SEL0301 – Circuitos Elétricos I

Universidade de São Paulo
Escola de Engenharia de São Carlos
Departamento de Engenharia Elétrica e de Computação
Prof. Rogério Andrade Flauzino

terça-feira, 11 de maio de 2021

Universidade de São Paulo
Escola de Engenharia de São Carlos
Departamento de Engenharia Elétrica e de Computação
Prof. Rogério Andrade Flauzino

CAPÍTULO 2
CIRCUITOS COM ELEMENTOS ARMAZENADORES DE ENERGIA

2.1. Introdução

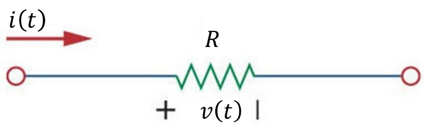
- O relacionamento tensão por corrente dos elementos de circuitos elétricos pode ser estabelecido da seguinte maneira:

Relation	Resistor (R)	Capacitor (C)	Inductor (L)
v-i:	$v = iR$	$v = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\tau)d\tau + v(t_0)$	$v = L\frac{di}{dt}$
i-v:	$i = v/R$	$i = C\frac{dv}{dt}$	$i = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau + i(t_0)$

- Assim, quando da análise de circuitos com elementos armazenadores de energia ter-se-á um conjunto de equações diferenciais como resultado.

2.1. Introdução

- Elementos de circuitos elétricos – Resistores
  - Esquematicamente representados da seguinte forma:



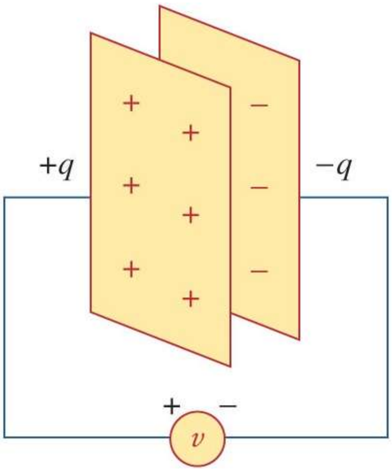
  - Representam a conversão de energia elétrica em outra forma de energia.
  - Em resistores lineares a tensão é diretamente proporcional à corrente cuja constante de proporcionalidade é a resistência (Lei de Ohm).

$$v(t) = Ri(t)$$

2.1. Introdução

- Elementos de circuitos elétricos – Capacitores
  - Ao se aplicar uma diferença de potência nas placas cargas se acumularam nas placas.
  - Essas cargas não em igual quantidade mas com características opostas (em uma placa as cargas serão positivas e na outra negativas)
  - Não há o armazenamento de cargas.
  - A quantidade de carga nas placas será proporcional à tensão aplicada.

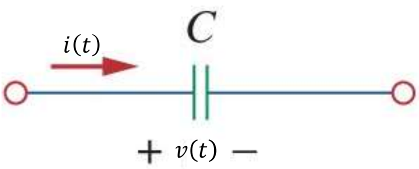
$$q(t) = Cv(t)$$



2.1. Entes constituintes de um circuito elétrico

- Elementos de circuitos elétricos – Capacitores
  - Derivando em t, tem-se:

$$\frac{dq(t)}{dt} = C\frac{dv(t)}{dt}$$

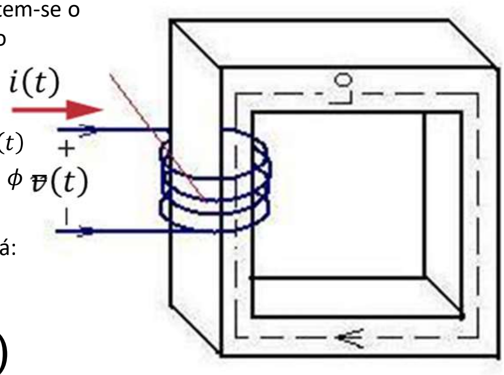


$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$$

  - Os capacitores representam a capacidade do sistema de armazenar energia no campo elétrico.

2.1. Introdução

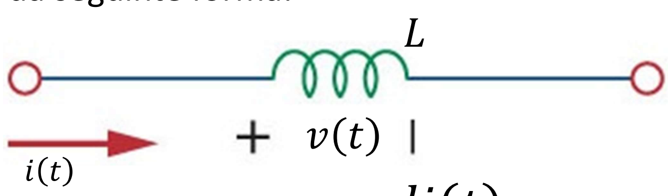
- Elementos de circuitos elétricos – Indutores
  - Ao se fazer circular uma corrente $i(t)$ pelo enrolamento do indutor tem-se o estabelecimento de um campo magnético pelo núcleo.
  - $\oint Hdl = Ni(t) \rightarrow H = \frac{N}{l} i(t)$
  - Portanto, $B = \mu H \rightarrow B = \frac{\mu N}{l} i(t)$
  - Assim, o fluxo magnético será: $\phi = \int Bds \rightarrow \phi(t) = \frac{\mu N A}{l} i(t)$
  - Dessa forma a tensão $v(t)$ será:
  - $v(t) = \frac{dN}{dt} = \frac{\mu N^2 A}{l} \frac{di(t)}{dt}$



$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

2.1. Introdução

- Elementos de circuitos elétricos – Indutores
  - Esquematicamente os indutores são representados da seguinte forma:



$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

- Os indutores representam a capacidade do sistema de armazenar energia no campo magnético.

2.1. Introdução

- Para solucionar o conjunto de equações diferenciais fruto da análise é necessário que se determine as condições de contorno (condições iniciais) do circuito.
- Assim, inicialmente será apresentado quais são e como determinar as condições iniciais em circuitos com elementos armazenadores de energia.

2.2. Cálculo de Condições Iniciais em Circuitos com Elementos Armazenadores de Energia

- Capacitor – Condição inicial
  - O relacionamento tensão por corrente em um capacitor pode ser expresso da seguinte forma:
    - $i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$
  - Pela definição de derivada, tem-se:
    - $i(t) = C\lim\limits_{\Delta t \to 0}\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}$
    - $\lim\limits_{\Delta t \to 0} i(t)\Delta t = C\lim\limits_{\Delta t \to 0}\big(v(t+\Delta t)-v(t)\big)$
    - $0 = C\lim\limits_{\Delta t \to 0}\big(v(t+\Delta t)-v(t)\big)$
    - $\lim\limits_{\Delta t \to 0} v(t+\Delta t) = v(t)$
  - Ou seja, não há variação instantânea de tensão em um capacitor.

2.2. Cálculo de Condições Iniciais em Circuitos com Elementos Armazenadores de Energia

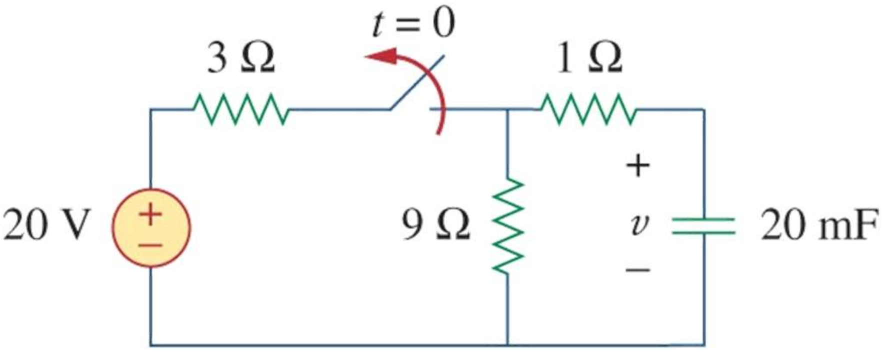
- Capacitor – Condição inicial
  - Dado que $\lim_{\Delta t \to 0} v(t + \Delta t) = v(t)$, ou seja, não há variação instantânea da tensão em um capacitor essa deve ser a grandeza a se conhecer como condição inicial.

2.2. Cálculo de Condições Iniciais em Circuitos com Elementos Armazenadores de Energia

- Capacitor – Comportamento em regime permanente
  - Em regime permanente de corrente contínua não há variação temporal das grandezas elétricas.
  - Portanto:
    - $i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$
    - $i(t) = 0$
  - Não há circulação de corrente por um capacitor em regime de corrente contínua, ou seja, o capacitor em regime permanente CC se comporta como um ramo aberto.

2.2. Cálculo de Condições Iniciais em Circuitos com Elementos Armazenadores de Energia

- No circuito à seguir, qual a tensão do capacitor em $t = 0$?



2.2. Cálculo de Condições Iniciais em Circuitos com Elementos Armazenadores de Energia

- Indutor – Condição inicial
  - O relacionamento tensão por corrente em um indutor pode ser expresso da seguinte forma:
    - $v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$
  - Pela definição de derivada, tem-se:
    - $v(t) = L \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{i(t+\Delta t) - i(t)}{\Delta t}$
    - $\lim\limits_{\Delta t \to 0} v(t)\Delta t = L \lim\limits_{\Delta t \to 0} \big(i(t + \Delta t) - i(t)\big)$
    - $0 = L \lim\limits_{\Delta t \to 0} \big(i(t + \Delta t) - i(t)\big)$
    - $\lim\limits_{\Delta t \to 0} i(t + \Delta t) = i(t)$
  - Ou seja, não há variação instantânea de corrente em um indutor.

2.2. Cálculo de Condições Iniciais em Circuitos com Elementos Armazenadores de Energia

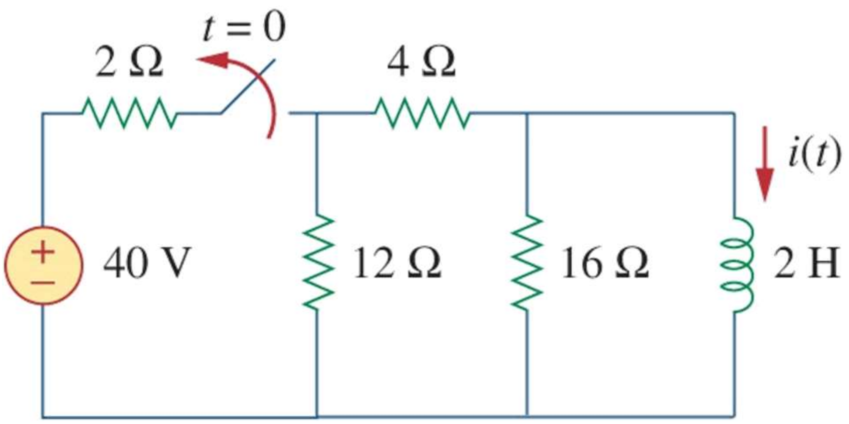
- Indutor – Condição inicial
  - Dado que $\lim_{\Delta t \to 0} i(t + \Delta t) = i(t)$, ou seja, não há variação instantânea da corrente em um indutor essa deve ser a grandeza a se conhecer como condição inicial.

2.2. Cálculo de Condições Iniciais em Circuitos com Elementos Armazenadores de Energia

- Indutor – Comportamento em regime permanente
  - Em regime permanente de corrente contínua não há variação temporal das grandezas elétricas.
  - Portanto:
    - $v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$
    - $v(t) = 0$
  - Não há queda de tensão em um indutor em regime permanente de corrente contínua, ou seja, o indutor em regime permanente CC se comporta como um ramo curto-circuitado.

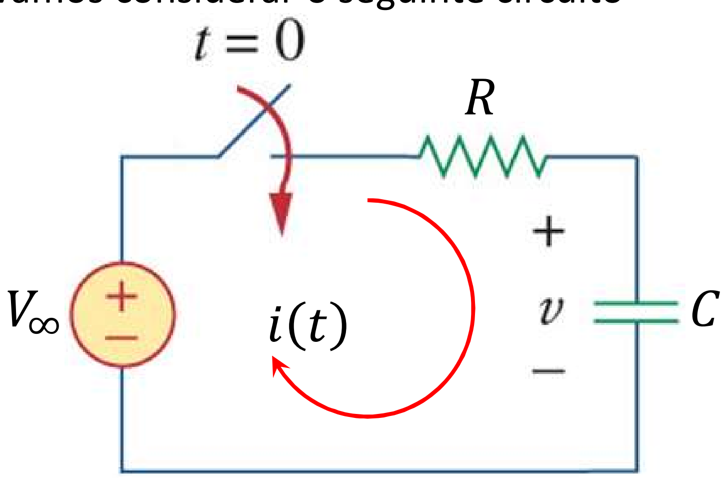
4.2. Cálculo de Condições Iniciais em Circuitos com Elementos Armazenadores de Energia

- No circuito à seguir, qual a corrente do indutor em $t = 0$?



2.3. Circuitos de Primeira Ordem Circuitos RC com fonte de alimentação

- Vamos considerar o seguinte circuito



2.3. Circuitos de Primeira Ordem Circuitos RC com fonte de alimentação

- A equação de malha para $t \geq 0$ resulta em:
  - $v_R(t) + v_C(t) = V_\infty$
  - $Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau + v_C(t=0) = V_\infty$
- Derivando em função de t, tem-se:
  - $R\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}i(t) = 0$
  - $R\frac{di(t)}{dt} = -\frac{1}{C}i(t)$
  - $\frac{di(t)}{i(t)} = -\frac{1}{RC}dt$

2.3. Circuitos de Primeira Ordem Circuitos RC com fonte de alimentação

- Integrando ambos os lados da equação, tem-se:
  - $\int \frac{di(t)}{i(t)} = -\frac{1}{RC}\int dt$
  - $\ln\big(i(t)\big) + k_1 = -\frac{1}{RC}t + k_2$
  - $\ln\big(i(t)\big) = -\frac{1}{RC}t + k$
  - $i(t) = e^{-\frac{1}{RC}t+k}$
  - $i(t) = e^{-\frac{1}{RC}t}e^k$
  - $i(t) = I_0e^{-\frac{1}{RC}t}$
- a constante I_0 deve ser determinada em função das condições iniciais do circuito.

2.3. Circuitos de Primeira Ordem Circuitos RC com fonte de alimentação

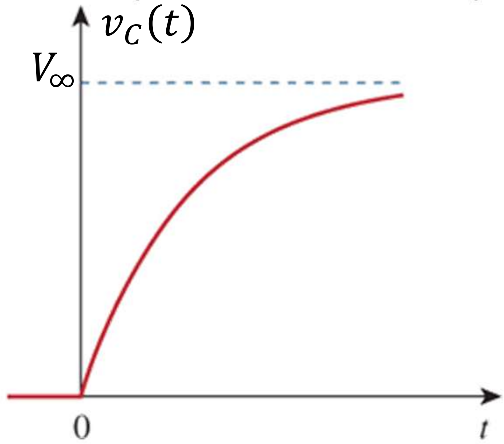
- Para determinar I_0 a equação de corrente $i(t) = I_0 e^{-\frac{1}{RC}t}$ será substituída na equação nodal do circuito.
  - $v_R(t) + v_C(t) = V_\infty$
- Para $t = 0$, tem-se:
  - $Ri(t = 0) + v_C(t = 0) = V_\infty$
  - $RI_0 e^{-\frac{1}{RC}0} + 0 = V_\infty$
  - $I_0 = \frac{V_\infty}{R} \rightarrow$ Como verificar se esse resultado é coerente?

2.3. Circuitos de Primeira Ordem Circuitos RC com fonte de alimentação

- Dada a equação nodal do circuito e o fato que $I_0 = \frac{V_\infty}{R}$, a tensão no capacitor em função do tempo pode ser expressa da seguinte forma:
  - $v_R(t) + v_C(t) = V_\infty$
  - $v_C(t) = V_\infty - Ri(t)$
  - $v_C(t) = V_\infty - R\frac{V_\infty}{R}e^{-\frac{1}{RC}t}$
  - $v_C(t) = V_\infty\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right)$

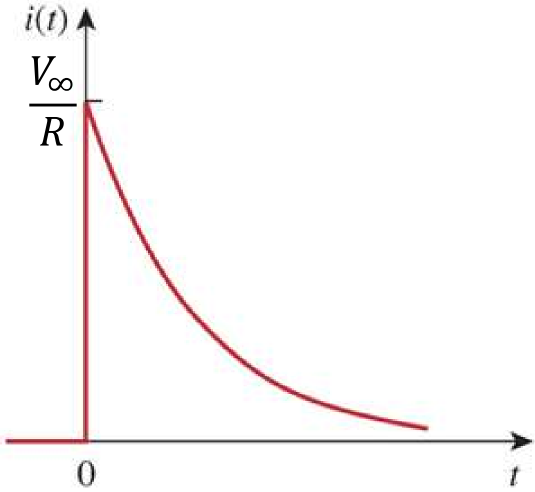
2.3. Circuitos de Primeira Ordem
Circuitos RC com fonte de alimentação

- Graficamente, tem-se o seguinte comportamento para a tensão no capacitor



2.3. Circuitos de Primeira Ordem
Circuitos RC com fonte de alimentação

- E para a corrente:



2.3. Circuitos de Primeira Ordem
Energia armazenada em um capacitor

- A energia, por definição, é a integral no tempo da potência $p(t)$, ou seja:
  - $E(t) = \int_{-\infty}^{t} p(\tau) d\tau$
- Em termo de energia elétrica $p(t) = v(t)i(t)$, ou seja, o produto da tensão pela corrente.
- Sabe-se ainda que no capacitor, tem-se que $i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$, logo:
  - $E(t) = \int_{-\infty}^{t} v(\tau)i(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} v(\tau)C\frac{dv(\tau)}{d\tau}d\tau$

2.3. Circuitos de Primeira Ordem
Energia armazenada em um capacitor

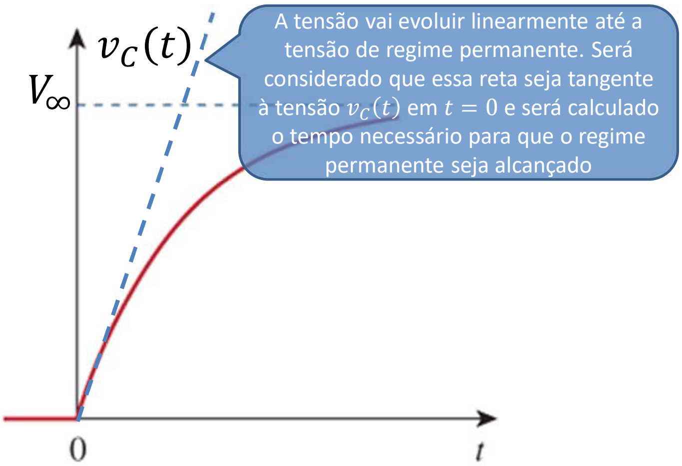
- Energia armazenada em um capacitor:
  - Desenvolvendo:
    - $E(t) = \int_{-\infty}^{t} v(\tau)C\frac{dv(\tau)}{d\tau}d\tau$
    - $E(t) = C\int_{v(-\infty)}^{v(t)} v(\tau)dv(\tau)$
    - $E(t) = C\int_{0}^{v(t)} v(\tau)dv(\tau)$
    - $E(t) = \frac{1}{2}Cv^2(t)$
  - Conclusão: A energia que o capacitor armazena (que por definição dependente historicamente da potência) pode ser determinada por meio da tensão instantânea no capacitor.

2.3. Circuitos de Primeira Ordem Constante de tempo

- A expressão da tensão é dada por $v_C(t) = V_\infty\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right)$, logo, somente quando $t \to \infty$ é que se tem a tensão de regime permanente $v_C(t \to \infty) = V_\infty$.
- Contudo, no âmbito da engenharia $t \to \infty$ não representa um valor de uso prático.

2.3. Circuitos de Primeira Ordem Constante de tempo

- Para encontrar um intervalo de tempo que possua essa característica será considerado que o sistema responde de forma linear.

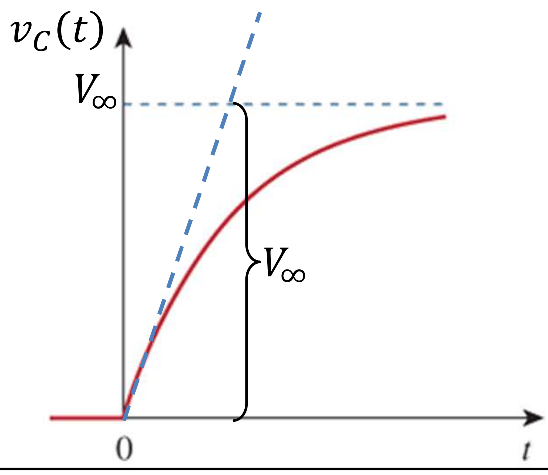


2.3. Circuitos de Primeira Ordem
Constante de tempo

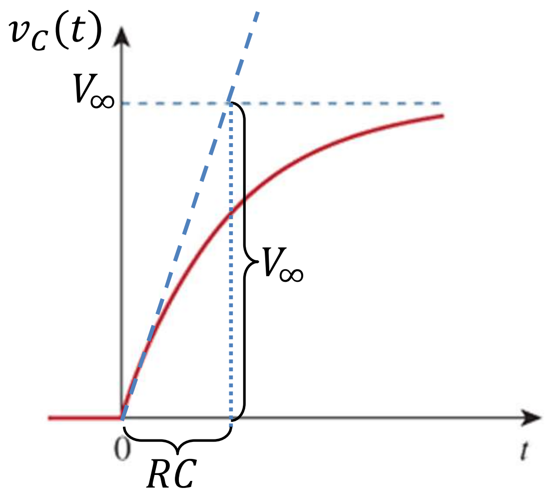
- Derivando $v_C(t)$ em função de t, tem-se:
  - $\frac{dv_C(t)}{dt} = \frac{d}{dt} V_\infty \left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right)$
  - $\frac{dv_C(t)}{dt} = \frac{V_\infty}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t}$
- Em $t = 0$, tem-se:
  - $\frac{dv_C(t)}{dt}(t = 0) = \frac{V_\infty}{RC}$
- Ou seja, em $t = 0$, a razão entre a tensão e o tempo será igual a $\frac{V_\infty}{RC}$

2.3. Circuitos de Primeira Ordem
Constante de tempo

- Assim, será possível determinar o tempo no qual a tensão atingiria o regime permanente se o comportamento fosse linear:



2.3. Circuitos de Primeira Ordem
Constante de tempo



2.3. Circuitos de Primeira Ordem
Constante de tempo

- Assim, em um tempo igual ao produto RC, o circuito alcançaria o regime permanente se o seu comportamento fosse linear.
- A esse valor, RC, dá-se o nome de constante de tempo τ o que permite a seguinte expressão equivalente:
  - $v_C(t) = V_\infty\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$
- Contudo, o circuito não responde linearmente e em $t = \tau$, a tensão no capacitor será igual a $V_\infty\left(1 - e^{-\frac{\tau}{\tau}}\right) = 0{,}632V_\infty$, ou seja, 63% da tensão de regime permanente.

2.3. Circuitos de Primeira Ordem Constante de tempo

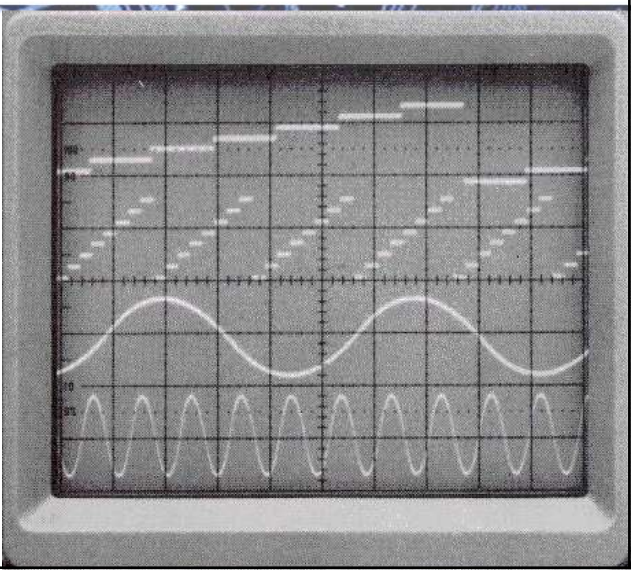
- Considerando que se admita uma tolerância de η %, será verificado quantos múltiplos da constante de tempo são necessário para que a tolerância seja alcançada:
  - $V_\infty(1-\eta) = V_\infty\left(1 - e^{-n\frac{\tau}{\tau}}\right)$
  - $\eta = e^{-n}$
  - $n = -\ln\eta$

2.3. Circuitos de Primeira Ordem Constante de tempo

- Para uma tolerância de $\eta = 1\%$, tem-se:
  - $n = -\ln 0.01 = 4.61$
  - Ou seja, considerando-se uma tolerância de 1%, pode-se aproximar a duração do transitório como sendo igual a 5 vezes a constante de tempo do circuito.
- Para uma tolerância de $\eta = 0.1\%$, 10 vezes menor do que anteriormente, tem-se:
  - $n = -\ln 0.001 = 6.91$
  - Ou seja, considerando-se uma tolerância de 0.1%, pode-se aproximar a duração do transitório como sendo igual a 7 vezes a constante de tempo do circuito.

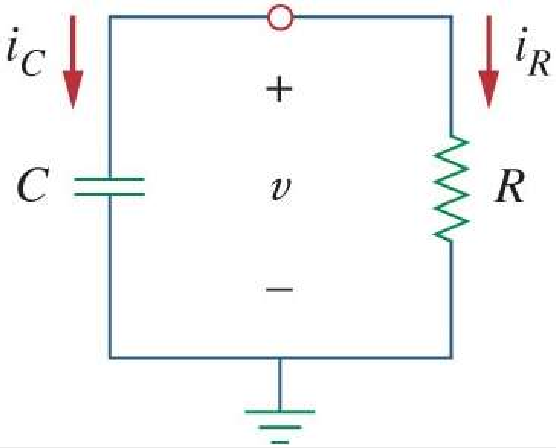
2.3. Circuitos de Primeira Ordem
Constante de tempo

- A tela de muitos osciloscópios (analógicos principalmente) possuem a indicação dos 63% da escala máxima.



2.3. Circuitos de Primeira Ordem
Circuitos RC sem fonte de alimentação

- Vamos considerar o seguinte circuito e supor que a tensão em $t = 0$ no capacitor é igual a V_0.



2.3. Circuitos de Primeira Ordem
Circuitos RC sem fonte de alimentação

- Aplicando a Lei de Kirchhoff das correntes, no nós superior tem-se:
  - $i_C(t) + i_R(t) = 0$
- Em função da tensão $v(t)$ essas correntes podem ser escritas da seguinte forma:
  - $i_C(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$ e $i_R(t) = \frac{v(t)}{R}$, portanto:
  - $C\frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{R} = 0$

2.3. Circuitos de Primeira Ordem
Circuitos RC sem fonte de alimentação

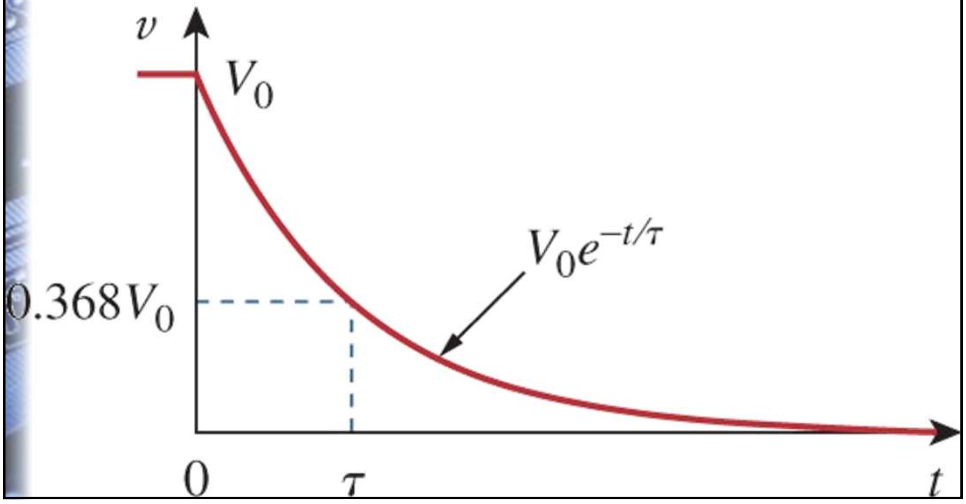
- Desenvolvendo, tem-se:
  - $C\frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{R} = 0$
  - $C\frac{dv(t)}{dt} = -\frac{v(t)}{R}$
  - $\frac{dv(t)}{v(t)} = -\frac{dt}{RC}$

2.3. Circuitos de Primeira Ordem
Circuitos RC sem fonte de alimentação

- Integrando ambos os lados da igualdade:
  - $\int \frac{dv(t)}{v(t)} = -\frac{1}{RC} \int dt$
  - $\ln(v(t)) + k_1 = -\frac{1}{RC} t + k_2$
  - $\ln(v(t)) = -\frac{1}{RC} t + k$
  - $v(t) = e^{-\frac{1}{RC} t + k}$
  - $v(t) = e^{-\frac{1}{RC} t} e^k$
  - $v(t) = V e^{-\frac{1}{RC} t}$
- Como em $t = 0$ no capacitor é igual a V_0 tem-se que $V = V_0$, logo:
  - $v(t) = V_0 e^{-\frac{1}{RC} t}$

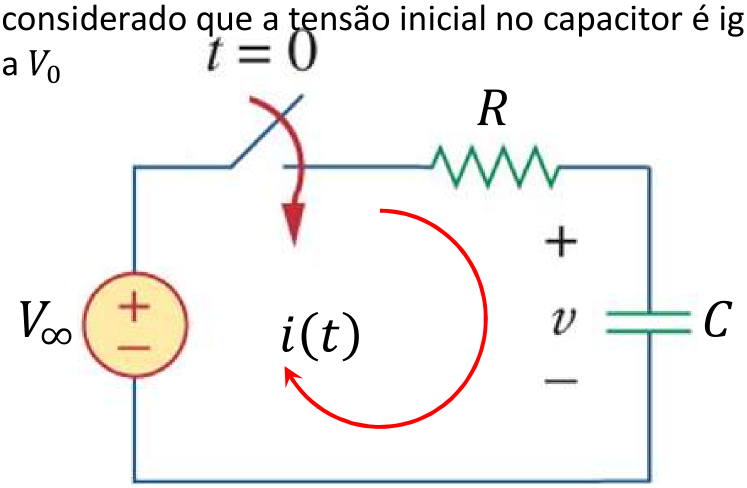
2.3. Circuitos de Primeira Ordem
Circuitos RC sem fonte de alimentação

- Graficamente, tem-se:



2.3. Circuitos de Primeira Ordem
Circuitos RC Caso Geral

- Vamos considerar o seguinte circuito, contudo será considerado que a tensão inicial no capacitor é igual a V_0



2.3. Circuitos de Primeira Ordem
Circuitos RC Caso Geral

- A equação de malha para $t \geq 0$ resulta em:
  - $v_R(t) + v_C(t) = V_\infty$
  - $Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau + v_C(t=0) = V_\infty$
- Derivando em função de t, tem-se:
  - $R\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}i(t) = 0$
  - $R\frac{di(t)}{dt} = -\frac{1}{C}i(t)$
  - $\frac{di(t)}{i(t)} = -\frac{1}{RC}dt$

2.3. Circuitos de Primeira Ordem Circuitos RC Caso Geral

- Integrando ambos os lados da equação, tem-se:
  - $\int \frac{di(t)}{i(t)} = -\frac{1}{RC}\int dt$
  - $\ln\big(i(t)\big) + k_1 = -\frac{1}{RC}t + k_2$
  - $\ln\big(i(t)\big) = -\frac{1}{RC}t + k$
  - $i(t) = e^{-\frac{1}{RC}t+k}$
  - $i(t) = e^{-\frac{1}{RC}t}e^{k}$
  - $i(t) = I_0 e^{-\frac{1}{RC}t}$
- a constante I_0 deve ser determinada em função das condições iniciais do circuito.

2.3. Circuitos de Primeira Ordem Circuitos RC Caso Geral

- Para determinar I_0 a equação de corrente $i(t) = I_0 e^{-\frac{1}{RC}t}$ será substituída na equação nodal do circuito.
  - $v_R(t) + v_C(t) = V_\infty$
- Para $t = 0$, tem-se:
  - $Ri(t=0) + v_C(t=0) = V_\infty$
  - $RI_0 e^{-\frac{1}{RC}0} + V_0 = V_\infty$
  - $I_0 = \frac{V_\infty - V_0}{R}$

2.3. Circuitos de Primeira Ordem
Circuitos RC Caso Geral

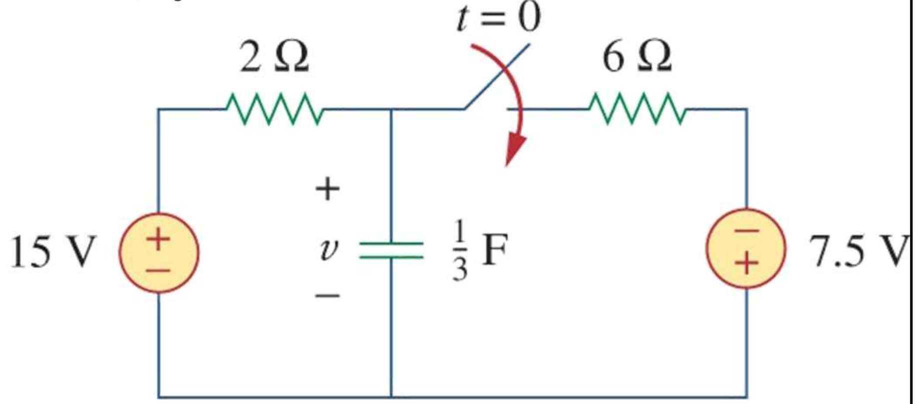
- Dada a equação nodal do circuito e o fato que $I_0 = \frac{V_\infty - V_0}{R}$, a tensão no capacitor em função do tempo pode ser expressa da seguinte forma:
  - $v_R(t) + v_C(t) = V_\infty$
  - $v_C(t) = V_\infty - Ri(t)$
  - $v_C(t) = V_\infty - R\frac{V_\infty - V_0}{R}e^{-\frac{1}{RC}t}$
  - $v_C(t) = V_\infty - (V_\infty - V_0)e^{-\frac{1}{RC}t}$
  - $v_C(t) = V_\infty\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right) + V_0e^{-\frac{1}{RC}t}$

2.3. Circuitos de Primeira Ordem
Circuitos RC Caso Geral

- Assim, a tensão em um capacitor pode ser descrita em função das sua condições em $t = 0$ e de regime permanente quando $t \to \infty$, bem como em função do resistência equivalente nos terminais do capacitor.
- $v_C(t) = V_\infty\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right) + V_0e^{-\frac{1}{RC}t}$

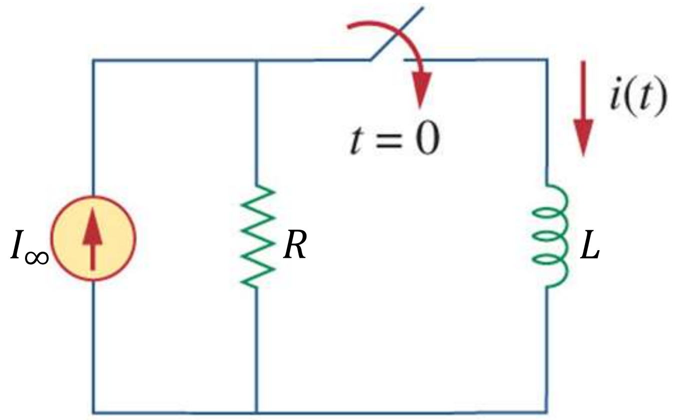
2.3. Circuitos de Primeira Ordem
Circuitos RC Caso Geral

- Determinar a tensão e a corrente no capacitor em função de t



2.3. Circuitos de Primeira Ordem
Circuitos RL com fonte de alimentação

- Vamos considerar o circuito abaixo onde o indutor tem em $t = 0$ uma corrente nula.



2.3. Circuitos de Primeira Ordem
Circuitos RL com fonte de alimentação

- A equação nodal para $t \geq 0$ resulta em:
  - $i_R(t) + i_C(t) = I_\infty$
  - $\frac{1}{R}v(t) + \frac{1}{L}\int_0^t v(\tau)d\tau + i_L(t=0) = I_\infty$
- Derivando em função de t, tem-se:
  - $\frac{1}{R}\frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{L}v(t) = 0$
  - $\frac{1}{R}\frac{dv(t)}{dt} = -\frac{1}{L}v(t)$
  - $\frac{dv(t)}{v(t)} = -\frac{R}{L}dt$

2.3. Circuitos de Primeira Ordem
Circuitos RL com fonte de alimentação

- Integrando ambos os lados da equação, tem-se:
  - $\int \frac{dv(t)}{v(t)} = -\frac{R}{L}\int dt$
  - $\ln\big(v(t)\big) + k_1 = -\frac{R}{L}t + k_2$
  - $\ln\big(v(t)\big) = -\frac{R}{L}t + k$
  - $v(t) = e^{-\frac{R}{L}t+k}$
  - $v(t) = e^{-\frac{R}{L}t}e^k$
  - $v(t) = V_0 e^{-\frac{R}{L}t}$
- a constante V_0 deve ser determinada em função das condições iniciais do circuito.

2.3. Circuitos de Primeira Ordem
Circuitos RL com fonte de alimentação

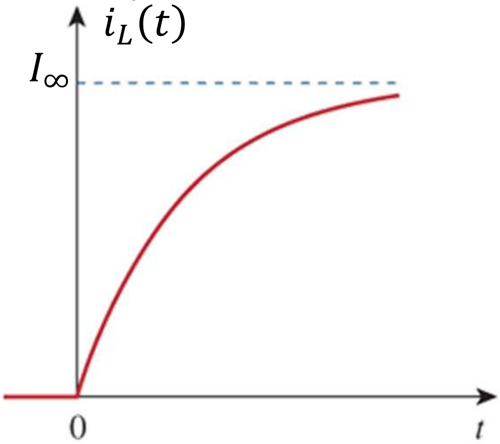
- Para determinar V_0 a equação de tensão $v(t) = V_0 e^{-\frac{R}{L}t}$ será substituída na equação nodal do circuito.
  - $i_R(t) + i_L(t) = I_\infty$
- Para $t = 0$, tem-se:
  - $\frac{1}{R} v(t = 0) + i_L(t = 0) = I_\infty$
  - $\frac{1}{R} V_0 e^{-\frac{R}{L}0} + 0 = I_\infty$
  - $V_0 = RI_\infty$

2.3. Circuitos de Primeira Ordem
Circuitos RL com fonte de alimentação

- Dada a equação nodal do circuito e o fato que $V_0 = RI_\infty$, a corrente no indutor em função do tempo pode ser expressa da seguinte forma:
  - $i_R(t) + i_L(t) = I_\infty$
  - $i_L(t) = I_\infty - \frac{1}{R} v(t)$
  - $i_L(t) = I_\infty - \frac{1}{R} RI_\infty e^{-\frac{R}{L}0}$
  - $i_L(t) = I_\infty\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$

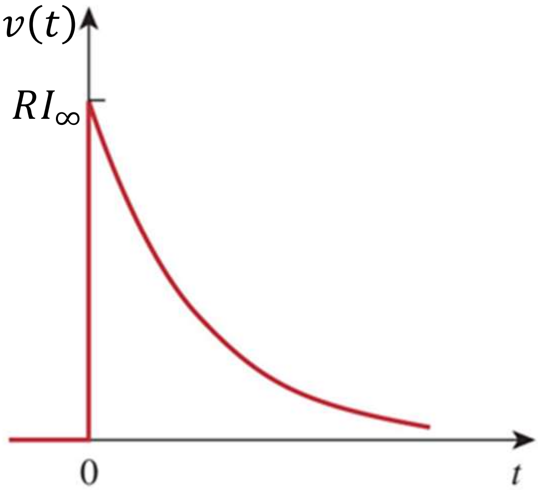
2.3. Circuitos de Primeira Ordem
Circuitos RL com fonte de alimentação

- Graficamente, tem-se o seguinte comportamento para a corrente no indutor



2.3. Circuitos de Primeira Ordem
Circuitos RL com fonte de alimentação

- E para a tensão:



2.3. Circuitos de Primeira Ordem Circuitos RL – Constante de tempo

- Em um circuito RL a constante do tempo será dada pela razão entre a indutância e a resistência:
  - $\tau = \frac{L}{R}$

2.3. Circuitos de Primeira Ordem Energia armazenada em um indutor

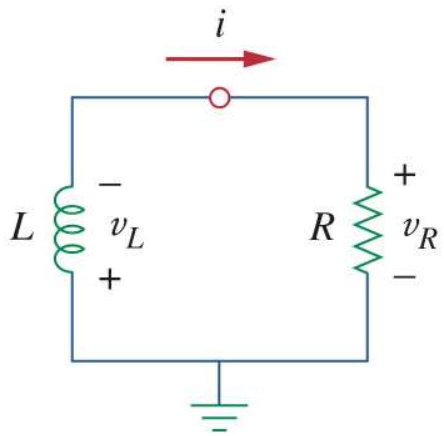
- A energia, por definição, é a integral no tempo da potência $p(t)$, ou seja:
  - $E(t) = \int_{-\infty}^{t} p(\tau)d\tau$
- Em termo de energia elétrica $p(t) = v(t)i(t)$, ou seja, o produto da tensão pela corrente.
- Sabe-se ainda que no indutor, tem-se que $v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$, logo:
  - $E(t) = \int_{-\infty}^{t} v(\tau)i(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} i(\tau)L\frac{di(\tau)}{d\tau}d\tau$

2.3. Circuitos de Primeira Ordem
Energia armazenada em um indutor

- Desenvolvendo:
  - $E(t) = \int_{-\infty}^{t} i(\tau) L \frac{di(\tau)}{d\tau} d\tau$
  - $E(t) = L \int_{i(-\infty)}^{i(t)} i(\tau) di(\tau)$
  - $E(t) = L \int_{0}^{i(t)} i(\tau) di(\tau)$
  - $E(t) = \frac{1}{2} L i^2(t)$
- Conclusão: A energia que o indutor armazena (que por definição dependente historicamente da potência) pode ser determinada por meio da corrente instantânea no indutor.

2.3. Circuitos de Primeira Ordem
Circuitos RL sem fonte de alimentação

- Considerando que a corrente indicada seja igual a I_0 em $t = 0$.



2.3. Circuitos de Primeira Ordem
Circuitos RL sem fonte de alimentação

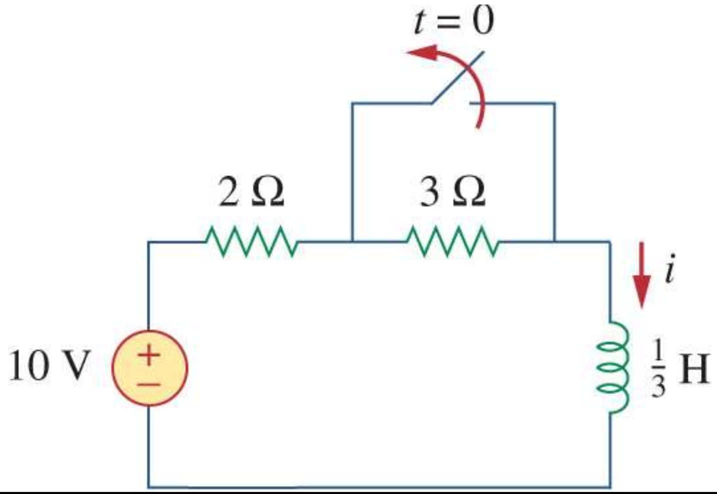
- Do circuito anterior tem-se a seguinte equação de malha:
  - $v_R(t) + v_L(t) = 0$
  - $Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} = 0$
  - $L\frac{di(t)}{dt} = -Ri(t)$
  - $\frac{di(t)}{i(t)} = -\frac{R}{L}dt$ Resolvendo da mesma forma como feito anteriormente:
  - $i(t) = I_0e^{-\frac{R}{L}t}$

2.3. Circuitos de Primeira Ordem
Circuitos RL – Caso Geral

- O caso geral desenvolvido para circuito RC mostrou que a resposta encontrada é resultado da "soma" (aplicação do teorema da superposição de resposta) dos casos com e sem fonte de alimentação.
- Nos circuitos RL não é diferente. Assim, o caso geral para circuitos RL é:
- $i_L(t) = I_\infty\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) + I_0e^{-\frac{R}{L}t}$

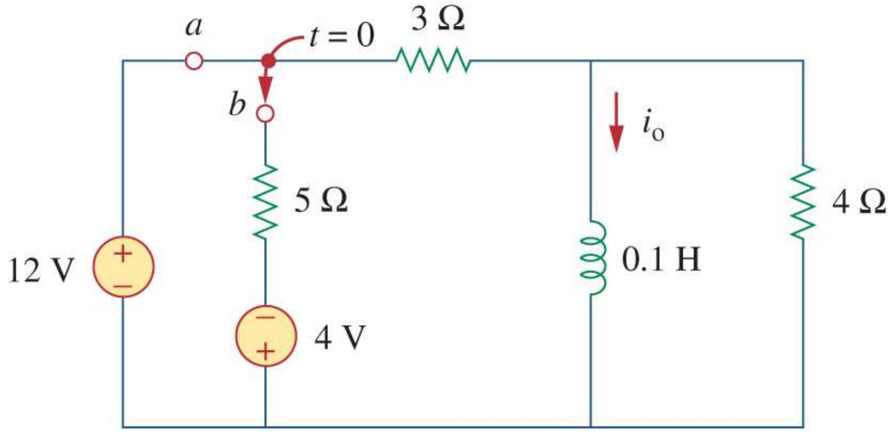
2.3. Circuitos de Primeira Ordem
Circuitos RL – Caso Geral

- Determine a corrente e a tensão no indutor:



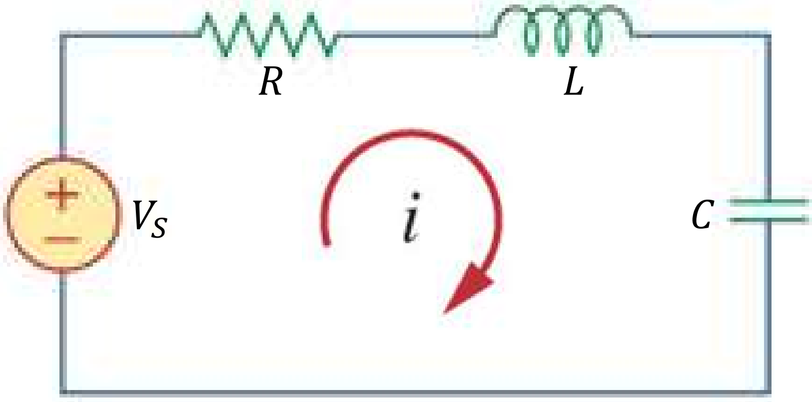
2.3. Circuitos de Primeira Ordem
Circuitos RL – Caso Geral

- Determine a corrente e a tensão no indutor:



2.4. Circuitos de Segunda Ordem

- Vamos considerar um circuito RLC série:



2.4. Circuitos de Segunda Ordem

- A equação de malha do circuito será dada por:
  - $v_R(t) + v_L(t) + v_C(t) = V_s$
  - $Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau + v_C(0) = V_s$
- Derivando em função de t, tem-se:
  - $L\frac{d^2i(t)}{dt^2} + R\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}i(t) = 0$
- Definindo $I = \frac{di(t)}{dt}$, tem-se a seguinte equação característica:
  - $LI^2 + RI + \frac{1}{C} = 0$

2.4. Circuitos de Segunda Ordem

- A equação característica $LI^2 + RI + \frac{1}{C} = 0$ possui as seguintes raízes (ou polos):
  - $p_{1,2} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4\frac{L}{C}}}{2L}$
- Assim, tem-se 3 possibilidades:
  - Raízes reais e distintas;
  - Raízes reais e iguais;
  - Raízes complexas e conjugadas.
- Cada uma dessas possibilidades resulta em um comportamento distinto.

2.4. Circuitos de Segunda Ordem Resposta amortecida

- A resposta do sistema será do tipo amortecida quando as raízes forem reais e distintas, ou seja, quando
- $R^2 > 4\frac{L}{C}$ ou $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$
- Nessas condições tem-se a seguinte resposta
  - $I = p_a, a = \{1,2\}$
  - $I = p_a I^0$
  - $\frac{di(t)}{dt} = p_a i(t)$

2.4. Circuitos de Segunda Ordem Resposta amortecida

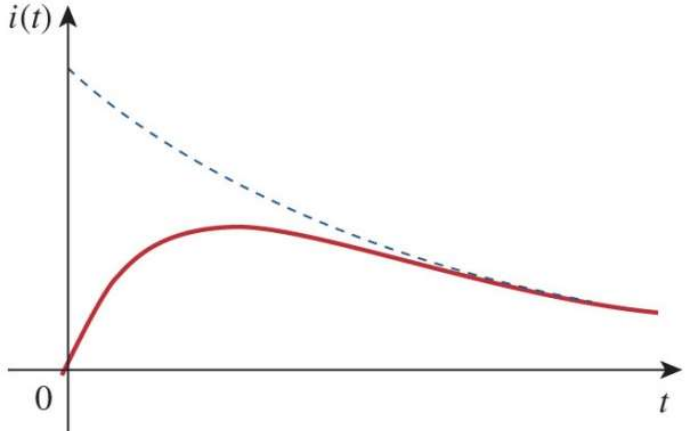
- Resolvendo $\frac{di(t)}{dt} = p_a i(t)$, tem-se:
  - $i(t) = I_a e^{p_a t}$
- Como o sistema possui duas resposta, pela aplicação do teorema da superposição de respostas, tem-se:
  - $i(t) = I_1 e^{p_1 t} + I_2 e^{p_2 t}$
- onde I_1 e I_2 são constantes de integração e devem ser determinadas em função das condições iniciais do circuito.

2.4. Circuitos de Segunda Ordem Resposta amortecida

- Os polos do circuito serão dados por:
  - $p_{1,2} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4\frac{L}{C}}}{2L}$
- É possível observar que na condição de resposta amortecida, ou seja, $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, os polos serão necessariamente negativos.
- Assim, a resposta será estável (como também será estável nos demais tipos de respostas)

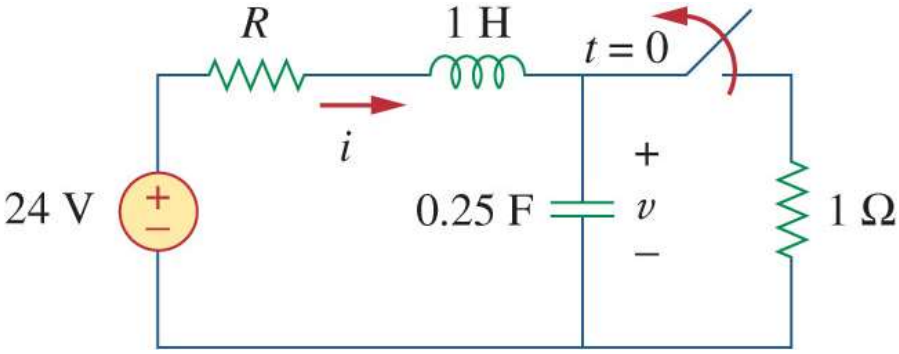
2.4. Circuitos de Segunda Ordem
Resposta amortecida

- Graficamente, uma possibilidade para a resposta pode ser dada por:



2.4. Circuitos de Segunda Ordem
Resposta amortecida

- No circuito abaixo determine as grandezas indicadas considerando que $R = 5\Omega$



2.4. Circuitos de Segunda Ordem Resposta subamortecida

- A resposta do sistema será do tipo subamortecida quando as raízes forem complexas e conjugadas, ou seja, quando
- $R^2 < 4\frac{L}{C}$ ou $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$
- Nessas condições tem-se os seguintes polos:
  - $p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$
  - $p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = \alpha \pm j\omega$

2.4. Circuitos de Segunda Ordem Resposta subamortecida

- Assim:
  - $\alpha = -\frac{R}{2L}$
  - $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$
- O fato dos polos serem complexos e conjugados conduz, necessariamente, à afirmação de que os polos são distintos.
- Assim, a resposta ainda será do seguinte tipo:
  - $i(t) = I_1 e^{p_1 t} + I_2 e^{p_2 t}$
  - $p_1 = \alpha + j\omega$ e $p_2 = \alpha - j\omega$

2.4. Circuitos de Segunda Ordem Resposta subamortecida

- Desenvolvendo, tem-se:
  - $i(t) = I_1 e^{(\alpha + j\omega)t} + I_2 e^{(\alpha - j\omega)t}$
  - $i(t) = I_1 e^{\alpha t} e^{j\omega t} + I_2 e^{\alpha t} e^{-j\omega t}$
  - $i(t) = \left(I_1 e^{j\omega t} + I_2 e^{-j\omega t}\right) e^{\alpha t}$
- Lembrando da Igualdade de Euler
  - $e^{\pm j\omega t} = \cos(\omega t) \pm j \sin(\omega t)$
  - $i(t) = \begin{pmatrix} I_1(\cos(\omega t) + j\sin(\omega t)) + \cdots \\ \cdots + I_2(\cos(\omega t) - j\sin(\omega t)) \end{pmatrix} e^{\alpha t}$

2.4. Circuitos de Segunda Ordem Resposta subamortecida

-
  - $i(t) = \begin{pmatrix} I_1(\cos(\omega t) + j\sin(\omega t)) + \cdots \\ \cdots + I_2(\cos(\omega t) - j\sin(\omega t)) \end{pmatrix} e^{\alpha t}$
  - $i(t) = \big((I_1 + I_2)\cos(\omega t) + j(I_1 - I_2)\sin(\omega t)\big) e^{\alpha t}$
- A resposta em questão se refere a um sistema físico real, ou seja, a resposta deve ser real de forma que a parte imaginária da resposta acima deve ser nula. Assim,
  - $I_1 - I_2 = 0$ logo $I_1 = I_2$
- A possibilidade acima conduz a uma resposta que não é capaz de satisfazer plenamente às condições iniciais!

2.4. Circuitos de Segunda Ordem Resposta subamortecida

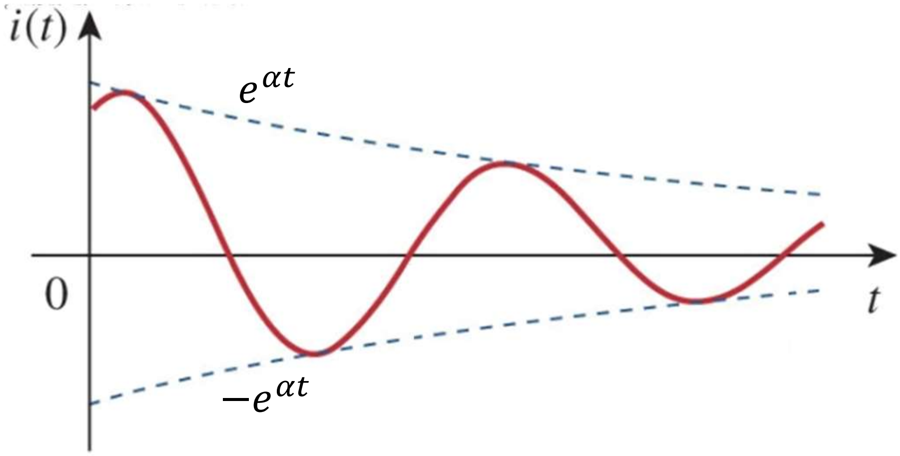
- Outra possibilidade que satisfaz a condição de que a parte imaginária seja nula é $I_1 - I_2$ sendo igual a um número imaginário (com parte real nula)
- é de essas constante serem complexas e conjugadas. Assim:
  - $I_1 = I_\mathrm{A} + jI_\mathrm{B}$ e $I_2 = I_\mathrm{A} - jI_\mathrm{B}$
- Essa hipótese conduz aos seguintes resultados:
  - $I_1 - I_2 = j2I_\mathrm{B} = j(-I_y)$
  - $I_1 + I_2 = 2I_\mathrm{A} = I_x$

2.4. Circuitos de Segunda Ordem Resposta subamortecida

- Portanto
  - $i(t) = \left(I_x \cos(\omega t) + j\left(-jI_y\right) \sin(\omega t)\right)e^{\alpha t}$
  - $i(t) = \left(I_x \cos(\omega t) + I_y \sin(\omega t)\right)e^{\alpha t}$
- As constantes I_x e I_y são calculadas mediante às condições iniciais do circuito.
- Outra forma de representar a resposta acima será:
  - $i(t) = I \cos(\omega t - \theta)\, e^{\alpha t}$ onde,
  - $I = \sqrt{{I_x}^2 + {I_y}^2}$ e $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{I_y}{I_x}\right)$

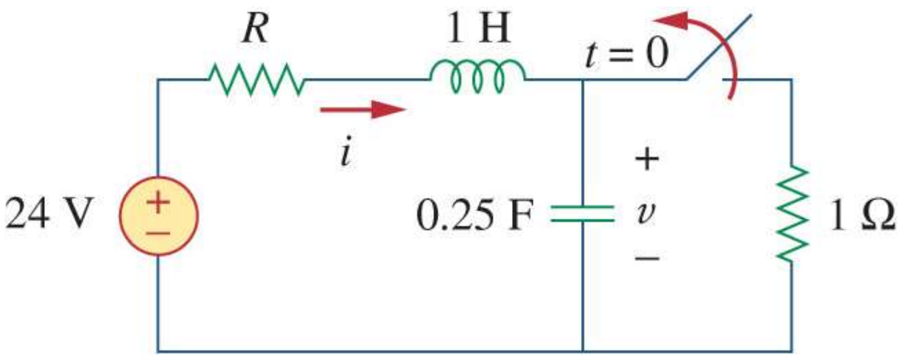
2.4. Circuitos de Segunda Ordem Resposta subamortecida

- Graficamente:



2.4. Circuitos de Segunda Ordem Resposta subamortecida

- No circuito abaixo determine as grandezas indicadas considerando que $R = 1\Omega$



2.4. Circuitos de Segunda Ordem Resposta criticamente amortecida

- A resposta do sistema será do tipo criticamente amortecida quando as raízes iguais, ou seja
- $R^2 = 4\frac{L}{C}$ ou $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$
- Nessas condições tem-se os seguintes polos:
  - $p_{1,2} = -\frac{R}{2L}$
  - $i(t) = I_1 e^{pt} + I_2 e^{pt} = I e^{pt}$
- A resposta anterior não é capaz de atender às condições iniciais.

2.4. Circuitos de Segunda Ordem Resposta criticamente amortecida

- O fato da equação diferencial possuir dois polos idênticos permite que a mesma seja escrita da seguinte forma:
  - $\frac{d^2 i(t)}{dt^2} - 2p\frac{di(t)}{dt} + p^2 i(t) = 0$
  - $\frac{d^2 i(t)}{dt^2} - p\frac{di(t)}{dt} - p\frac{di(t)}{dt} + p^2 i(t) = 0$
  - $\frac{d}{dt}\left(\frac{di(t)}{dt} - pi(t)\right) + p\left(\frac{di(t)}{dt} - pi(t)\right) = 0$

2.4. Circuitos de Segunda Ordem Resposta criticamente amortecida

- Definindo:
  - $f = \frac{di(t)}{dt} - pi(t)$
- Tem-se:
  - $\frac{df(t)}{dt} - pf(t) = 0$, Resolvendo essa equação diferencial, tem-se:
  - $f(t) = Fe^{pt}$

2.4. Circuitos de Segunda Ordem Resposta criticamente amortecida

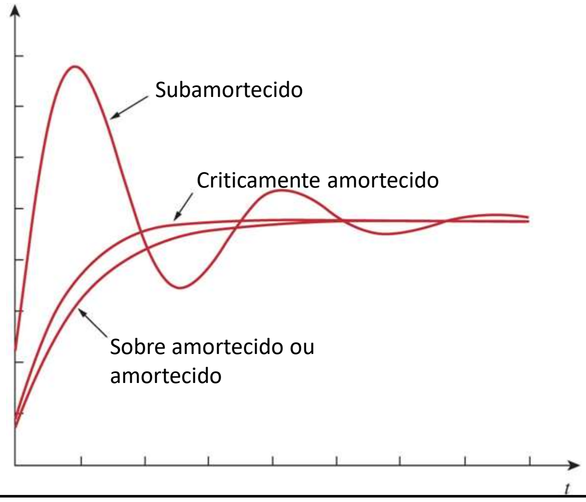
- Substituindo $f(t)$ na equação abaixo e desenvolvendo, tem-se:
  - $f = \frac{di(t)}{dt} - pi(t)$
  - $Fe^{pt} = \frac{di(t)}{dt} - pi(t)$
  - $F = e^{-pt}\frac{di(t)}{dt} - pi(t)e^{-pt}$
  - $F = e^{-pt}\frac{di(t)}{dt} - i(t)pe^{-p}$
  - $F = \frac{d}{dt}(i(t)pe^{-pt})$

2.4. Circuitos de Segunda Ordem Resposta criticamente amortecida

- Integrando ambos os termos, tem-se:
  - $F = \frac{d}{dt}(i(t)pe^{-p})$
  - $Ft + k_1 = i(t)pe^{-p} + k_2$
  - $Ft + k = i(t)pe^{-pt}$
- Portanto,
  - $i(t) = e^{pt}(I_1 + I_2t)$

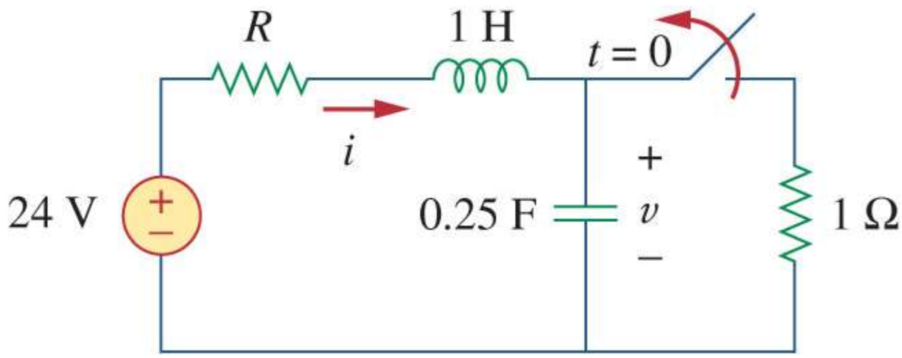
2.4. Circuitos de Segunda Ordem Resposta criticamente amortecida

- Graficamente, tem-se o seguinte comparativo:



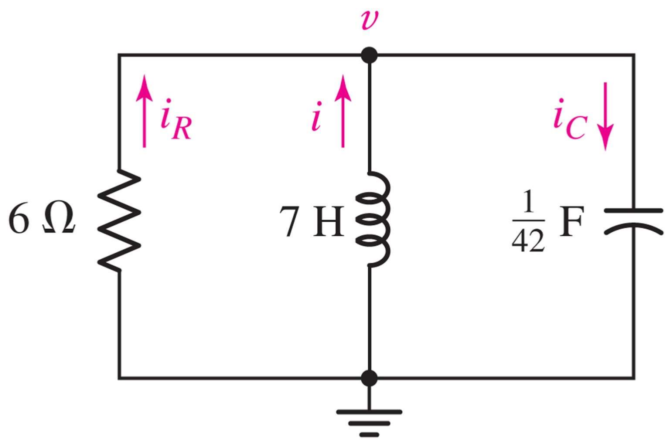
2.4. Circuitos de Segunda Ordem Resposta criticamente amortecida

- No circuito abaixo determine as grandezas indicadas considerando que $R = 4\Omega$



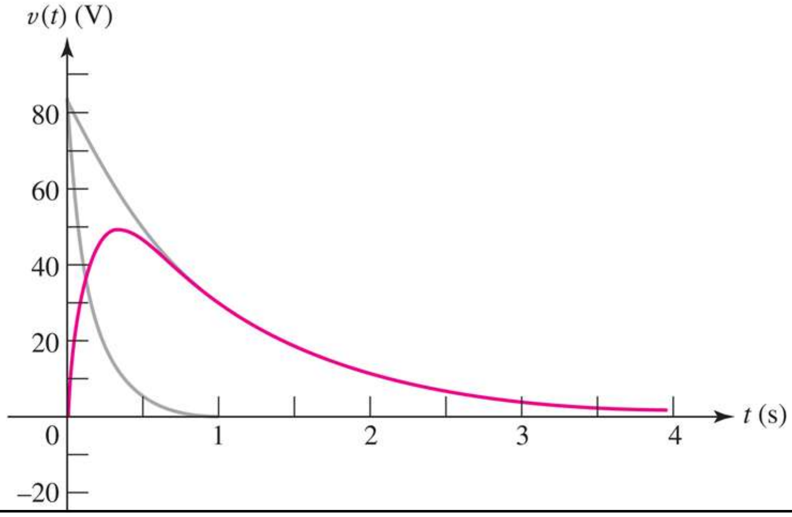
2.5. Circuitos de Segunda Ordem Exemplos

- Considere que no circuitos abaixo tem-se que $i(0) = 10$ A e $v(0) = 0$ V.



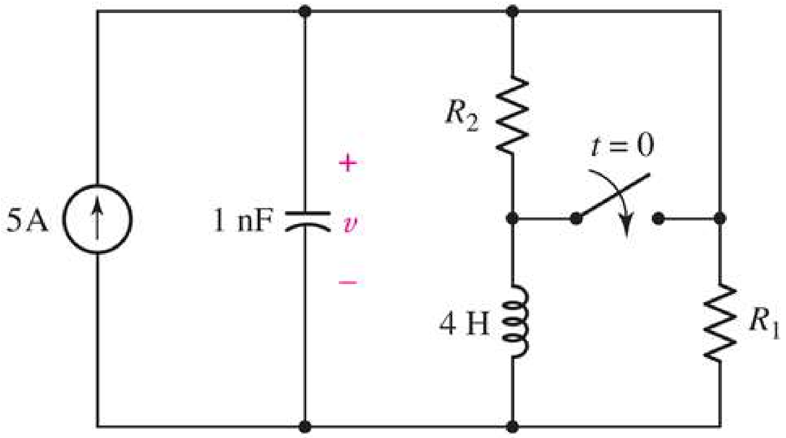
2.5. Circuitos de Segunda Ordem Exemplos

- A análise do circuito anterior deve resultar na seguinte tensão.



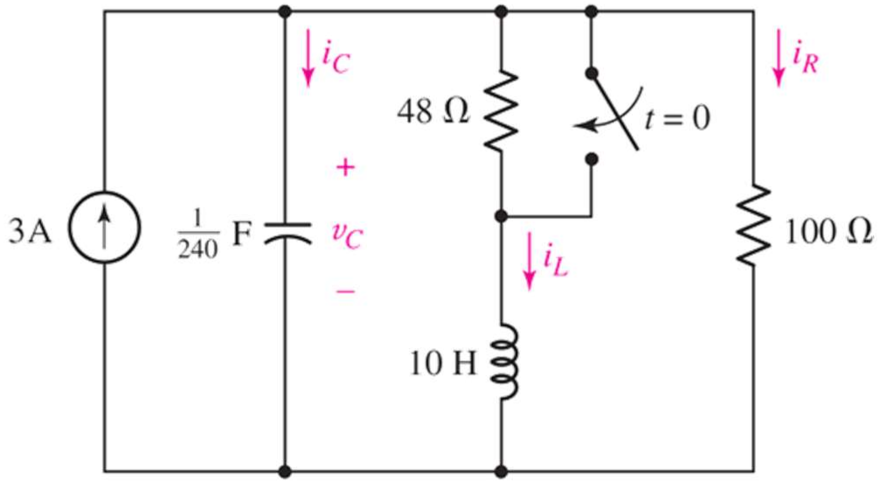
2.5. Circuitos de Segunda Ordem Exemplos

- Determine R_1 tal que o circuito seja criticamente amortecido para $t > 0$, bem como encontre R_2 que resulte em $v(0) = 2\text{V}$. Nessas condições encontre $v(t)$.



2.5. Circuitos de Segunda Ordem Exemplos

- Determine as grandezas indicadas para $t > 0$



2.5. Circuitos de Segunda Ordem Exemplos

- A corrente $i_L(t)$ tem o seguinte comportamento: