

Lista 01 - Regras básicas de contagem e o princípio de inclusão-exclusão

1-) Na hipotética Caipirina, há 20000 habitantes. Um morador dessa cidade diz que cada habitante de lá tem 3 iniciais e que não há dois caipirinos com as mesmas iniciais. Ele diz a verdade?

2-) Estime quanto tempo (em anos) um computador capaz de analisar 1 bilhão de seqüências por segundo levaria para analisar todas as possíveis realizações de um gene com $5 \cdot 10^9$ bases nitrogenadas.

3-) Quantos números de 1 a 1 milhão contêm o algarismo 2?

4-) Enumere todas as possíveis funções Booleanas de duas variáveis.

5-) Quantas são as funções que atribuem 0 ou 1 a cada função Booleana de n variáveis?

6-) Seja $x = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ uma seqüência binária de n “bits”, ou seja, $a_i = 0$ ou 1 , $i = 1, \dots, n$. Além disso, seja \sim a operação “NOT”, ou seja, $\sim a_i = 1 - a_i$. Uma função Booleana f de n variáveis é chamada *auto-dual* se, para todo $x \in \{0, 1\}^n$, $f(x) = f(\sim x)$, onde $\sim x = \{\sim a_1, \sim a_2, \dots, \sim a_n\}$. Quantas são as funções Booleanas auto-duais de n variáveis?

7-) Em alguns computadores, um inteiro (positivo ou negativo) é representado por seqüências binárias de comprimento p . O último dígito representa o sinal, enquanto os $p - 1$ primeiros representam o valor absoluto do número. Qual é a maior quantidade de inteiros que podem ser representados desta forma? E se um deles precisa ser 0?

8-) Todo inteiro pode ser representado (*não* univocamente) na forma $a.2^b$, em que a e b são inteiros. A representação de ponto flutuante para um inteiro consiste em uma seqüência binária de p dígitos, dos quais os m primeiros determinam a e os $p - m$ restantes codificam b . Cada um desses números, a e b , é representado na forma descrita no exercício anterior.

a. Qual é a maior quantidade de inteiros que podem ser descritos na representação de ponto flutuante?

b. Repita o item a se a representação de ponto flutuante deve ser implementada de modo que o primeiro dígito usado para representar o número a seja necessariamente 1.

c. Repita o item a se pelo menos um 0 deve ser utilizado.

9-) Quantas seqüências binárias têm comprimento 3, 4 ou 5?

10-) Uma comissão deve ser escolhida entre 8 cientistas, 6 leigos e 13 sacerdotes. Se essa comissão deve conter duas pessoas de formações diferentes, quantas são as possíveis configurações?

- 11-) Quantas palavras de 5 letras começam com f ou não têm essa letra?
- 12-) De quantas formas é possível obter uma soma igual a 3 ou 4 quando dois dados distinguíveis são lançados?
- 13-) De quantos modos 3 pessoas podem sentar-se em 5 cadeiras em fila?
- 14-) Quantos números de 4 dígitos são maiores que 2400 e:
- têm todos os dígitos diferentes?
 - não têm dígitos iguais a 3, 5 ou 6?
 - têm as propriedades dos itens a e b simultaneamente?
- 15-) Quantos números diferentes podem ser formados multiplicando alguns (ou todos) dos números 1, 5, 6, 7, 7, 9, 9 e 9?
- 16-) Quantos divisores inteiros e positivos possui o número 360?
- 17-) Quantos são os números naturais de 4 dígitos que possuem pelo menos dois dígitos iguais?
- 18-) Quantos subconjuntos possui um conjunto que tem n elementos?
- 19-) Escrevem-se os inteiros de 1 até 222222. Quantas vezes o algarismo 0 é escrito?
- 20-) Escrevem-se números de 5 dígitos (inclusive os começados por 0) em cartões. Como 0, 1 e 8 não se alteram de cabeça para baixo e como 6 de cabeça para baixo se transforma em 9, um só cartão pode representar dois números (por exemplo, 06198 e 86190). Qual é o número mínimo de cartões para representar todos os números de cinco dígitos?
- 21-) Permutam-se de todos os modos possíveis os algarismos 1, 2, 4, 6 e 7 e escrevem-se os números assim formados em ordem crescente.
- Que lugar ocupa o número 62417?
 - Qual número ocupa o 66º lugar?
 - Qual é o 200º algarismo a ser escrito?
 - Qual é a soma dos números assim formados?
- 22-) De quantos modos é possível acomodar 7 pessoas em cadeiras em fila de modo que duas determinadas pessoas não fiquem juntas?
- 23-) Quantas são as permutações dos números $(1, 2, \dots, 10)$ nas quais o 5 está situado à direita do 2 e à esquerda do 3, embora não necessariamente em lugares consecutivos?

24-) De quantos modos r rapazes e m moças podem se colocar em fila de modo que as moças fiquem juntas?

25-) Quantas são as permutações simples dos números $1, 2, \dots, n$ nas quais o elemento que ocupa a k -ésima posição é inferior a $k + 4$, para todo k ?

26-) Quantas são as permutações simples dos números $1, 2, \dots, n$ nas quais o elemento que ocupa a k -ésima posição é maior que $k - 3$, para todo k ?

27-) Quantas diagonais possui um polígono de n lados?

28-) Há 5 pontos sobre a reta r e 8 pontos sobre a reta s , paralela a r . Quantos são os quadriláteros convexos com vértices em 4 desses 13 pontos?

29-) Sejam $I_m = \{1, 2, \dots, m\}$ e $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$, com $m \leq n$. Quantas são as funções $f : I_m \rightarrow I_n$ estritamente crescentes?

30-) Quantos são os p -subconjuntos (isto é, subconjuntos com p elementos) de $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ nos quais:

- a. a_1 figura;
- b. a_1 não figura;
- c. a_1 e a_2 figuram;
- d. pelo menos um dos elementos a_1 e a_2 figura;
- e. exatamente um dos elementos a_1 e a_2 figura.

31-) Quantos são os anagramas da palavra CARAGUATATUBA? Quantos começam por vogal?

32-) Uma fila de cadeiras no cinema tem 20 poltronas. De quantos modos 6 casais podem se sentar nessas poltronas de modo que nenhum casal esteja separado?

33-) De quantos modos é possível colocar em fila h homens e m mulheres, todos de alturas diferentes, de modo que os homens entre si e as mulheres entre si fiquem em ordem crescente de alturas?

34-) De quantos modos podemos dividir 18 pessoas em:

- a. 3 grupos de 6 pessoas cada?
- b. 2 grupos de 9 pessoas cada?
- c. um grupo de 11 pessoas e um grupo de 7 pessoas?
- d. 9 grupos de duas pessoas cada?
- e. 2 grupos de 4 pessoas e 2 grupos de 5 pessoas cada?

35-) De quantos modos n casais podem formar uma roda de ciranda de modo que os casais permaneçam unidos?

36-) De quantos modos n casais podem formar uma roda de ciranda de modo que os casais permaneçam unidos e que pessoas do mesmo sexo não fiquem juntas?

37-) De quantas maneiras 7 pessoas podem sentar-se em torno de uma mesa circular, sendo que duas determinadas pessoas não devem ficar juntas?

38-) De quantas maneiras 8 meninos e 8 meninas podem formar uma roda para brincar sem que pessoas do mesmo sexo fiquem juntas?

39-) De quantas maneiras 8 meninos e 8 meninas podem formar uma roda para brincar se as meninas devem ficar juntas?

40-) De quantos modos 8 casais podem sentar-se em uma roda gigante de 8 bancos de dois lugares cada um, com cada casal em um banco?

41-) De quantos modos 12 crianças podem ocupar os 6 bancos de dois lugares em uma roda gigante?

42-) Quantos números de 5 algarismos podem ser formados usando apenas os algarismos 1, 1, 1, 1, 2 e 3?

43-) Quantas são as soluções inteiras não negativas de $x + y + z + w = 3$?

44-) Quantas são as soluções inteiras não negativas de $x + y + z + w < 6$?

45-) Quantas são as soluções inteiras positivas de $x + y + z = 10$?

46-) Quantas são as soluções inteiras positivas de $x + y + z < 10$?

47-) Em quantas soluções inteiras positivas da equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 18$ exatamente duas variáveis são iguais a 1?

48-) Quantas são as soluções inteiras não negativas de $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 20$ nas quais exatamente 3 incógnitas são nulas?

49-) De quantos modos podem ser pintados 6 objetos iguais usando 3 cores diferentes?

50-) Uma urna contém 7 bolas brancas, 8 bolas vermelhas, 4 amarelas e 6 pretas. De quantas maneiras podemos retirar 6 bolas dessa urna?

51-) De quantas maneiras podemos distribuir 6 maçãs, 7 laranjas e 8 pêras em 3 caixas diferentes de modo que cada caixa receba pelo menos uma fruta de cada tipo?

52-) Determine o número de soluções em inteiros não negativos da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 16$, sendo $x_i \leq 7$, para $i = 1, 2, 3$.

53-) Quantas são as soluções inteiras não negativas de $x + y + z = 12$ nas quais pelo menos uma incógnita é maior que 7?

54-) Determine o número de permutações das letras AABBCDD nas quais não há letras iguais adjacentes.

55-) Determine o número de permutações de $(1, 2, \dots, n)$ nas quais não figuram (em posições consecutivas e na ordem dada) nem o par 12, nem o par 23, \dots , nem o par $(n-1), n$.

56-) Quantos são os elementos do conjunto $\{1, 2, \dots, 500\}$ que são divisíveis por 3 ou 5, mas não são divisíveis por 7?

57-) Em um colégio foram entrevistados 78 estudantes. Destes, 32 estavam fazendo um curso de francês; 40, um curso de física; 30, um curso de matemática; 23, um curso de história; 19, francês e física; 13, francês e matemática; 15, física e matemática; 2, francês e história; 15, física e história; 14, matemática e história; 8, francês, física e matemática; 8, francês, física e história; 2, francês, matemática e história; 6, física, matemática e história e 2 estavam fazendo todos os cursos. Quantos estudantes estavam fazendo pelo menos um curso nas 4 áreas mencionadas?

58-) Relembre a dedução do número de permutações caóticas (permutações de $\{1, \dots, n\}$ em que nenhum algarismo mantém sua posição original).

59-) Quantas são as permutações de $(1, \dots, 7)$ que têm exatamente 3 elementos em seu lugar original?

60-) Determine o número de permutações caóticas de $(1, \dots, 10)$ nas quais os números 1, 2, 3, 4 e 5 ocupam, em alguma ordem, os cinco primeiros lugares.

61-) De quantas formas é possível agendar consultas de 10 minutos para 6 pacientes, que devem ser examinados por dois médicos durante uma mesma hora? Cada um dos 6 pacientes deve ser examinado pelos dois médicos. Em cada consulta, só pode haver um médico e um paciente.

62-) Prove o 1º lema de Kaplansky (que determina o número de p -subconjuntos de $\{1, \dots, n\}$ que não contêm números consecutivos) usando o método exposto em aula ou, alternativamente, usando equações com soluções inteiras.

63-) De quantos modos podemos formar uma seqüência de p elementos iguais a 2, q elementos iguais a 1 e r elementos iguais a 0 se dois elementos iguais a zero não podem ser adjacentes?

64-) Quantos são os anagramas de ARARAQUARA que não possuem duas letras A consecutivas?

65-) Calcule o valor da soma $S = 2.1^2 + 5.2^2 + 8.3^2 + \dots + (3n-1).n^2$.

Gabarito

1-) não

2-) é um número da ordem de $3 \cdot 10^3 \cdot 10^9$

3-) 468559

5-) $2^{2^{2^n}}$

6-) $2^{2^{n-1}}$

7-) $2^p; 2^{p-1}$

8-) a. 2^p b. 2^{p-1} c. $2^p - 2$

9-) 56

10-) Quem interpretou que todas as comissões deveriam ser formadas por *exatamente* duas pessoas deveria ter obtido o resultado 230. Entretanto, eu interpreto o enunciado de forma que as comissões deveriam ter *pelo menos* duas pessoas, e a resposta é $2^{27} - 2^6 - 2^8 - 2^{13} + 2$.

11-) $26^4 + 25^5$

12-) 5

13-) 60

14-) a. 3864 b. 1567 c. 560

15-) 48

16-) 24

17-) 4464

18-) 2^n

19-) desconsiderem este exercício

20-) 98475

21-) a. 81 b. 46721 c. 1 d. 5333280

22-) 3600

23-) 604800

24-) $m!(r + 1)!$

25-) 6.4^{n-3}

26-) 2.3^{n-2}

27-) $\frac{n(n-3)}{2}$

28-) 280

29-) $C(n, m)$

30-) a. $C(n-1, p-1)$ b. $C(n-1, p)$ c. $C(n-2, p-2)$

d. $C(n, p) - C(n-2, p)$ ou $2C(n-1, p-1) - C(n-2, p-2)$

e. $2C(n-2, p-1)$ ou $2C(n-1, p-1) - 2C(n-2, p-2)$

31-) $\frac{13!}{5!2!2!}; \frac{12!}{4!2!2!} + \frac{12!}{5!2!}$

32-) 138378240

33-) $C(m+h, m)$

34-) a. $\frac{18!}{3!(6!)^3}$

b. $\frac{18!}{2!(9!)^2}$

c. $C(18, 7)$

d. $\frac{18!}{9!(2!)^9}$

e. $\frac{18!}{(2!4!5!)^2}$

35-) $2^n(n-1)!$

36-) $2(n-1)!$

37-) 480

38-) $7!8!$

39-) $8!8!$

40-) $2^8 \cdot 7!$

41-) $2 \cdot 11!$

42-) 30

43-) 20

44-) 126

45-) 36

46-) 84

47-) 660

48-) 3420

49-) 28

50-) 80

51-) 3150

52-) 21

53-) 45

54-) 864

$$55-) (n-1)! \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \frac{n-i}{i!}$$

56-) 200

57-) 69

59-) 315

60-) 1936

61-) 190800

63-) $C(p+q+1, r) \cdot C(p+q, p)$

64-) 120

65-) $18C(n+3, 4) - 20C(n+2, 3) + 4C(n+1, 2)$