SMA0300 Geometria Analítica
11ª aula

02/05/2023, terça-feira

Miriam Manoel

Na aula de hoje…

Equação da reta: nas formas vetorial, paramétrica e simétrica

Estudo de planos no espaço - parte 1

Equação paramétrica da reta

É obtida passando a equação vetorial na forma de 3 equações escalares das coordenadas. Isto é, se os pontos e o vetor diretor são dados em coordenadas por

$X = (x, y, z)$

$A = (x_0, y_0, z_0)$

$\vec{v} = (a, b, c)_C$

então a partir da equação vetorial tiramos:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \quad , \lambda \in \mathbb{R}. \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases}$$

Esta é a chamada EQUAÇÃO PARAMÉTRICA DA RETA.

Equação da reta na forma simétrica

Podemos montar esta forma de representar a reta sempre que o vetor diretor tem todas as coordenadas não nulas.

$$\vec{v} = (a, b, c) \qquad a \neq 0,\ b \neq \text{ e } c \neq 0.$$

A equação paramétrica é

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \ , \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = y_0 + \lambda c \end{cases}$$

E a forma simétrica é obtida isolando o parâmetro λ nas expressões acima:

$$\frac{X - X_0}{a} = \frac{Y - Y_0}{b} = \frac{Z - Z_0}{c}$$

Exemplo de reta dada na forma simétrica

Qual é a equação na forma simétrica para a reta que passa pela origem e tem vetor diretor $\vec{v} = (2, 1, 1)$

Exercício

Dê a **equação vetorial**, a **equação paramétrica** e a **equação simétrica** da reta que passa pelos pontos A = (1, 0, 1) e B= (3, -2, 3).

- vetorial : $(x,y,z) = (1,0,1) + \lambda(1,-1,1)\ ,\ \lambda \in \mathbb{R}$

- paramétrica: $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 0 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$

- simétrica : $x - 1 = -y = z - 1.$

Exercício

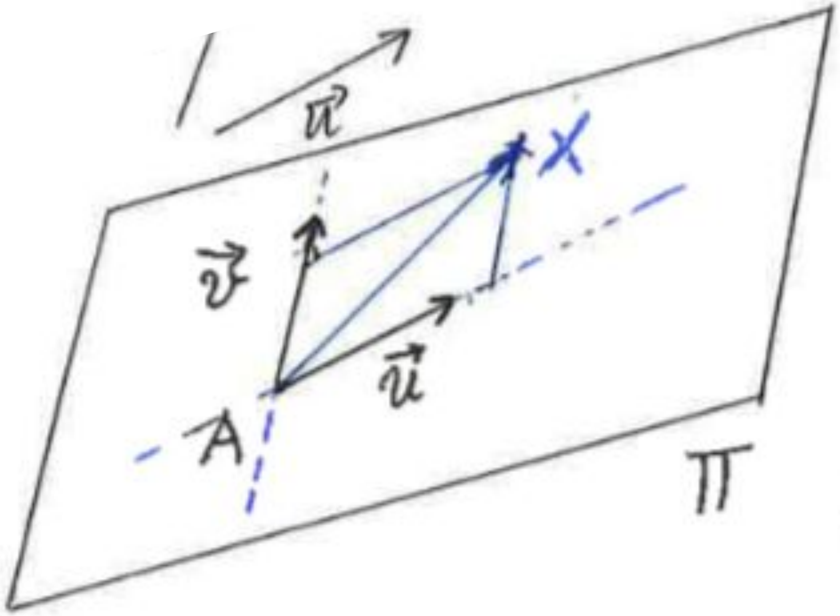
Verifique se as retas dadas são concorrentes:

$$r: X = (1, 2, 3) + \lambda(2, -1, 0) \;, \; \lambda \in \mathbb{R}$$

$$s: X = (0, 1, -3) + \lambda(1, -1, -2) \;, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Estudo vetorial do plano

Definição: Dois vetores LI $\vec{u}$ e $\vec{v}$ paralelos a um plano π são chamados vetores diretores do plano π.



Seja A $\in$ π. Então:

X $\in$ π se, e somente se,

$$\overrightarrow{AX} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$$

$\lambda, \mu \in \mathbf{R}$.

Dizer que

$$\overrightarrow{AX} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$$

é o mesmo que dizer que

$$X = A + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}\ ,\quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Soma de ponto com vetor

Soma de dois vetores

Esta é a chamada EQUAÇÃO VETORIAL DO PLANO

Para

$$X=(x,y,z)_\Sigma\ ,\quad A=(x_0,y_0,z_0)_\Sigma\ ,\quad \vec{u}=(r,s,t)_E\ ,\quad \vec{v}=(m,n,p)_E\ .$$

a equação vetorial

$$X=A+\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}\ ,\quad \lambda,\mu\in\mathbb{R}$$

em coordenadas fica da seguinte forma:

$$\boxed{\begin{cases} x=x_0+\lambda r+\mu m \\ y=y_0+\lambda s+\mu n \\ z=z_0+\lambda t+\mu p \end{cases}\ ,\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}}$$

Esta é a chamada EQUAÇÃO PARAMÉTRICA DO PLANO.

Exemplo Seja π o plano que contem os pontos $A=(1,0,1)$, $B=(2,1,-1)$ e $C=(1,-1,0)$

- Vetores diretores de π: $\vec{u}=\vec{AB}=(1,1,-2)$
  $\vec{v}=\vec{AC}=(0,-1-1)$

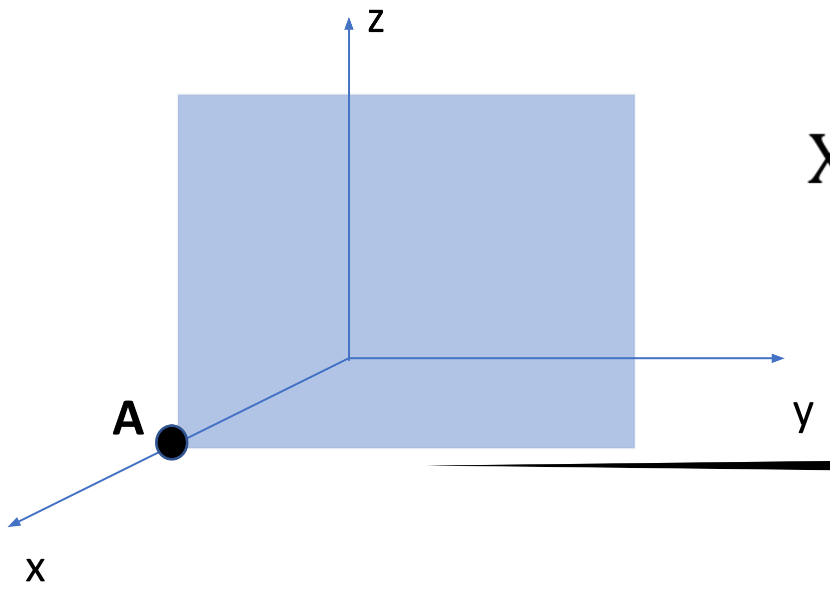
- Equação vetorial de π: $X=(x,y,z)\in\pi \Leftrightarrow X=B+\lambda\vec{u}+\lambda\vec{v}$
  ou seja
  $$(x,y,z)=(2,1,-1)+\lambda(1,1,-2)+\mu(0,-1,-1),\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}$$

- Equações paramétricas de π:
  $$\begin{cases} x=2+\lambda \\ y=1+\lambda-\mu \\ z=-1-2\lambda-\mu \end{cases},\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}.$$

Exemplo 1.

Equação vetorial e equação paramétrica do plano que passa pelo ponto A = (1,0,0)

e tem vetores diretores $\vec{j} = (0,1,0)$ e $\vec{k} = (0,0,1)$.



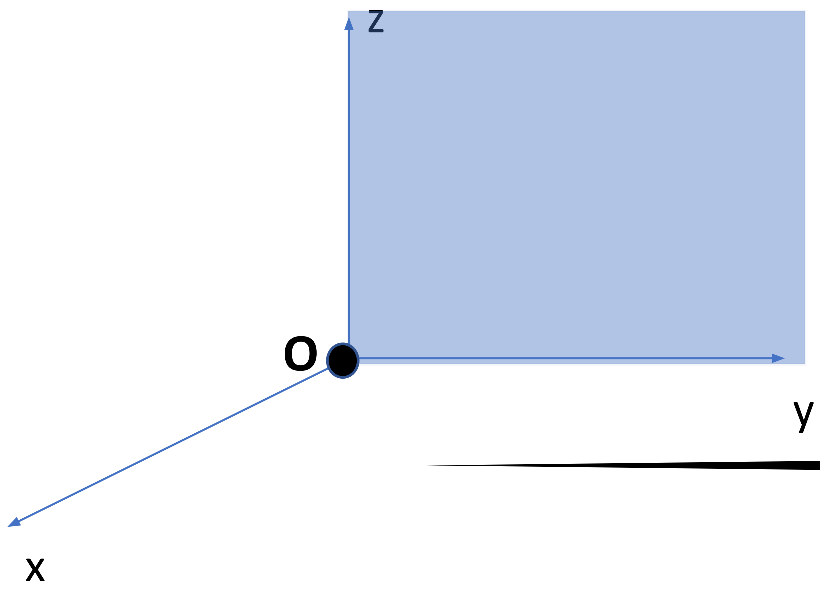
$$X = (1,0,0) + \lambda(0,1,0) + \mu(0,0,1), \quad \lambda, \mu \in \mathbf{R}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = \lambda, \\ z = \mu \end{cases} \qquad \lambda, \mu \in \mathbf{R}$$

Exemplo 2.

Equação vetorial e equação paramétrica do plano que passa pelo ponto O = (0,0,0)

e tem vetores diretores $\vec{j} = (0,1,0)$ e $\vec{k} = (0,0,1)$.



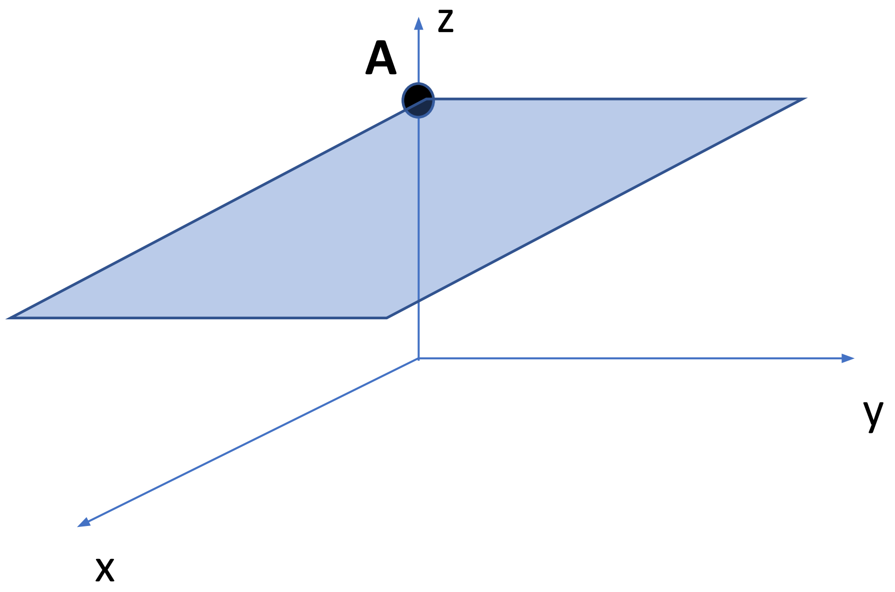
$$X = (0,0,0) + \lambda\,(0,1,0) + \mu(0,0,1), \quad \lambda, \mu \in \mathbf{R}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda, \\ z = \mu \end{cases} \qquad \lambda, \mu \in \mathbf{R}$$

Exemplo 3.

Equação vetorial e equação paramétrica do plano que passa pelo ponto A = (0, 0, 5)

e tem vetores diretores $\vec{u} = (1, 0, 0)$ e $\vec{v} = (0, 1 , 0)$.



$$X = (0, 0, 5) + \lambda\,(1, 0, 0) + \mu(0, 1, 0), \quad \lambda, \mu \in \mathbf{R}$$

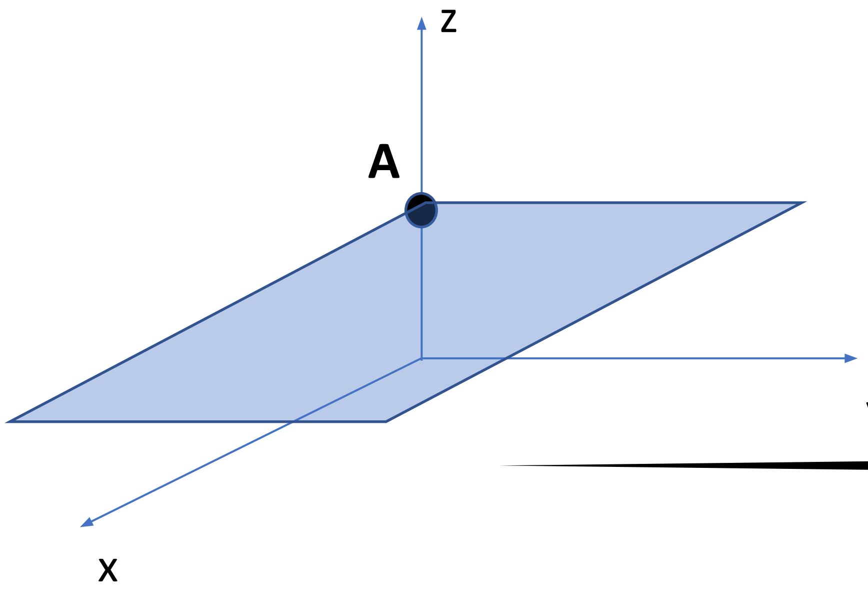
$$\begin{cases} x = 0 + 1\,\lambda \\ y = 0 + \quad 1\,\mu, \quad \lambda, \mu \in \mathbf{R} \\ z = 5 \end{cases}$$

Ou seja: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu, \quad \lambda, \mu \in \mathbf{R} \\ z = 5 \end{cases}$

Exemplo 4.

Equação vetorial e equação paramétrica do plano que passa pelo ponto A = (0, 0, 3)

e tem vetores diretores $\vec{u} = (1, 0, 0)$ e $\vec{v} = (0, 1 , 0)$.



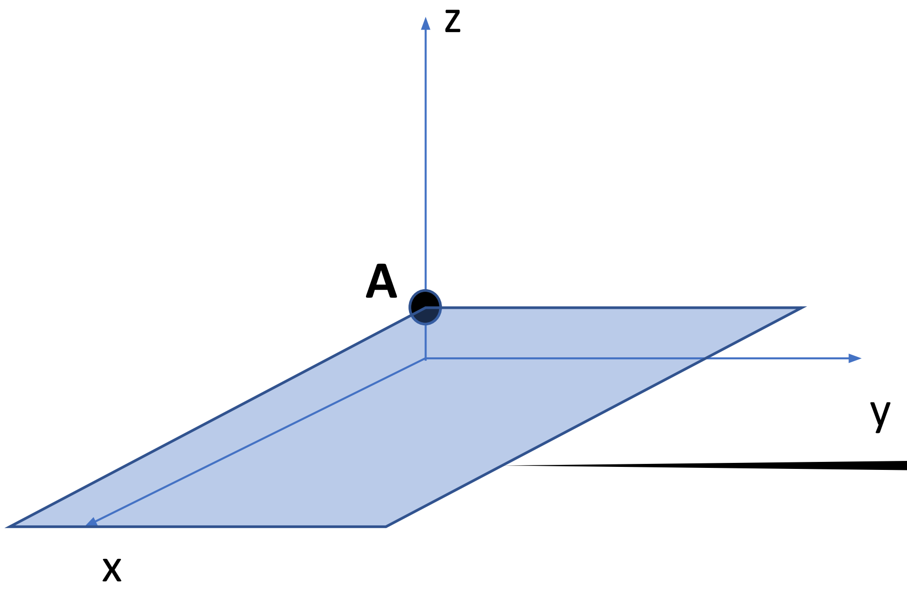
$$X = (0, 0, 3) + \lambda\,(1, 0, 0) + \mu(0, 1, 0), \quad \lambda, \mu \in \mathbf{R}$$

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu, \qquad \lambda, \mu \in \mathbf{R} \\ z = 3 \end{cases}$$

Exemplo 5.

Equação vetorial e equação paramétrica do plano que passa pelo ponto A = (0, 0, 1)

e tem vetores diretores $\vec{u} = (1, 0, 0)$ e $\vec{v} = (0, 1\, , 0)$.



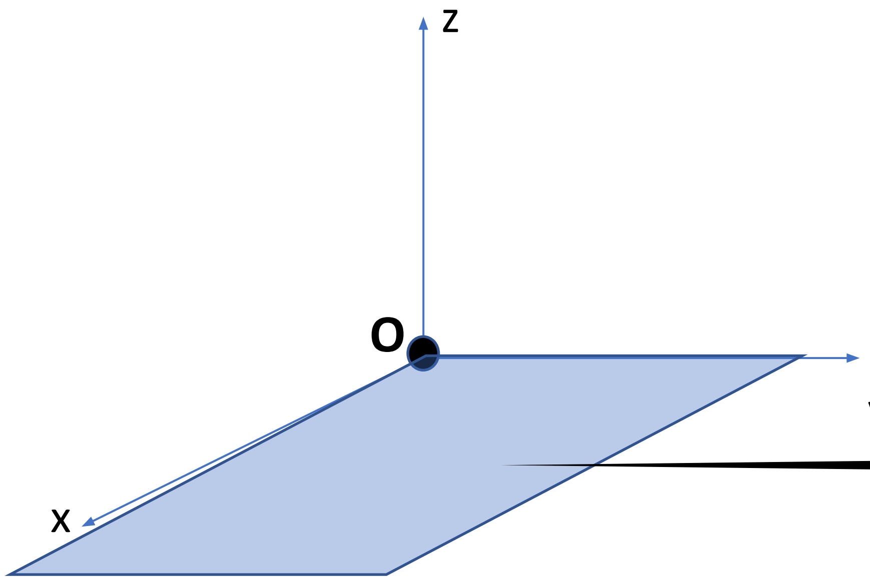
$$X = (0,0,1) + \lambda\,(1,0,0) + \mu(0,1,0), \quad \lambda, \mu \in \mathbf{R}$$

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu, \qquad \lambda, \mu \in \mathbf{R} \\ z = 1 \end{cases}$$

Exemplo 6.

Equação vetorial e equação paramétrica do plano que passa pelo ponto A = (0, 0, 0

e tem vetores diretores $\vec{u} = (1, 0, 0)$ e $\vec{v} = (0, 1\,, 0)$.



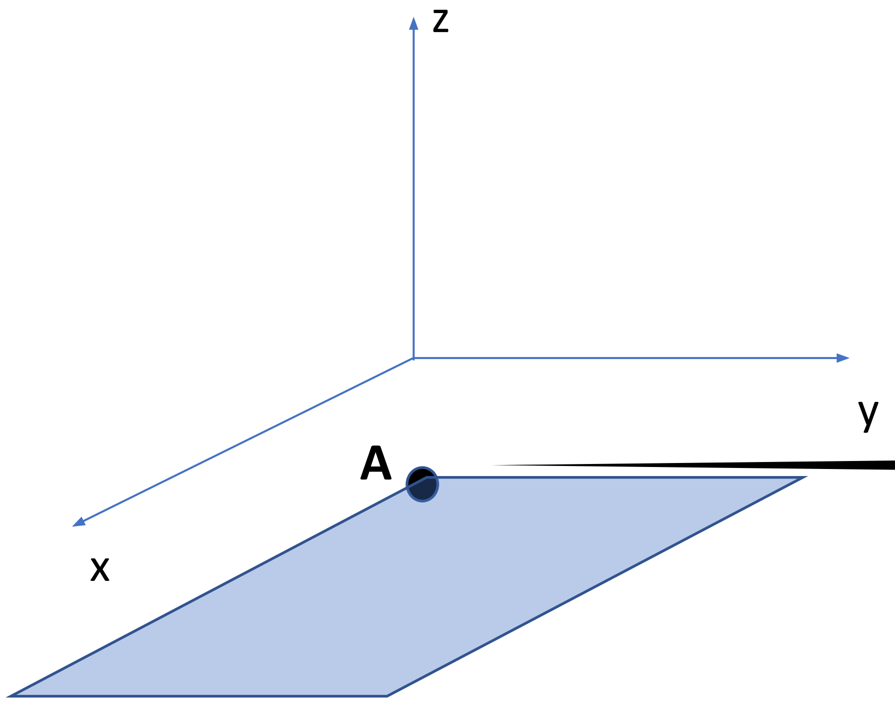
$$X = (0,0,0) + \lambda\,(1,0,0) + \mu(0,1,0), \quad \lambda, \mu \in \mathbf{R}$$

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu, \qquad \lambda, \mu \in \mathbf{R} \\ z = 0 \end{cases}$$

Exemplo 7.

Dê a **equação vetorial** do plano que passa pelo ponto A = (0, 0, -3)

e tem vetores diretores $\vec{u} = (1, 0, 0)$ e $\vec{v} = (0, 1, 0)$.



$$X = (0,0,-3) + \lambda\,(1,0,0) + \mu(0,1,0), \quad \lambda, \mu \in \mathbf{R}$$

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu, \qquad \lambda, \mu \in \mathbf{R} \\ z = -3 \end{cases}$$

Exercício 1

Determine a equação vetorial da reta **r** (caso ela exista) dada pela intersecção dos dois planos π_1 e π_2 cujas equações vetoriais são:

$$\pi_1 : X = (1,2,0) + \lambda_1(0,0,1) + \mu_1(2,3,-1), \quad \lambda_1,\ \mu_1 \in \mathbb{R}$$

$$\pi_2 : X = (0,0,0) + \lambda_2(0,0,1) + \mu_2(2,3,-1), \quad \lambda_2,\ \mu_2 \in \mathbb{R}$$