SMA0300 Geometria Analítica

Aula 10

27/04/2023, quinta-feira

Miriam Manoel

Aula de hoje:

Produto misto - parte 2

Pontos no espaço

Estudo da reta - parte 1

- Equação vetorial da reta
- Equação paramétrica da reta

Produto misto

Definição O produto misto dos vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ nessa ordem, é o número real $\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w}$ indicado por $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w}.$$

Expressão algébrica do produto misto

Proposição. Considere os vetores na base canônica

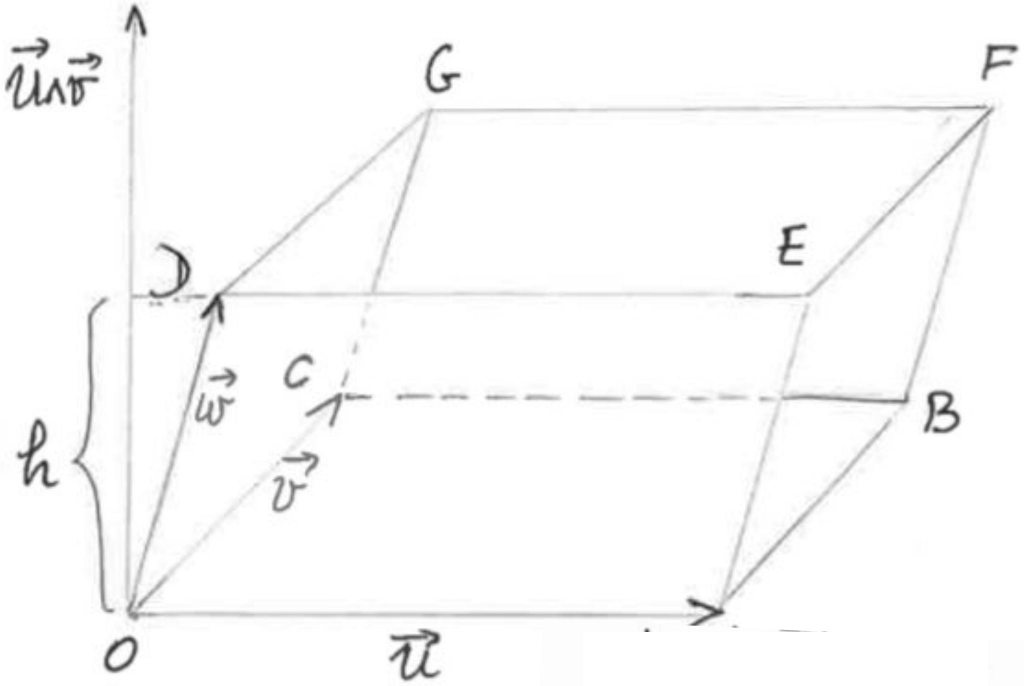
$\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$, $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$, $\vec{w} = (a_3, b_3, c_3)$. Então

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Note: Dizer que o produto misto é zero é o mesmo que dizer que os 3 vetores são LI:

$\left[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right] = 0$ se, e somente se, os três vetores são LD.

Mais sobre a geometria do produto misto: volume do paralelepípedo



$\vec{u} = \vec{OA}$

$\vec{v} = \vec{OC}$

$\vec{w} = \vec{OD}$

Denote por V o volume do paralelepípedo. Temos

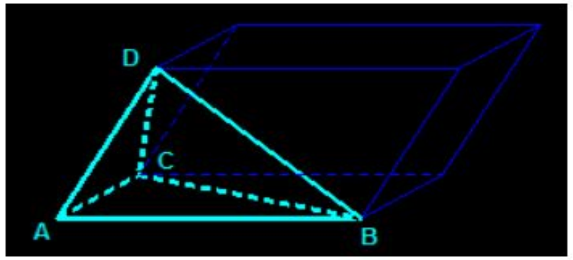
$$V = \text{area } OABC \cdot h$$

Sabemos que area $OABC = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$ e $h = \|\text{proj}_{\vec{u}\wedge\vec{v}}\,\vec{w}\| = \dfrac{|\vec{w} \cdot \vec{u} \wedge \vec{v}|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}$

Portanto, $V = |\vec{w} \cdot \vec{u} \wedge \vec{v}| = |\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w}|$

Volume do tetraedro

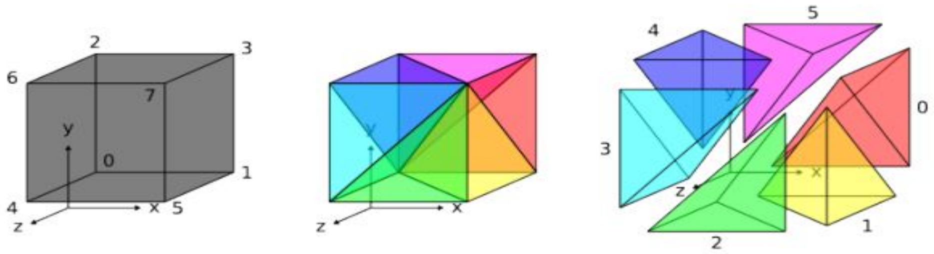
Sejam $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ vetores LI de V^3. Estes vetores definem também um tetraedro.



Fonte: http://www.polyhedra-world.nc/tetra_.htm

Denote por V_t o volume do tetraedro. Sabemos

$$V_t = \frac{1}{6}(\text{volume do paralelepípedo determinado por } \vec{a},\ \vec{b} \text{ e } \vec{c})$$



Fonte:https://www.dune-project.org/doxygen/2.6.0/classDune_1_1GridFactoryInterface.html

$$V_t = \frac{1}{6}|\vec{a} \wedge \vec{b} \cdot \vec{c}|.$$

Exemplo

Sejam os vetores $\vec{u} = (3, m, -2)$, $\vec{v} = (1, -1, 0)$ e $\vec{w} = (2, -1, 2)$. Calcular o valor de m para que o volume do paralelepípedo determinado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ seja 16 u.v. (unidades de volume).

Solução

O volume do paralelepípedo é dado por

$$V = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$$

e, no caso presente, deve-se ter

$$|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = 16$$

Sendo

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 3 & m & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2m - 8$$

Como o volume é igual a 16, então:

$$|-2m - 8| = 16,$$

que, pela definição de módulo, implica duas hipóteses:

$$-2m - 8 = 16 \quad \text{ou} \quad -2m - 8 = -16$$

e, portanto,

$$m = -12 \quad \text{ou} \quad m = 4$$

Exercícios para casa

Exercício 15. Sabendo que a medida em radianos do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $\pi/6$, e que $\|\vec{u}\| = 1$, $\|\vec{v}\| = 7$, calcule $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$ e $\|\frac{1}{3}\vec{u} \times \frac{3}{4}\vec{v}\|$.

Qual o volume do tetraedro cujas arestas são definidas a partir dos vetores dados?

$$\vec{u} = (2, 0, 0), \vec{v} = (1, 4, 0), \vec{w} = (0, 0, 3)$$

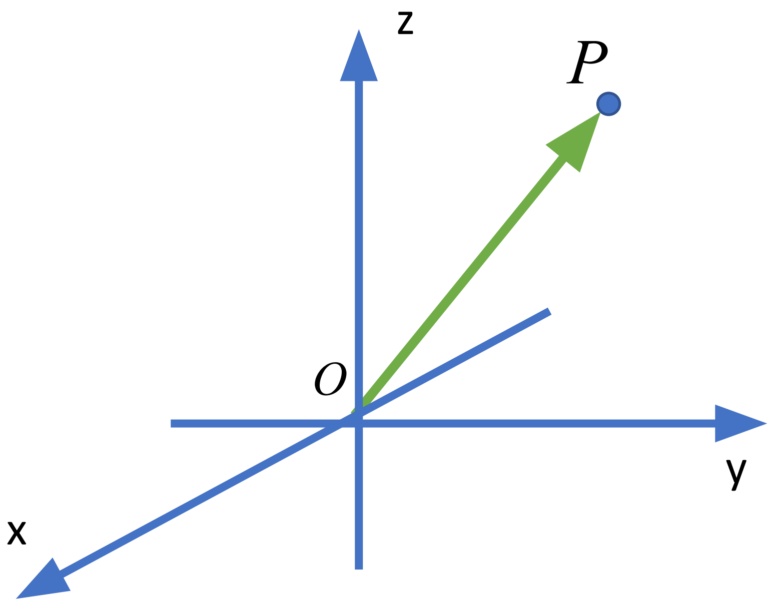
Pontos no espaço dados em coordenadas

Vamos denotar por $\mathbb{R}^3$ o conjunto de pontos no espaço.

Fixemos a base canônica C = $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ de V^3 e fixemos também um ponto O de $\mathbb{R}^3$.

A sequência (O, $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$) é chamada sistema de coordenadas de $\mathbb{R}^3$.

O ponto O é chamado origem do sistema de coordenadas.



As coordenadas de ponto P de $\mathbb{R}^3$ são definidas como as coordenadas do vetor $\vec{OP}$ na base canônica:

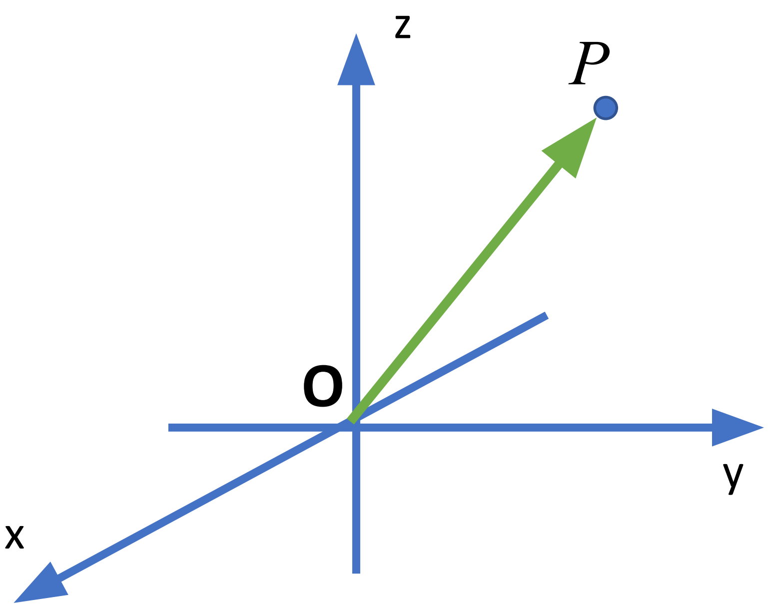
$$\vec{OP} = (x, y, z)_C$$

$$P = (x, y, z)$$

Note, portanto, que a partir da origem O como referencial, podemos identificar as coordenadas de um vetor na base canônica e as coordenadas de um ponto neste sistema:

$$\vec{OP} = (x, y, z)_C$$

$$P = (x, y, z)$$



Note: A origem do sistema de coordenadas (O, $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$) é expressa como

O = $(0, 0, 0)$

Na 3ª aula, vimos a soma de ponto com vetor.
Vamos retomar essa definição e incorporá-la no que acabamos de apresentar, considerando agora em coordenadas:

$$P = O + \vec{OP}$$

$$P = (0,0,0) + (x,y,z)_C$$

$$(x,y,z) = (0,0,0) + (x,y,z)_C$$

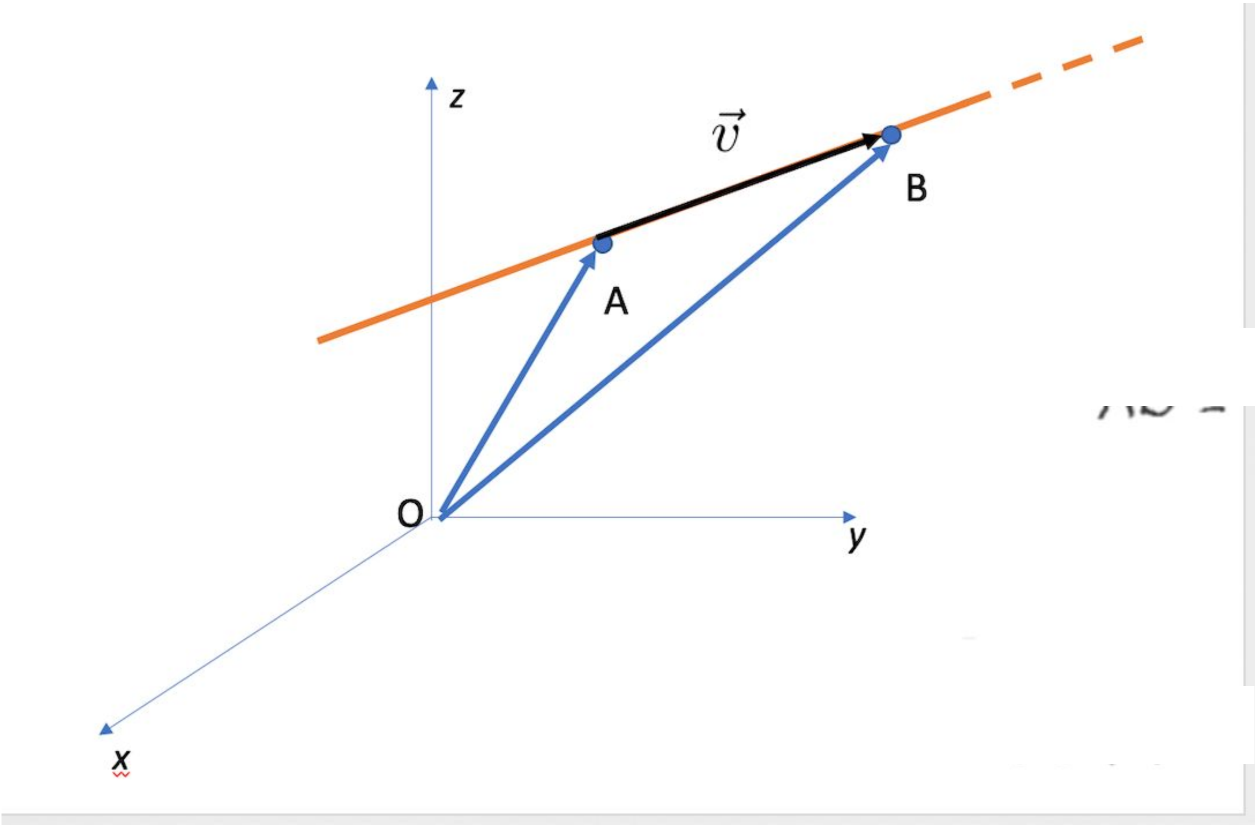
De uma maneira mais geral:

$$A = (x_A, y_A, z_A) \in \mathbb{R}^3$$

$$\vec{v} = (a, b, c)_C \in V^3$$

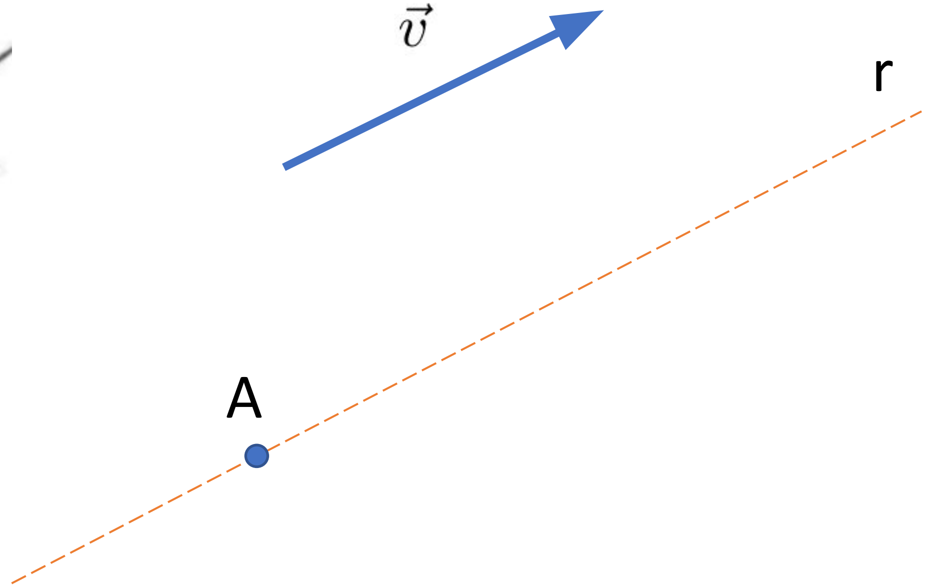
$$B = (x_A, y_A, z_A) + (a, b, c)_C$$

$$\vec{v} = \vec{OB} - \vec{OA}$$



Estudo vetorial da reta

Um vetor não nulo paralelo a uma reta chama-se vetor diretor da reta.



Seja $\vec{v}$ um vetor diretor de uma reta r e A um ponto de r.

$$\boxed{X \in r \iff X = A + \lambda \vec{v}, \ \lambda \in \mathbb{R}}$$

Esta é a chamada EQUAÇÃO VETORIAL DA RETA.

Exemplo

Dê a equação vetorial da reta que passa pelo ponto $A = (1, 2, 3)$ e tem vetor diretor

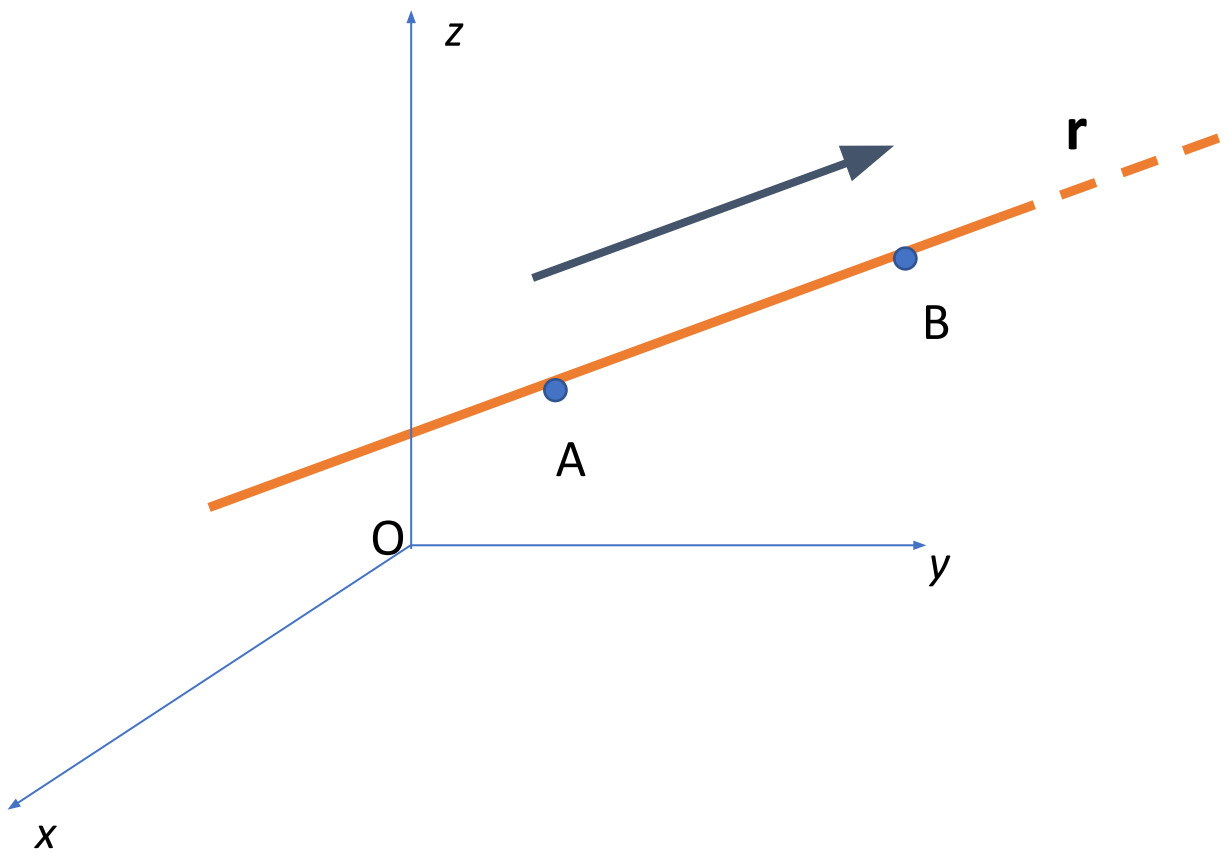
$\vec{u} = (3, 2, 1)$

Exemplo

Dê a equação vetorial da reta que passa pelo ponto $P = (1,2,0)$ e é paralela ao eixo-z.

$A = (x_A , y_A , z_A)$

$B = (x_B , y_B , z_B)$



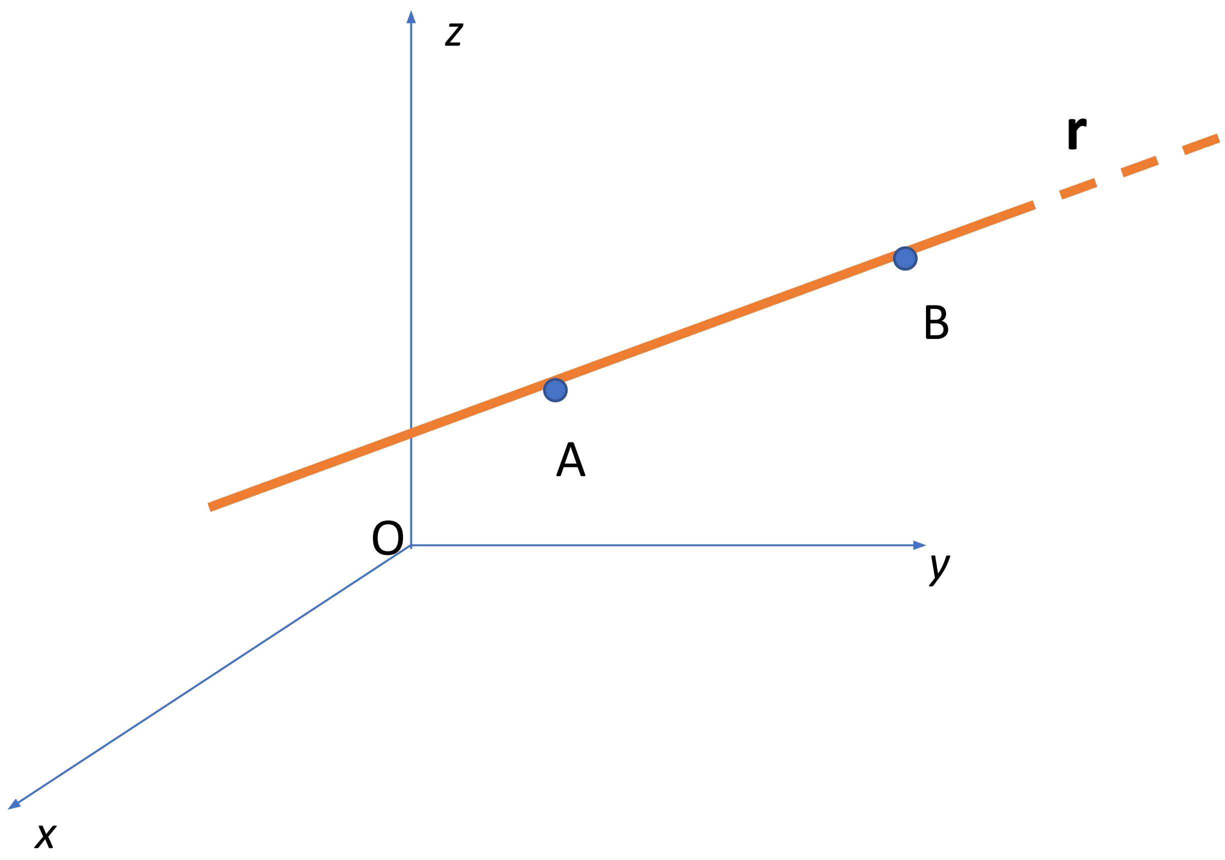
Note: um vetor diretor para a reta r que passa pelos pontos A e B é o vetor

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A , y_B - y_A , z_B - z_A)$$

Você terá que usar essa ideia para resolver o EPPA 6

Exemplo

Dê a equação **vetorial** da reta r que passa pelos pontos A e B.



A = (3, 3, 2)

B = (1, 5, 2)

Equação paramétrica da reta

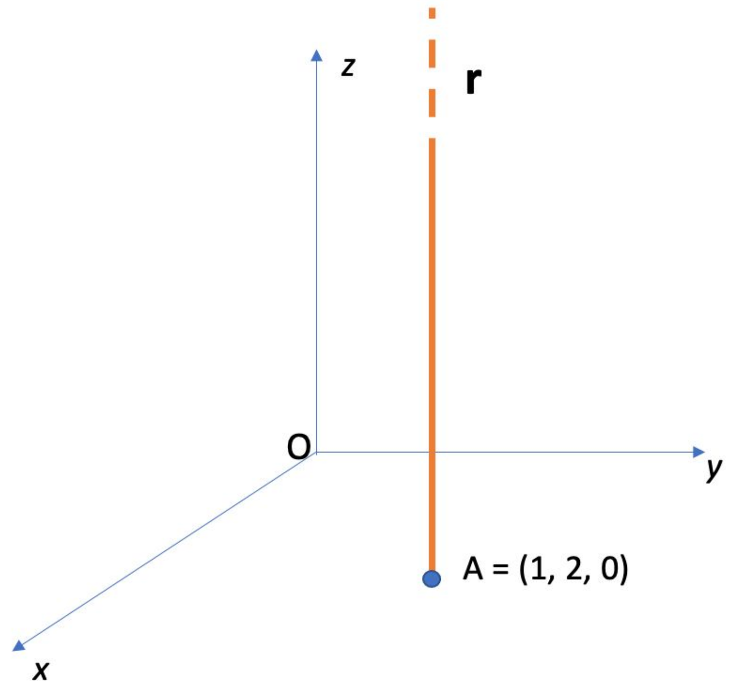
É obtida passando a equação vetorial em 3 equações escalares das coordenadas:

$X = (x, y, z)$
$A = (x_0, y_0, z_0)$
$\vec{v} = (a, b, c)$ C

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \quad , \lambda \in \mathbb{R}. \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases}$$

Esta é a chamada EQUAÇÃO PARAMÉTRICA DA RETA.

Exercício



A reta r da figura é paralela ao eixo *Oz.*

Dê as equações da reta r na **forma vetorial** e na **forma paramétrica**.

Estudo de casos: equação vetorial e paramétrica dos eixos coordenados

Faremos em aula.

Exercício

Verifique se as retas dadas são concorrentes:

$$r: X = (1,2,3) + \lambda(2,-1,0) \ , \ \lambda \in \mathbb{R}$$

$$s: X = (0,1,-3) + \lambda(1,-1,-2) \ , \lambda \in \mathbb{R}.$$