2021-1, "STATPHYS", AULA 26

OBJETIVOS: MAIS DETALHES DO ISING 1D

* CORRELAÇÕES ESPACIAIS

VAMOS CALCULAR AS CORRELAÇÕES ESPACIAIS NO ANEL 1D DE ISING USANDO A MATRIZ TRANSFERÊNCIA, QUE É ESSENCIALMENTE O ÚNICO MÉTODO DISPONÍVEL QUANDO $H \neq 0$.

ESPECIFICAMENTE, VAMOS CALCULAR A <u>FUNÇÃO DE CORRELAÇÃO DE DOIS PONTOS</u>,

$$\boxed{G(i,j) = \langle S_i S_j \rangle - \langle S_i \rangle \langle S_j \rangle = \langle (S_i - \langle S_i \rangle)(S_j - \langle S_j \rangle) \rangle}$$

E COMEÇAREMOS COM $\langle S_i \rangle$.

LEMBRANDO QUE

$$\boxed{\mathcal{H}(\vec{S}) = -J\sum_{i=1}^{N} S_i \cdot S_{i+1} - H\sum_{i=1}^{N} S_i \,,\quad \boxed{S_{N+1}=S_1}}\,,$$

E

$$\boxed{T = \begin{pmatrix} e^{\beta J+\beta H} & e^{-\beta J} \\ e^{-\beta J} & e^{\beta J-\beta H} \end{pmatrix}}\,,$$

$$\langle S_i \rangle = \frac{\sum_{\vec{S}} S_i e^{-\beta\mathcal{H}(\vec{S})}}{\underbrace{\sum_{\vec{S}} e^{-\beta\mathcal{H}(\vec{S})}}_{=Z}} =$$

$$= \frac{1}{Z}\sum_{S_1}\cdots\sum_{S_{i-1}}\sum_{S_i}\sum_{S_{i+1}}\cdots\sum_{S_N} S_i e^{-\beta\mathcal{H}(\vec{S})} =$$

$$= \frac{1}{Z}\sum_{S_1}\cdots\sum_{S_{i-1}}\sum_{S_{i+1}}\cdots\sum_{S_N}\left\{\sum_{S_i} S_i e^{-\beta\mathcal{H}(\vec{S})}\right\}.$$

MAS JÁ VIMOS QUE

$$\boxed{e^{-\beta\mathcal{H}(\vec{S})} = T_{S_1S_2}\cdot T_{S_2S_3}\cdots T_{S_{N-1}S_N}}\cdot T_{S_NS_1}$$

ASSIM, VAMOS ANALISAR

$$\boxed{\sum_{S_i} S_i \, T_{S_{i-1}S_i} \cdot T_{S_i S_{i+1}} \equiv Q_{S_{i-1}S_{i+1}}} .$$

SABEMOS QUE

$$\boxed{(ABC)_{ij} = \sum_{k,l} A_{ik} B_{kl} C_{lj}} .$$

SE $B_{kl} = k \cdot \delta_{k,l}$ (POIS $S_i \in \{-1,+1\}$), IDENTIFICAMOS Q! QUEM FAZ O PAPEL DE B (NOTE QUE $A=C=T$) É

$$\boxed{\sigma_z = \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} .$$

ASSIM, $\boxed{Q = T \cdot \sigma_z \cdot T}$.

RETORNANDO AO OBJETIVO,

$$\langle S_i \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\{s\}}^{i} T_{S_1 S_2} \ldots T_{S_{i-2} S_{i-1}} \, Q_{S_{i-1} S_{i+1}} \cdot T_{S_{i+1} S_{i+2}} \ldots T_{S_N S_1} =$$

$$= \frac{1}{Z} \sum_{s_1} \left(T^{i-2} Q T^{N-i}\right)_{s_1 s_1}$$

$$= \frac{1}{Z} \mathrm{Tr}\left(T^{i-2} Q T^{N-1}\right) = \frac{1}{Z} \mathrm{Tr}\left(T^{N-2} Q\right) =$$

$$= \frac{1}{Z} \mathrm{Tr}\left[T^{N-2}\left(T \sigma_z T\right)\right]$$

NÃO DEPENDE DE i

$$\therefore \boxed{\langle s_i \rangle = \frac{1}{Z} \mathrm{Tr}\left(\sigma_z T^N\right)} .$$

PODEMOS AVANÇAR? SIM! LEMBREMOS QUE

COLUNAS

$$M = \left(u_+ \;\; u_- \right)$$

É A MATRIZ TAL QUE $M^{-1} T M = D$, POIS

$$\boxed{T u_\pm = \lambda_\pm u_\pm} .$$

$$\langle s_i \rangle = \frac{1}{Z} \mathrm{Tr}\left(\overbrace{MM^{-1}}^{I} \sigma_z \overbrace{MM^{-1}}^{I} T^N\right) =$$

$$= \frac{1}{Z} \mathrm{Tr}\left[\underbrace{\left(M^{-1} \sigma_z M\right)}_{\equiv P}\left(M^{-1} T^N M\right)\right] = \frac{1}{Z} \mathrm{Tr}\left(P D^N\right) .$$

SE

$$P \equiv \begin{pmatrix} \ell & g \\ f & k \end{pmatrix},$$

ONDE ℓ, f, g E k SÃO FUNÇÕES DE β, J E H QUE PODERIAM SER OBTIDAS EXPLICITAMENTE,

$$\langle S_i \rangle = \frac{1}{Z} \mathrm{TR}(PD^N) =$$

$$= \frac{1}{\lambda_+^N + \lambda_-^N} \mathrm{TR}\left[\begin{pmatrix} \ell & g \\ f & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_+^N & 0 \\ 0 & \lambda_-^N \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \frac{\ell \cdot \lambda_+^N + k\lambda_-^N}{\lambda_+^N + \lambda_-^N} = \frac{\ell + k(\lambda_-/\lambda_+)^N}{1 + (\lambda_-/\lambda_+)^N} \sim \ell \, .$$

NESTE MOMENTO, É MAIS INSTRUTIVO OBTER $\langle S_i S_j \rangle$ DO QUE OBTER UMA EXPRESSÃO EXPLÍCITA PARA ℓ. NA PASSAGEM DE p.3 PARA p.4, VIMOS QUE $\langle S_i \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{S_1} (T^{i-2} Q T^{N-i})_{S_1 S_1}$.

$$\langle S_i S_j \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{S_1} \left(T^{i-2} Q\, T^{j-i-2} Q\, T^{N-j} \right)_{S_1 S_1} =$$

$$= \frac{1}{Z} \mathrm{TR} \left(T^{i-1} \sigma_z\, T^{j-i} \sigma_z\, T^{N-j+1} \right)$$

$$\therefore \boxed{\langle S_i S_j \rangle = \frac{1}{Z} \mathrm{TR} \left(T^{N-(j-i)} \sigma_z\, T^{j-i} \sigma_z \right.}$$

SÓ DEPENDE DE $j-i$, $j>i$.

SE $\boxed{r \equiv j-i}$, E NOVAMENTE USANDO

$$P = M^{-1} \sigma_z M,$$

$$\langle S_i S_j \rangle = \frac{1}{Z} \mathrm{TR} \left(D^{N-r} P\, D^{r} P \right) =$$

$$= \frac{1}{Z} \mathrm{TR} \left[\begin{pmatrix} \lambda_+^{N-r} & 0 \\ 0 & \lambda_-^{N-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell & g \\ f & K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_+^{r} & 0 \\ 0 & \lambda_-^{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell & g \\ f & K \end{pmatrix} \right].$$

O CÁLCULO É POSSÍVEL, MAS CHATO.

SIMPLIFICANDO ASSINTOTICAMENTE,

$$\langle S_i S_j \rangle \approx \mathrm{TR} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell & g \\ f & K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha^{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell & g \\ f & K \end{pmatrix} \right] =$$

$\alpha = \lambda_- / \lambda_+$

$$= \mathrm{TR}\left[\begin{pmatrix} \ell & g \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ell & g \\ f\alpha^r & k\alpha^r \end{pmatrix}\right] = \mathrm{TR}\begin{pmatrix} \ell^2 + fg\alpha^r & - \\ - & 0 \end{pmatrix}$$

NÃO IMPORTA PARA O TRAÇO!

$$\therefore \boxed{\langle S_i S_j \rangle \sim \ell^2 + fg\alpha^r}$$

COMO $\langle S_i \rangle \sim \ell^2$,

$$G(i,j) \sim fg\left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+}\right)^r \quad \text{OU}$$

$$G(i,j) \sim f \cdot g \cdot e^{r \cdot \log(\lambda_-/\lambda_+)}$$

$$\therefore \boxed{G(i,j) \sim f \cdot g \cdot e^{-r/\xi}}$$

ONDE $\boxed{\xi \equiv \dfrac{1}{\log(\lambda_+/\lambda_-)}}$

É O <u>COMPRIMENTO</u> <u>DE</u> <u>CORRELAÇÃO</u>.

COMO

$$\lambda_\pm = e^{\beta J}\left\{\cosh \beta H \pm \sqrt{\sinh^2 \beta H + e^{-4\beta J}}\right\},$$

$$H=0 \rightarrow \ = \begin{cases} 2\cosh \beta J \\ 2\sinh \beta J \end{cases}$$

A CAMPO NULO

$$\boxed{\xi = \frac{1}{\log \coth \beta J}} \qquad (H=0)$$

E, PARA $T \to 0^+$ $(\beta \to \infty)$,

$$\xi = \frac{1}{\log \dfrac{e^{\beta J}+e^{-\beta J}}{e^{\beta J}-e^{-\beta J}}} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2} \log \dfrac{1+e^{-2\beta J}}{1-e^{-2\beta J}}} \sim \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{e^{-2\beta J}}$$

$$\therefore \boxed{\xi \sim \frac{1}{2} e^{+2\beta J}}$$

DIVERGE P/ $T \to 0^+$

AULA ANTERIOR: $\chi_T \sim \frac{1}{K_B T} e^{2\beta J}$