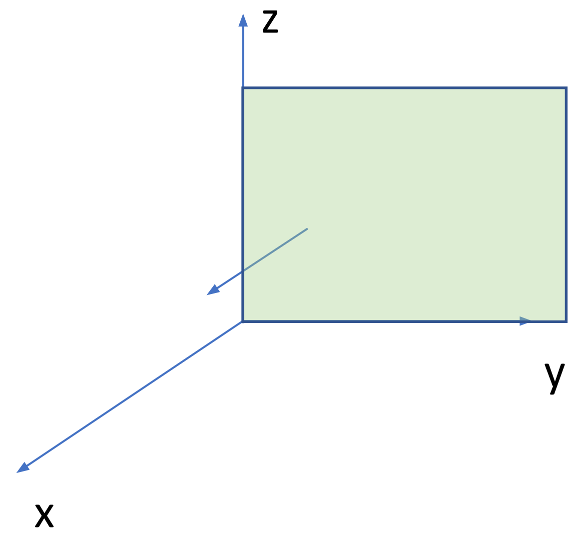
Portanto, a equação geral é

$$z = 0$$

Note: $\hat{\imath} = (1,0,0)$ e $\hat{\jmath} = (0,1,0)$ são vetores diretores do plano-*x,y.*

Consideremos agora o plano-y,z que é o plano que contém o eixo-y e o eixo-z.

- O versor é normal a este plano $\Rightarrow$ $x + d = 0$
- Este plano passa pela origem $O = (0,0,0) \Rightarrow$ $d = 0$.

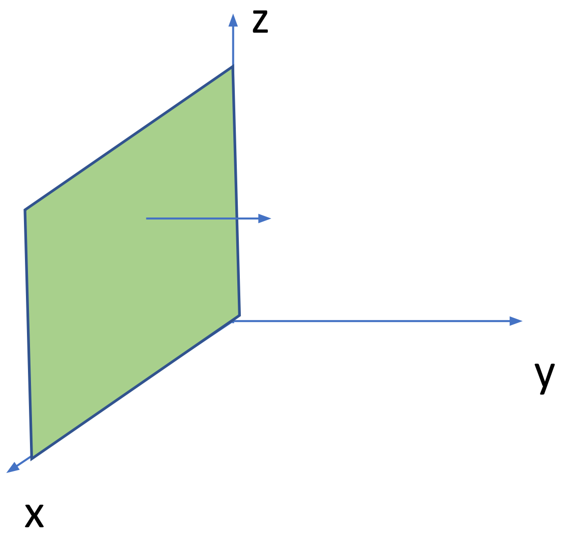


Portanto, a equação geral é

$$x = 0$$

Note: $\hat{\jmath} = (0,1,0)$ e $\hat{k} = (0,0,1)$ são vetores diretores do plano-*y,z*.

Finalmente, consideremos o plano-x,z que é o plano que contém o eixo-x e o eixo-z.



- O versor é normal a este plano $\Rightarrow$ y + d = 0
- Este plano passa pela origem O = (0,0,0) $\Rightarrow$ d = 0.

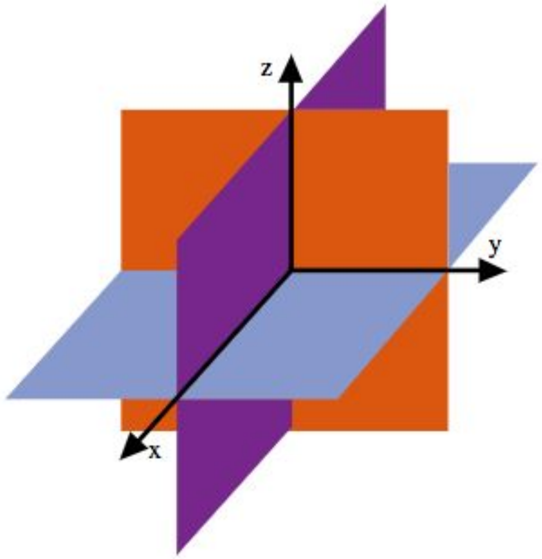
Portanto, a equação geral é

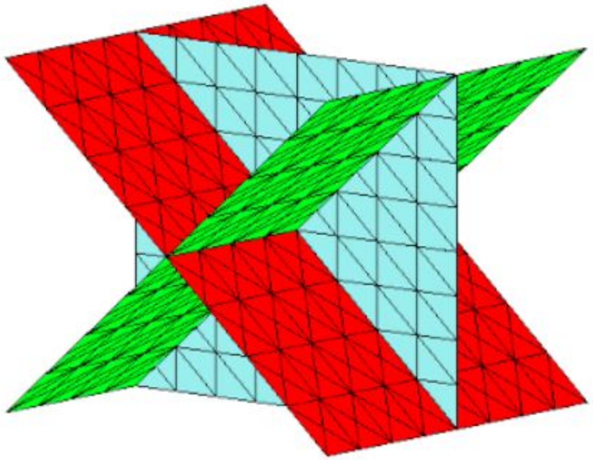
$$y = 0$$

Note: $\hat{\imath}$ = (1,0,0) e $\hat{k}$ = (0,0,1) são vetores diretores do plano-*x,z.*

Pergunta:

Para três planos dados quaisquer, dê uma condição necessária e suficiente entre os vetores normais para que estes planos se interceptem em um único ponto. Este é o caso exemplificado nas duas figuras abaixo:





Resposta: Que os vetores normais sejam L.I.

De fato, um sistema linear de 3 equações e 3 variáveis tem uma única solução se, e somente se, o determinante da matriz dos coeficientes é diferente de zero.

Agora, basta observar que cada equação é a equação geral de um plano:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= -d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= -d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= -d_3 \end{aligned}$$