Universidade de São Paulo
Instituto De Ciências Matemáticas e de Computação

Prof. Jorge Bazán

Material adicional - Elementos de probabilidade

Estatística I - SME0320

São Carlos
2023/01

0.1. Experimento aleatório

Exemplos:

- Obter cara ou coroa no lançamento de uma moeda;
- Lançamento de um dado;
- Obter uma carta de um barulho;
- Medir a temperatura atmosférica;
- Investir na publicidade de um produto e esperar que este investimento ative a demanda;
- Tempo de corrosão de uma peça de maquinaria.

0.1.1. Características de um experimento aleatório

- É possível repetir cada experimento indefinidamente sem mudar essencialmente as condições;
- Em geral, não podemos indicar um resultado em particular, mas podemos descrever o conjunto de todos os possíveis resultados do experimento;
- Quando o experimento se repete um grande número de vezes, aparece um modelo definido de regularidade.

0.2. Espaço amostral

- Chamamos de "Espaço amostral de um experimento aleatório" um conjunto de todos os possíveis resultados do experimento aleatório;
- O espaço amostral é denotado por Ω.

Exemplos:

- Lançamento de uma moeda
  $\Omega = \{\text{cara}, \text{coroa}\}$
- Lançamento de um dado
  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Obter uma carta de um baralho
  $\Omega = \{x \mid x \text{ é uma carta de do baralho}\}$
- Medir a temperatura atmosférica de São Carlos
  $\Omega = \big[10, 35\big]$
- Tempo de corrosão de uma peça de maquinaria
  $\Omega = \langle 0, \infty \rangle$
- Nota de uma prova
  $\Omega = \{w \mid w \in \mathbb{N}, 0 \leq x \leq 20\}$
- Número de lançamentos de um dado até obter a face 6
  $\Omega = \{1, 2, 3, \cdots\}$

0.2.1. Tipos de espaço amostral

Segundo o número de resultado de um espaço amostral, este pode ser:

- Discreto finito: finito;
- Discreto infinito: infinito numerável;
- Continuo: infinito no numerável.

0.3. Evento

- Um evento é qualquer subconjunto do espaço amostral;
- A é um evento se $A \subset \Omega$;
- A chama-se "evento unitário" ou "elementar" se A é unitário, ou seja, $A = \{w_i\}$.
- A chama-se "evento composto" se possui mais de um resultado no experimento aleatório;
- Ω é o evento seguro ou certo;
- $\emptyset$ é o evento impossível;
- Dizemos que A ocorre se o resultado do experimento aleatório contém os elementos de A;
- O evento A está contido no evento B, $A \subset B$, se cada vez que ocorre A, também ocorre B;
- $A = B$ se, e somente se, $A \subset B$ e $B \subset A$;
- Se $A \cap B = \emptyset$, dizemos que A e B são mutuamente excludentes. A e B não podem ocorrer juntos.

Exemplo:

No experimento aleatório do lançamento de um dado temos $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, o espaço amostral. Seja $A = \{x \mid x \text{ é par}\}$, então dizemos que A ocorre se, ao fazer o lançamento do dado, obtemos as faces 2, 4, ou 6.

0.3.1. Operações com Eventos

Sejam A, $B \subset \Omega$, podemos definir as seguintes operações:

- Intersecção : $A \cap B = \{w \in \Omega \mid w \in A \wedge w \in B\}$;
- União : $A \cup B = \{w \in \Omega \mid w \in A \vee w \in B\}$;
- Complemento : $A^C = \{w \in \Omega \mid w \ni A\}$;
- Diferença: $A - B = \{w \in \Omega \mid w \in A \wedge w \notin B\} \Rightarrow A - B = A \cap B^C$;
- Produto Cartesiano: $A \times B = \{(w_1, w_2) \in \Omega \times \Omega \mid w_1 \in A \wedge w_2 \in B\}$.
- Outras operações:
  - $A \cup A = A$
    $A \cap A = A$
  - $A \cup B = B \cup A$
    $A \cap B = B \cap A$
  - $A \cup A^C = \Omega$
    $A \cap A^C = \emptyset$
  - $A \cup \emptyset = A$
    $A \cap \emptyset = \emptyset$
  - $A \cup \Omega = \Omega$
    $A \cap \Omega = A$
  - $\Omega^C = \emptyset$
    $\emptyset^C = \Omega$
    $(A^C)^C = A$
  - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
    $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
  - $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$
    $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

0.3.2. Álgebra de Eventos

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

0.4. Probabilidade de um evento

0.4.1. Definição Axiomática

Seja um experimento aleatório e Ω seu espaço amostral. A notação da probabilidade de qualquer evento $A \subset \Omega$ é dada por $P(A)$ e satisfaz:

(i) $0 \leq P(A) \leq 1$;

(ii) $P(\Omega) = 1$;

(iii) Se A e B são mutuamente excludentes, então

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B);$$

(iiib) Se $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ são sucessos que estão excluídos mutuamente de par em par, então

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

0.4.2. Teoremas

- $P(A^C) = 1 - P(A)$
- Se $A = \emptyset \Rightarrow P(\emptyset) = 0$
- Se $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
- $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cup B \cup C)$

Como exercício, considere os axiomas e prove os teoremas presentados.

0.4.3. Exemplo 1

Uma empresa tem dois modos, A e B, de apresentar um novo produto ao mercado. Se apresenta o produto do modo A, a probabilidade de que o produto tenha sucesso é 0,44 e se apresenta o modo B, a probabilidade de sucesso se reduz a 0,29. A probabilidade de que o produto falhe com ambos modos de apresentação é 0,37. Qual é a probabilidade de que o produto tenha sucesso com ambas formas de apresentação?

Solução:

Temos os seguintes eventos:
$A = \{$Que o produto tenha sucesso com o modo $A\}$, $P(A) = 0,44$
$B = \{$Que o produto tenha sucesso com o modo $B\}$, $P(B) = 0,29$

Precisamos calcular $P(A \cap B)$.

Pela lei de De Morgan, temos que

$$P\left((A \cup B)^C\right) = P\left(A^C \cap B^C\right) = 0,37.$$

Assim,

$$P(A \cup B) = 1 - P\left((A \cup B)^C\right) = 1 - 0,37.$$

Então, aplicando a regra aditiva temos que a probabilidade de que o produto tenha sucesso com ambos modos de apresentação é:

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,44 + 0,29 - 0,63 = 0,10.$$

0.5. Cálculo de Probabilidades

- Espaço amostral discreto finito (Definição clássica):

$$P(A) = \frac{\text{casos favoráveis}}{\text{casos possíveis}}$$

- Espaço amostral discreto infinito:

$$P(A) = \sum_{w_i \in A} P(\{w_i\})$$

- Espaço amostral contínuo:

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}$$

A medida $m(\cdot)$ pode ser uma área ou largura. Neste caso a probabilidade se denomina probabilidade geométrica.

0.6. Contagem de pontos amostrais

- $n(A) =$ Número de elementos do evento A;
- $n(\varnothing) = 0$;
- $n(A) \geq 0$, para todo A;
- Espaço amostral discreto finito:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

0.6.1. Regra do produto

- Se uma operação pode ser realizada de n formas e outra operação pode ser realizada de m formas, então as duas operações podem ser realizadas de $n \times m$ formas;
- Sejam k conjuntos de elementos, na qual n_1 está no primeiro conjunto, n_2 no segundo, $\ldots$, n_k no k-ésimo conjunto. Suponha que queiramos formar uma amostra de k elementos tomando um elemento de cada um dos conjuntos. O número de amostras distintas que podem se formar é o produto $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$.

0.6.2. Regra da Adição

- Se A e B são dois eventos mutuamente excludentes, então $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$;
- Se A e B são dois eventos quaisquer, então $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

0.6.3. Exemplo 2

A senha para acessar um computador têm 6 caracteres que podem ser letras (26) ou números (10).

- Quantas senhas distintas podem ser formadas?
- Quantas senhas distintas podem ser formadas somente com números?
- Quantas senhas distintas podem ser formadas se as senhas devem ter ao menos uma letra?

Solução:

a) $36 \times 36 \times 36 \times 36 \times 36 \times 36 = 36^6 = 2.176, 782.336$

b) $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^6 = 1.000.000$

c) Por complemento, $36^6 - 10^6 = 2.175.782.336$

0.6.4. Permutações

Uma permutação é um arranjo ordenado de objetos distintos. Por exemplo, as permutações de tamanho 2 que podem ser feitas com as letras A, B e C são: AB, AC, BC, BA, CA e CB. Fazendo uso da regra multiplicativa de análise combinatória, temos que

i) O número de permutações de n objetos pegos todos a la vez é dado por

$$P_n^n = n(n-1)(n-2)...1$$

ii) O número de permutações de n objetos distintos pegos de r em r é dado por:

$$P_r^n = n(n-1)...(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Lembremos que $0! = 1$.

0.6.5. Exemplo 3

Oito atletas competem na final olímpica dos 110 metros com barreiras. Supondo que eles cruzem a linha de chegada em momentos diferentes, de quantos modos distintos podem ser conquistadas as medalhas de Ouro, Prata e Bronze?

Solução:

O primera medalha (Ouro) pode ser conquistada por 8 atletas, a segunda medalha (Prata) pode ser conquistada por 7 atletas e a terceira (Bronze) por 6 atletas, então pela regra multiplicativa há $8 \times 7 \times 6$ formas distintas de conquistar os prêmios. Isto é

$$P_3^8 = \frac{8!}{5!}$$

0.6.6. Permutações circulares

De quantas formas diferentes podem sentar n pessoas em torno de uma mesa circular?

$$(n-1)!$$

0.7. Permutações com objetos repetidos

De quantas formas podem permutar n objetos, nas quais n_1 são pretos, n_2 são brancos e n_3 vermelhos?

$$\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!}$$

0.7.1. Regra de partições

Existe somente um conjunto de n elementos claramente distintos e se deseja reparti-los entre k conjuntos, de tal forma que o primeiro conjunto contenha n_1 elementos, o segundo n_2 elementos, $\ldots$, e o k-ésimo conjunto contenha n_k elementos. O número de partições diferentes é dado por

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!},$$

na qual $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$.

0.7.2. Combinações

Uma combinação é uma seleção de objetos cuja ordem da escolha não importa. Um exemplo são as combinações que podem ser feitas com os objetos A, B e C, escolhidos de dois em dois, que neste caso são AB, AC e BC. Observe que o número de permutações obtidas anteriormente foi o dobro.

O número de combinações de n objetos tomados de r en r é dado por

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{P_r^n}{r!}$$

Como $0! = 1$, temos que

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$$

0.7.3. Exemplo 4

Uma senhora tem 8 amigas e deseja convidar 5 delas para uma festa. Considerando que 2 dessas amigas estão brigadas, de quantas maneiras ela pode fazer os convites de forma que elas não sejam convidadas ao mesmo tempo?

Solução:

Vamos calcular os possíveis convites considerando que as amigas brigadas estarão juntas, ou seja, temos $\binom{6}{3} = 20$ convites possíveis. Considerando agora o total de convites possíveis, temos $\binom{8}{5} = 56$ convites que podem ser feitos. Então, usando complemento há $56 - 20 = 36$ convites na qual as duas amigas que estão brigadas não estarão juntas.