# 2021-1, "STATPHYS", AULA 08

OBJETIVOS: UTILIZAR DISTRIBUIÇÕES ESTÁVEIS PARA INTRODUZIR AS IDEIAS DE RENORMALIZAÇÃO, AUTO-SIMILARIDADE E CRITICALIDADE.

## DISTRIBUIÇÕES $\alpha$-ESTÁVEIS

É FÁCIL VER QUE A SOMA DE DUAS V.A.'S <u>NORMAIS</u> <u>INDEPENDENTES</u> TAMBÉM É <u>NORMAL</u>. DE FATO, SE $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, 2$,

$$\phi_{X_1+X_2}(K) \overset{\text{IND.}}{=} \phi_{X_1}(K) \cdot \phi_{X_2}(K) =$$

$$= e^{i\mu_1 K - \sigma_1^2 K^2/2} \cdot e^{i\mu_2 K - \sigma_2^2 K^2/2}$$

$$= e^{i(\mu_1+\mu_2)K - (\sigma_1^2+\sigma_2^2)K^2/2},$$

DE MODO QUE $X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

MAS <u>INFINITAS</u> OUTRAS V.A.'S TAMBÉM APRESENTAM TAL "ESTABILIDADE". É POSSÍVEL MOSTRAR (SAMORODNITZKY & TAQQU, 1994) QUE, PARA $\boxed{0 < \alpha \leq 2}$ E PARA ALGUM PARÂMETRO DE ESCALA $\gamma > 0$, A FUNÇÃO CARACTERÍSTICA

$$\boxed{\phi_X(k) = e^{-\gamma |k|^\alpha}}$$

"DESCREVE" UMA <u>DENSIDADE</u> <u>ESTRITAMENTE</u> <u>ESTÁVEL</u>, NO SENTIDO QUE, SE $X$ E $\{X_i\}$, $i = 1, \ldots, N$, SÃO V.A.'S I.I.D., ENTÃO $\boxed{S_N \equiv X_1 + \dots + X_N}$ E

$\boxed{c_N . X}$, COM $\boxed{c_N = N^{1/\alpha}}$, TÊM

A MESMA DENSIDADE DE PROBABILIDADE.

◇ EXEMPLO: $X, X_i \sim N(0, \sigma^2)$

$i = 1, \dots, N$

$$S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i \sim N(0, N.\sigma^2)$$

$$\alpha = 2: \quad N^{1/2} . X \sim N\left(0, (N^{1/2})^2 . \sigma^2\right) = N(0, N\sigma^2)$$

POIS SE $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $cX \sim N(c\mu, c^2\sigma^2)$ ◇

O EXEMPLO ACIMA SÓ FUNCIONOU PORQUE $\mu = 0$. EM GERAL, UMA DENSIDADE DE X É ESTÁVEL SE $\boxed{c_N X + d_N}$ E $S_N$ TÊM A MESMA DENSIDADE, COM $c_N > 0$. MAS TRANSLAÇÕES SEMPRE

TORNAM ESTRITAMENTE ESTÁVEIS DENSIDADES ESTÁVEIS...

A DISTRIBUIÇÃO GAUSSIANA É A ÚNICA COM VARIÂNCIA FINITA, COM $\alpha = 2$. CLARO, A MÉDIA É FINITA.

AS V.A.'S ESTÁVEIS COM $1 < \alpha < 2$ TEM MÉDIA FINITA, AO CONTRÁRIO DOS CASOS $0 < \alpha \leq 1$.

EM APENAS 3 CASOS HÁ EXPRESSÕES ANALÍTICAS EXPLÍCITAS PARA AS DENSIDADES. QUANDO O ÍNDICE OU EXPOENTE CARACTERÍSTICO $\alpha$ VALE $1/2$, A VARIÁVEL

$$S_N = \frac{1}{N^2}(X_1 + \ldots + X_N)$$

E CADA UMA DAS PARCELAS $X_i$ COMPARTILHAM A DENSIDADE

$$\rho(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi x^3}} e^{-1/2x} , & x > 0 \\ 0 , & x < 0 \end{cases} .$$

DENSIDADE DE LEVY

↓

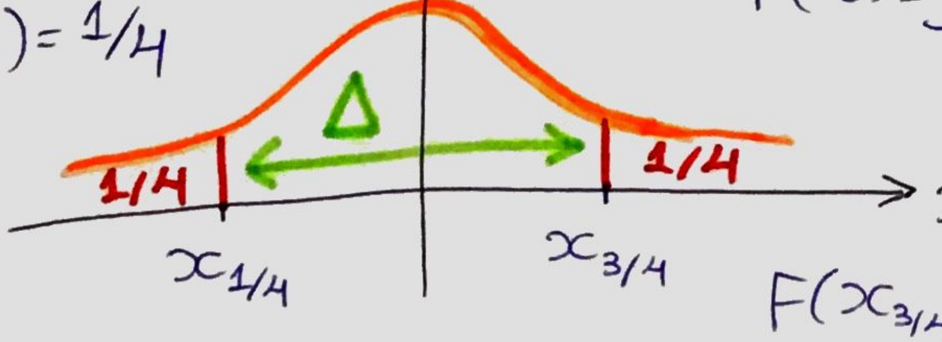
LAPLACE >> FOURIER

QUANDO $\alpha = 1$, TEMOS A DISTRIBUIÇÃO DE CAUCHY,

$$\rho(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\gamma}{x^2 + \gamma^2} , \quad \phi(k) = e^{-\gamma |k|} .$$

EMBORA A VARIÂNCIA NÃO EXISTA PARA $\alpha < 2$, PODEMOS QUANTIFICAR A VARIABILIDADE, POR EXEMPLO, PELO INTERVALO ENTRE QUARTIS.

$F(x_{1/4}) = 1/4$




$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \rho(x')dx'$$

$F(x_{3/4}) = 3/4$

ENQUANTO A VARIABILIDADE DA MÉDIA AMOSTRAL DIMINUI POR UM FATOR $1/\sqrt{N}$ NO CASO DE V.A.'S DE VARIÂNCIA FINITA, ELA NÃO SE ALTERA NO CASO DE CAUCHY $\alpha = 1$ E AUMENTA (!!!) NO CASO DE LEVY, $\alpha = \frac{1}{2}$.

MESMO QUANDO $1 < \alpha < 2$ E A MÉDIA AMOSTRAL "TEM CONVERGÊNCIA", ESTA É "LENTA" POIS AS "CAUDAS" DA DISTRIBUIÇÃO ($|x|$ "GRANDE") JÁ SÃO "PESADAS" (HEAVY TAILS) PARA QUALQUER $\alpha < 2$. AO INVÉS DE SEREM EXPONENCIALMENTE LIMITADAS, COMO NO CASO GAUSSIANO, VALE UMA LEI DE POTÊNCIA,

$$\boxed{\rho(x) \sim \frac{CTE}{|x|^{1+\alpha}}}.$$

DESCUBRA AS MARAVILHAS DAS DIS-
TRIBUIÇÕES NÃO GAUSSIANAS EM
[SORNETTE, "CRITICAL PHENOMENA IN
NATURAL SCIENCES"] E, PRINCIPAL-
MENTE, EM [SCHROEDER, "FRACTALS,
CHAOS, POWER LAWS"].

- SIMULAÇÃO "DE ESTÁVEIS", $\alpha$:

$$U_i \sim \mathcal{U}\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right) \qquad \rho(u_i) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & u_i \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right] \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$V_i \sim \mathcal{E}(1) \rightarrow \rho(v_i) = e^{-v_i}$$

$$x_i = \frac{\sin \alpha u_i}{(\cos u_i)^{1/\alpha}} \left[ \frac{\cos[(1-\alpha)u_i]}{v_i} \right]^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$$

- CAUCHY, $\alpha = 1$:

$$x_i = \gamma \tan u_i$$

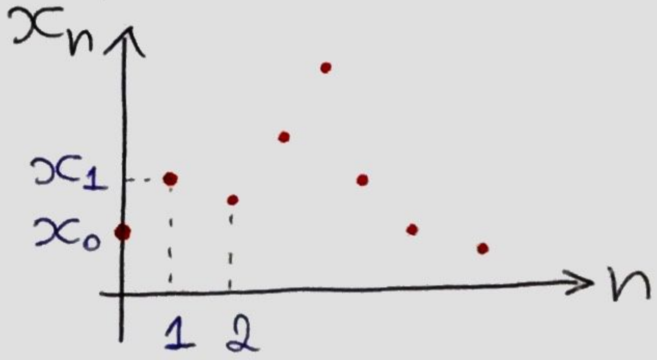
# RENORMALIZAÇÃO (EM SEQUÊNCIAS I.I.D.)

## * PREÂMBULO

SEJA $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ UMA FUNÇÃO DIFERENCIÁVEL. A RECORRÊNCIA

$$\boxed{x_{n+1} = f(x_n)} \quad , \quad n = 0, 1, \ldots$$

DEFINE UM <u>MAPA</u>.




UM EVENTUAL $x^* \in \mathbb{R}$ TAL QUE

$\boxed{x^* = f(x^*)}$ É DENOMINADO UM <u>PONTO FIXO</u> DO MAPA. O QUE OCORRE "PERTO" DE UM PONTO FIXO? $\boxed{x^* \to x^* + \delta}$

$$x^* + \delta_{n+1} = x_{n+1} = f(x_n) = f(x^* + \delta_n) \approx$$

$$\approx \underbrace{f(x^*)}_{\text{"}x^*\text{"}} + \delta_n \cdot f'(x^*) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta_{n+1} \approx [f'(x^*)] \cdot \delta_n}$$ LINEARIZAÇÃO!!!

SE $|f'(x^*)| < 1$, $\delta_n \xrightarrow{n \to \infty} 0$ E $x^*$ É UM PONTO FIXO ESTÁVEL.

SE $|f'(x^*)| > 1$, $x^*$ É INSTÁVEL.

SE $|f'(x^*)| = 1$, TEMOS UM CASO MARGINAL QUE EXIGE MAIS TERMOS.

[STROGATZ, "NONLINEAR DYNAMICS AND CHAOS"]

NO TEMPO CONTÍNUO, $\dot{x} = f(x)$, VALE UMA ANÁLISE ANÁLOGA, MAS O QUE IMPORTA É SE $f'(x^*)$ É MAIOR OU MENOR DO QUE ZERO (E NÃO UM).

FIM DO PREÂMBULO!

AGORA, CONSIDERE UM ESPAÇO DE SEQUÊNCIAS INFINITAS BILATERAIS DE V.A.'S I.I.D., $\{X_i\}$ $i \in \mathbb{Z}$. CADA

SEQUÊNCIA É UM PONTO DESSE ESPAÇO, ONDE DEFINIMOS UM OPERADOR LINEAR $T_n$, $n \geq 1$, $\{X_i\} \xrightarrow{T_n} \{X'_i\}$, TAL QUE

$$\boxed{\begin{aligned} X'_i &= \left( T_n(\{X_i\}) \right)_i \\ &= \frac{1}{n^{\delta}} \sum_{j=i.n}^{(i+1)n-1} X_j \end{aligned}}$$

$c\{X_i\} \equiv \{cX_i\}$

$\{X_i\} + \{Y_i\} \equiv \{X_i + Y_i\}$.

**DIZIMAÇÃO, "DECIMATION"**

$$\cdots \;\Big|\; \overbrace{X_{in} \;\Big|\; X_{in+1} \;\Big|\; \cdots \;\Big|\; X_{in+(n-1)}}^{X'_i} \;\Big|\; \cdots$$

**BLOCO DE TAMANHO n**

NOTE QUE $T_n$ TAMBÉM DEPENDE DE $\delta$, ALÉM DE $n$. É DENOMINADO UMA TRANSFORMAÇÃO DE RENORMALIZAÇÃO. A FAMÍLIA DE TRANS-

FORMAÇÕES $\{T_n, n \geq 1\}$ ~~CONSTITUI~~ É DENOMINADA UM GRUPO DE RENORMALIZAÇÃO, EMBORA SEJA APENAS UM SEMIGRUPO (NÃO EXISTEM INVERSAS, EMBORA $T_{m \cdot n} = T_m \circ T_n$, ESSENCIALMENTE PORQUE $(mn)^\delta = m^\delta n^\delta$).

USAREMOS O MESMO SÍMBOLO, $T_n$, PARA EXPRESSAR O EFEITO DE UMA TRANSFORMAÇÃO DE RENORMALIZAÇÃO NAS DENSIDADES,

$$\boxed{\rho_{X_i'}(x) = T_n(\rho_{X_i}(x))}.$$

UM PONTO FIXO DE UMA RENORMALIZAÇÃO É UMA DENSIDADE ESTÁVEL NO MAPA ACIMA, E É NATURALMENTE OBTIDO SE $X_i$ FOR $\alpha$-ESTÁVEL

E $\delta = 1/\alpha$. DENSIDADES $\alpha$-ESTÁVEIS SÃO ATRATORES. DENSIDADES DE VARIÂNCIA FINITA CONVERGEM PARA A DISTRIBUIÇÃO NORMAL, $\alpha = 2$, CONSTITUINDO UMA BACIA DE ATRAÇÃO ("BASIN OF ATTRACTION"). PARA A TRANSFORMAÇÃO COM $\delta = 1/\alpha$, TODAS AS DENSIDADES COM COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO $\rho(x) \sim \frac{CTE}{|x|^{\alpha+1}}$

CONSTITUEM A BACIA DE ATRAÇÃO PARA A DENSIDADE $\alpha$-ESTÁVEL PERTINENTE, $0 < \alpha < 2$.