PEF2603
Estruturas na Arquitetura III -
Sistemas Reticulados e Laminares

Aula 1 - Deformações na Flexão

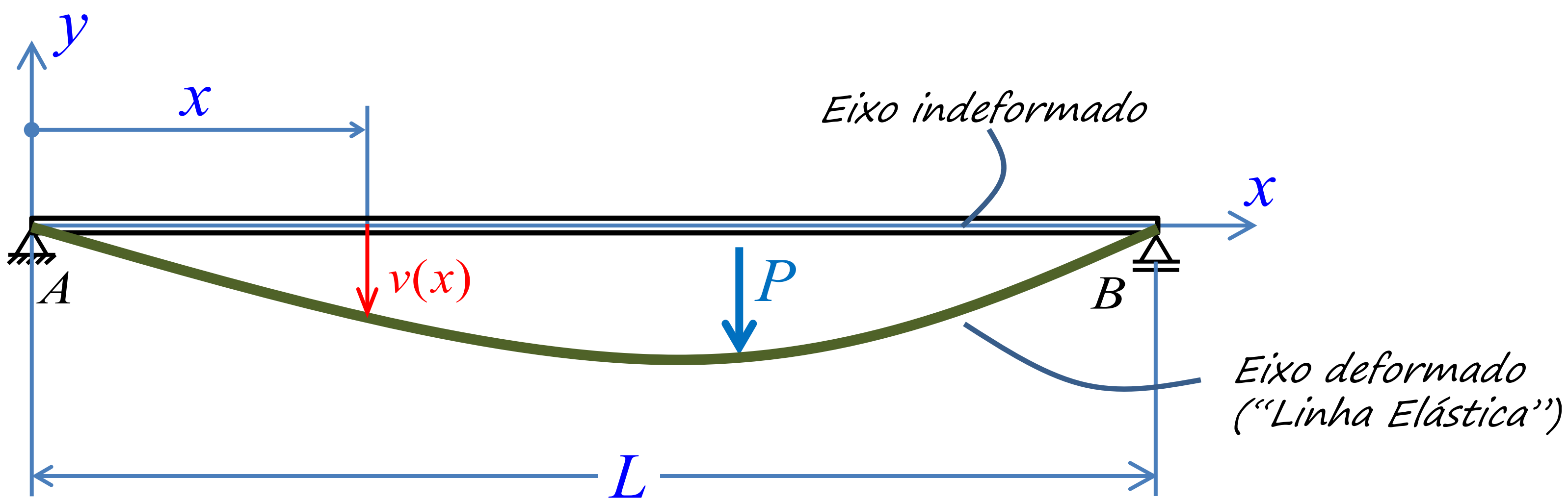
(20/03/2023)

Professores
Ruy Marcelo O. Pauletti , Leila Meneghetti Valverdes, Luís A.G. Bitencourt Jr.

1º Semestre 2023

Deformações na Flexão

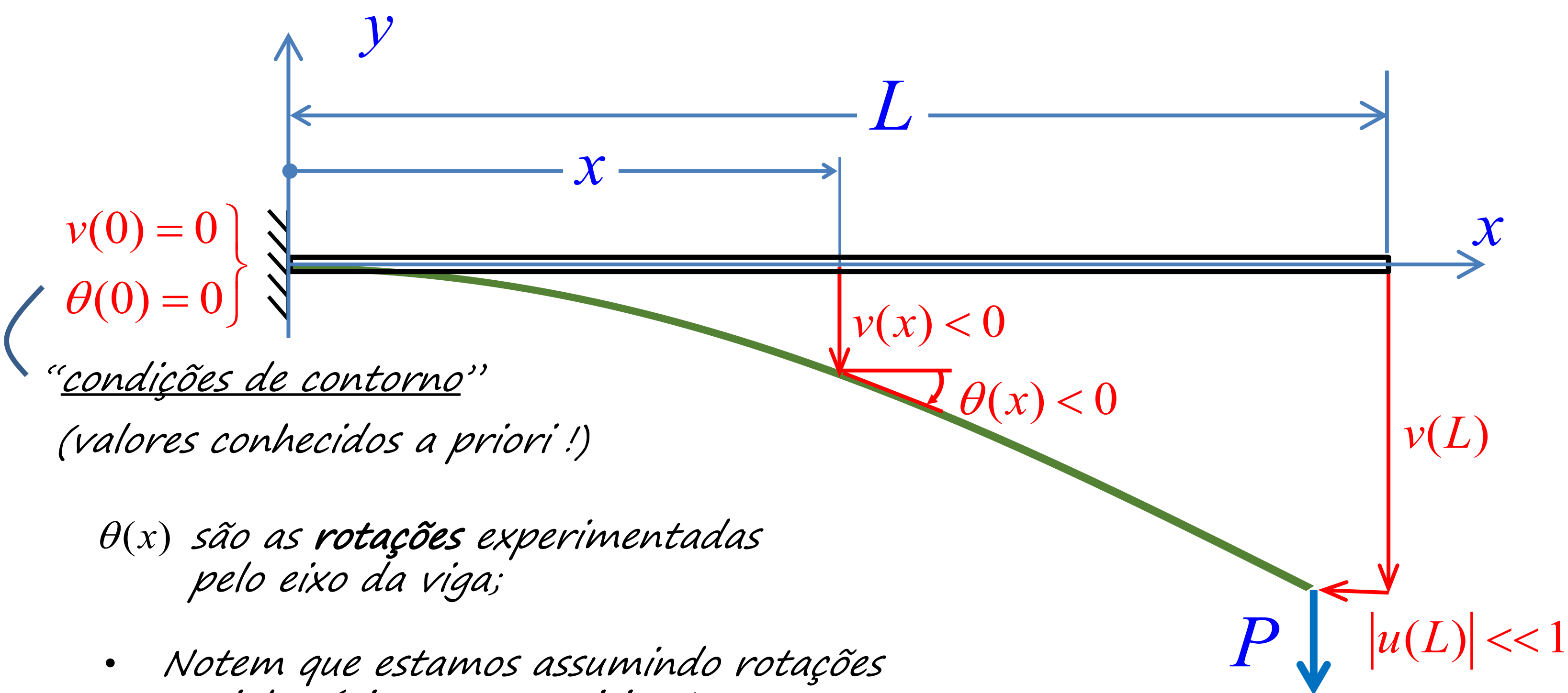
- *O conhecimento das deformações de uma estrutura tem um interesse intrínseco, uma vez que essas deformações devem ser limitadas, por razões práticas;*
- *O conhecimento das deformações também é necessário para o estudo das vibrações das estruturas, outro aspecto de grande relevância prática;*
- *O estudo das deformações permite ainda a resolução de **problemas hiperestáticos**, para os quais não bastam as equações de equilíbrio;*
- *Inicialmente, definimos alguma notação, tomando como exemplo o caso da deformação da **viga biapoiada de eixo originalmente reto**, que se deforma quando sujeita a um carregamento externo:*



- *A função* $v(x),\ \ 0 \le x \le L$ *descreve completamente os **deslocamentos transversais** do eixo da viga;*
- *No sistema de coordenadas adotado, um deslocamento para baixo corresponde a* $v(x) < 0$

Deformações na Flexão

Introduzimos mais alguma notação, e hipóteses cinemáticas, considerando o caso de uma ***viga em balanço****:*



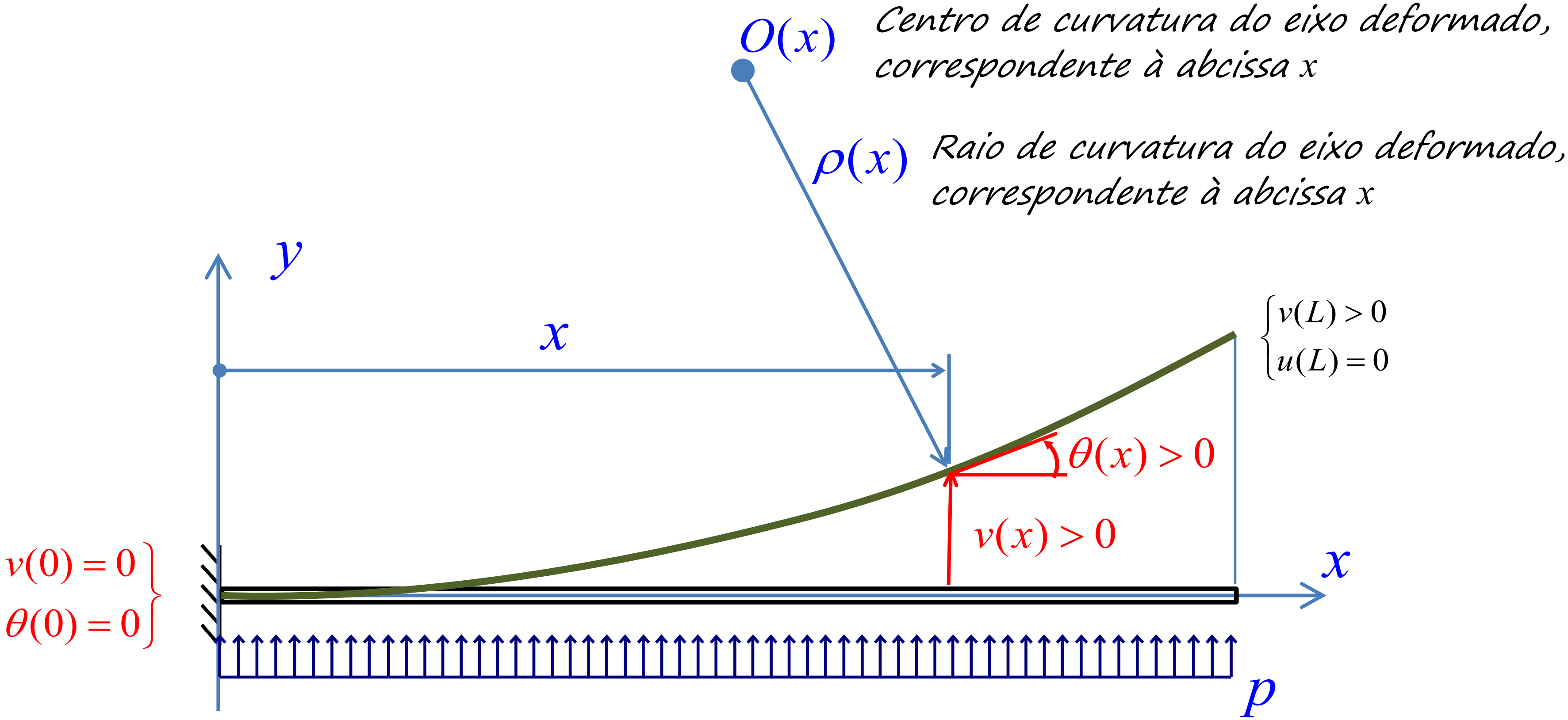
$\theta(x)$ *são as* ***rotações*** *experimentadas pelo eixo da viga;*

- *Notem que estamos assumindo rotações anti-horárias como positivas!*

- *Vamos desprezar os* ***deslocamentos horizontais u(x)****, pois de fato são usualmente pequenos, isto é* $u(x) \ll v(x)$*, e sua consideração levaria a um problema não linear, de resolução complicada;*

- *Essa é uma simplificação razoável para as vigas de uma edificação, mas não o seria para o caso de uma vara de pesca de fibra de vidro ou carbono, por exemplo.*

Deformações na Flexão



- *Notem que a declividade da reta tangente à linha elástica é relacionada à rotação* $\theta(x)$

- *Recordando as aulas de cálculo:* $\boxed{\tan\theta(x) = \dfrac{dv}{dx}}$

Deformações na Flexão

$$\tan\theta = \frac{dv}{dx}$$

é a derivada da função v(x) (ou seja da linha elástica da viga), em relação à abscissa x

(Assunto do cálculo diferencial, pré-requisito para as disciplinas do PEF)

Recordando, por exemplo:

$$f(x) = \sin ax \qquad \Rightarrow \qquad \frac{df}{dx} = a\cos ax$$

$$f(x) = ax^n + b \qquad \Rightarrow \qquad \frac{df}{dx} = n \cdot ax^{(n-1)}$$

Nota: Recomenda-se aos alunos uma breve revisão das definições de derivadas e integrais, mas o trabalho de cálculo de nossa disciplina será reduzido ao mínimo necessário para bem definir o problema da linha elástica!

Deformações na Flexão

Em PEF2601, durante o estudo da flexão simples, chega-se à **fórmula das tensões normais na flexão:**

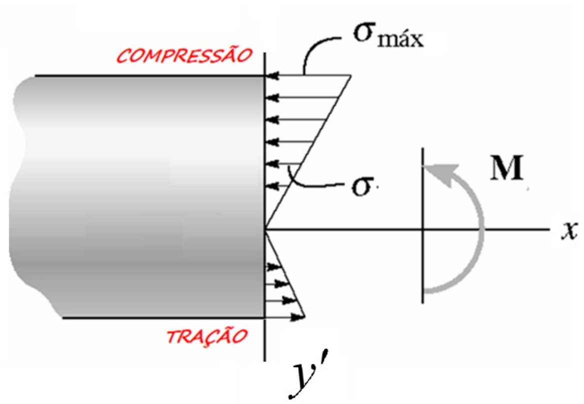
$$\boxed{\sigma(y') = \frac{M}{I} y'}$$

$I = I_{z0}$ é o momento de inércia da seção transversal em relação ao eixo baricêntrico z_O

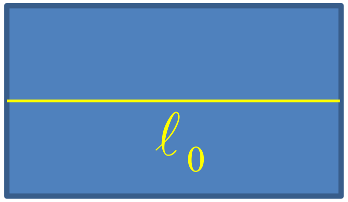
y' é a distância da fibra considerada ao baricentro da seção transversal

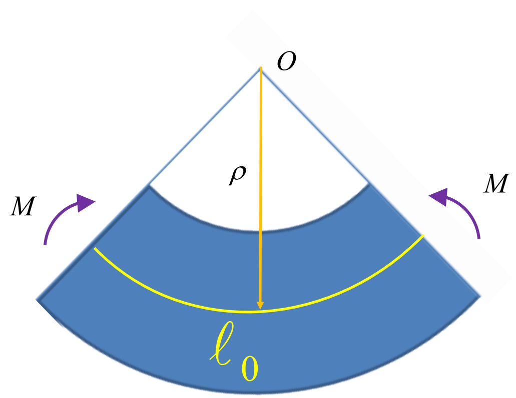
<u>(Notem os significados diversos de y e y')</u>

$\sigma(y')$ são as tensões normais devidas ao momento M



Durante a dedução dessa fórmula (visto em PEF2601), encontra-se um resultado intermediário, relacionando a curvatura da linha elástica da viga com as grandezas acima:



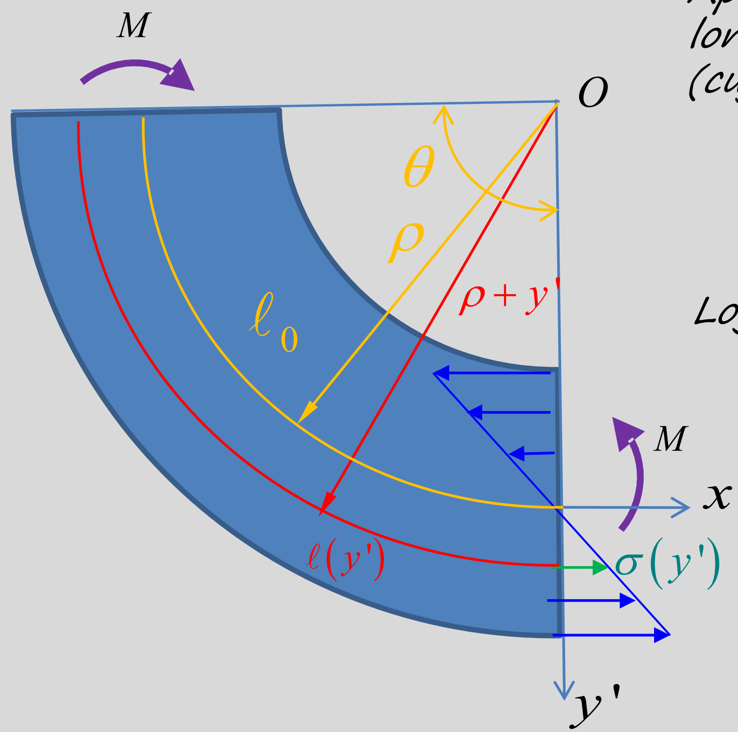


$$\boxed{\frac{1}{\rho} = \kappa = \frac{M}{EI}} \qquad (1)$$

onde

- κ é a curvatura da linha elástica
- ρ é o raio de curvatura da linha elástica
- E é o módulo de elasticidade do material

Dedução da relação M-k (recordando de PEF2601):



Após a deformação, os comprimentos das fibras longitudinais variam conforme distância à linha neutra (cujo comprimento permanece inalterado):

$$\ell_0 = \rho\theta \qquad \ell(y') = (\rho + y')\theta$$

Logo, resultam as deformações longitudinais:

$$\varepsilon(y') = \frac{\ell(y') - \ell_0}{\ell_0} = \frac{(\rho + y')\theta - \rho\theta}{\rho\theta} = \frac{y'}{\rho}$$

e as correspondentes tensões normais:

$$\sigma(y') = E\varepsilon(y') = E\frac{y'}{\rho}$$

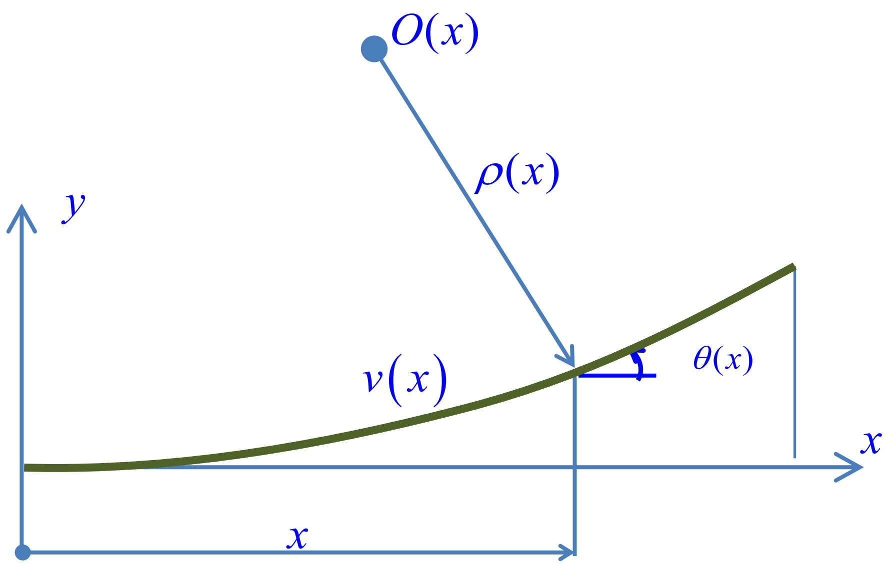
e o momento resultante:

$$M = \int \sigma(y')y'\,dA = \int E\varepsilon(y')\,y'\,dA = \int E\frac{y'}{\rho}y'\,dA = M = \frac{E}{\rho}\int (y')^2 dA = \frac{E}{\rho}I_{z0}$$

Logo, $\boxed{\dfrac{1}{\rho} = \dfrac{M}{EI_{z0}}}$ C.Q.D.

Curvatura de curvas planas

Do estudo das curvas planas, dadas por $v = v(x)$



Sabe-se que a curvatura pode ser calculada por

$$\kappa(x) = \frac{\dfrac{d^2v}{dx^2}}{\left(1+\left(\dfrac{dv}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Curvatura de curvas planas

Admitindo a hipótese de pequenas rotações $\theta << 1$

Tem-se ainda que $$\tan\theta = \frac{dv}{dx} \simeq \theta << 1$$

E logo $$\kappa(x) \simeq \frac{d^2v}{dx^2} \qquad (2)$$

Substituindo (2) em (1) chega-se a uma relação entre a segunda derivada da linha elástica v(x) e o momento fletor M(x)

$$\frac{d^2v}{dx^2} \simeq \frac{M}{EI}$$

Sob a hipótese de pequenas rotações, é lícito admitir a igualdade, resultando a

EQUAÇÃO DA LINHA ELÁSTICA $$\boxed{\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI}}$$

Trata-se de uma equação diferencial ordinária de segunda ordem, com coeficientes constantes, de integração muito simples para as funções M(x) usuais, requerendo o conhecimento de duas condições de contorno, para determinar as constantes de integração:

Para entendermos melhor essa nomenclatura, vamos considerar, por exemplo, as derivadas da função polinomial

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 3$$

A sua primeira derivada é dada por:

$$\frac{df}{dx} = 3x^2 + 4x + 3$$

E a sua segunda derivada:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = 6x + 4$$

Suponha-se que ao invés de $f(x)$ conheçamos apenas a segunda derivada $\dfrac{d^2 f}{dx^2}$

Como podemos fazer para conhecer a função original?

$$f = \int \left(\frac{df}{dx} \right) dx + \mathbb{C}$$

Onde $\mathbb{C}$ é uma constante de integração.

Por exemplo para o monômio ax^n tem-se $\displaystyle \int \left(ax^n \right) dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + \mathbb{C}$

Aplicando esta regra para nossa função $$\frac{d^2 f}{dx^2} = 6x + 4$$

$$\frac{df}{dx} = \int\left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right)dx = \int(6x+4)dx = \frac{6x^2}{2} + 4x + \mathbb{C}$$

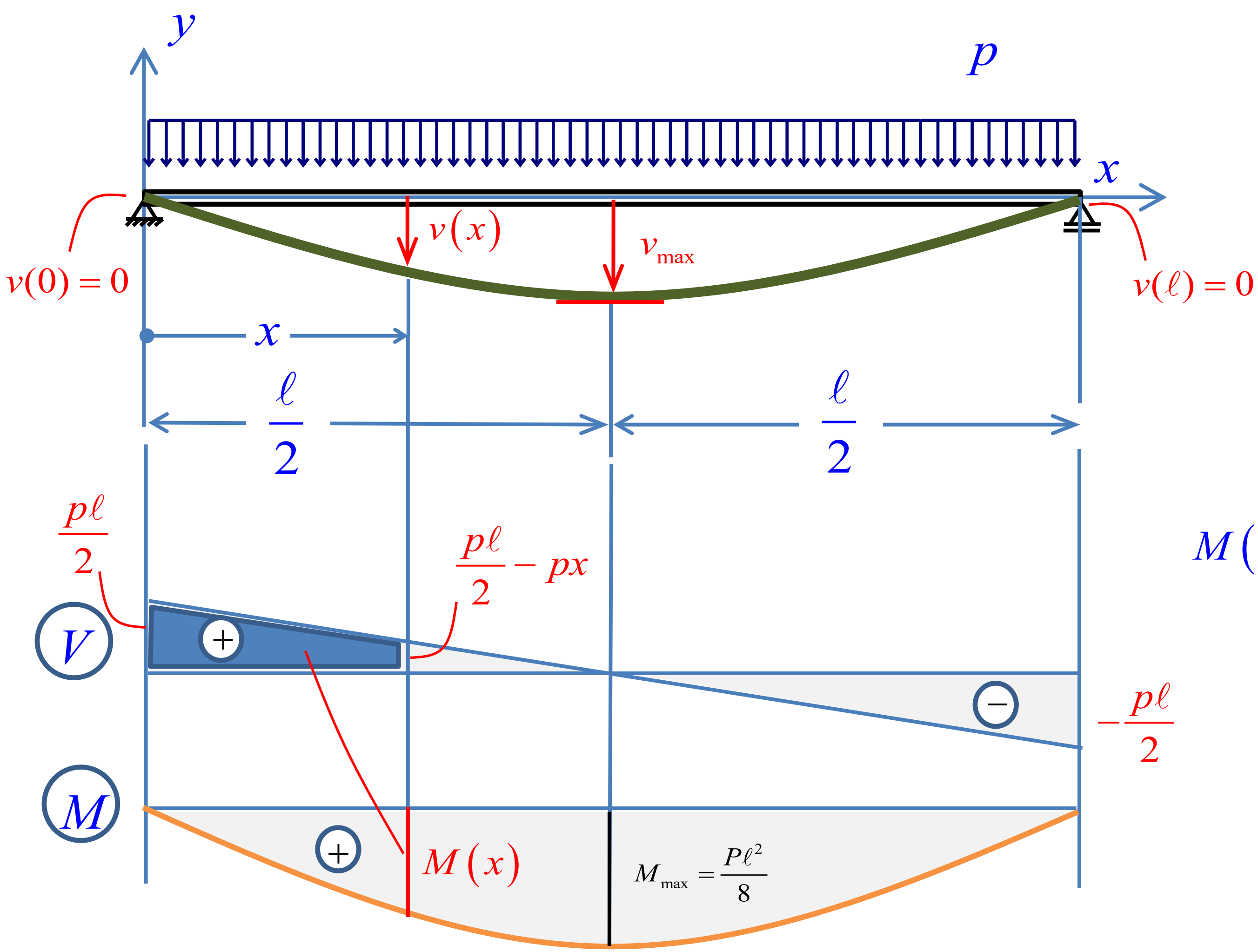
$$f = \int\left(\frac{df}{dx}\right)dx = \int\left(3x^2 + 4x + \mathbb{C}\right)dx = \frac{3x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} + \mathbb{C}x + \mathbb{D}$$

$$\boxed{f = x^3 + 2x^2 + \mathbb{C}x + \mathbb{D}}$$

Para f(x) ser integralmente conhecida, precisa-se conhecer duas "condições de contorno", por exemplo

$$\begin{cases} f(0) = 3 \\ f(1) = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0) = \mathbb{D} = 3 \\ f(1) = 1^3 + 2\times 1^2 + \mathbb{C}\times 1 + 3 = 9 \end{cases} \Rightarrow \quad \mathbb{C} = 3$$

Exemplo 1: *Determinar o máximo deslocamento da viga biapoiada sujeita a uma carga uniformemente distribuída.*



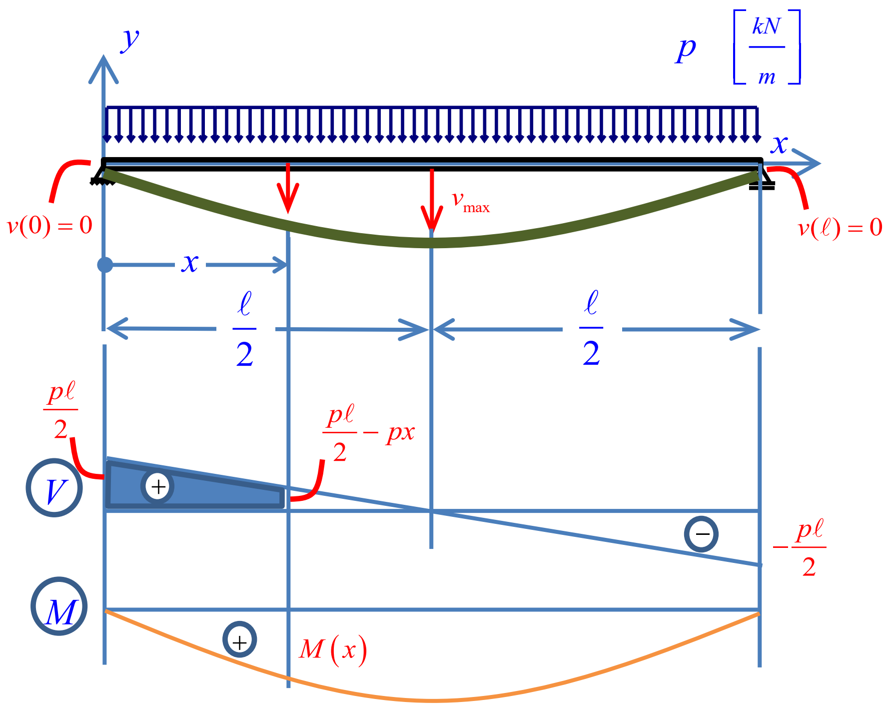
$$\begin{cases} v(0) = 0 \\ v(\ell) = 0 \\ v_{max} = v\left(\dfrac{\ell}{2}\right) \\ \left.\dfrac{dv}{dx}\right|_{x=\frac{\ell}{2}} = 0 \end{cases}$$

$$M(x) = \frac{\left(\dfrac{p\ell}{2}\right) + \left(\dfrac{p\ell}{2} - px\right)}{2} \times x$$

$$\therefore$$

$$\boxed{M(x) = \frac{p\ell}{2}x - \frac{px^2}{2}}$$

Exemplo 1 (continuação):



Equação da linha elástica:

$$\boxed{\frac{d^2v}{dx^2}=\frac{M}{EI}=\frac{1}{EI}\left(\frac{p\ell}{2}x-\frac{px^2}{2}\right)}$$

$$\theta=\frac{dv}{dx}=\frac{1}{EI}\left(\frac{p\ell}{4}x^2-\frac{px^3}{6}\right)+\mathbb{C}$$

$$v=\frac{1}{EI}\left(\frac{p\ell}{12}x^3-\frac{px^4}{24}\right)+\mathbb{C}x+\mathbb{D}$$

Exemplo 1 (continuação):

$$v = \frac{1}{EI}\left(\frac{p\ell}{12}x^3 - \frac{px^4}{24}\right) + \mathbb{C}x + \mathbb{D}$$

Condições de contorno: $\begin{cases} v(0) = 0 & \therefore \quad v(0) = \mathbb{D} = 0 \\ v(\ell) = 0 & \therefore \quad v(\ell) = \dfrac{1}{EI}\left(\dfrac{p\ell^4}{12} - \dfrac{p\ell^4}{24}\right) + \mathbb{C}\ell + \mathbb{D} = 0 \end{cases}$

$$\mathbb{C} = -\frac{p\ell^3}{24EI}$$

$$\boxed{v(x) = \frac{1}{EI}\left(\frac{p\ell}{12}x^3 - \frac{px^4}{24} - \frac{p\ell^3}{24}x\right)}$$

$$\boxed{\theta = \frac{1}{EI}\left(\frac{p\ell}{4}x^2 - \frac{px^3}{6} - \frac{p\ell^3}{24}\right)}$$

Exemplo 1 (continuação):

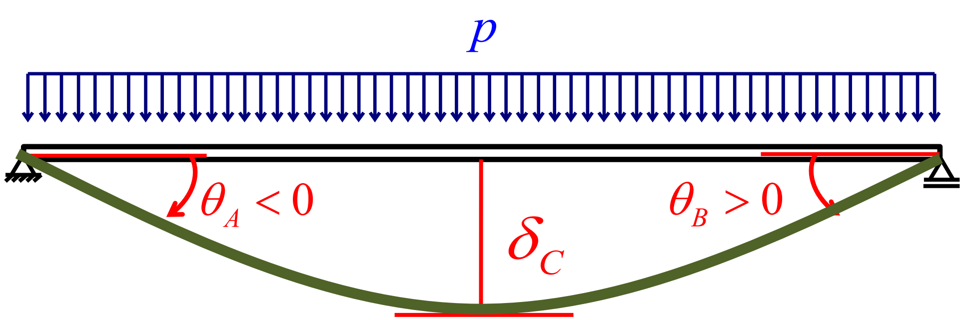
Por simetria, v(x) é máximo para x=l/2:

$$v_{max} = v\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{1}{EI}\left(\frac{p\ell}{12}\left(\frac{\ell}{2}\right)^3 - \frac{p}{24}\left(\frac{\ell}{2}\right)^4 - \frac{p\ell^3}{24}\left(\frac{\ell}{2}\right)\right)$$

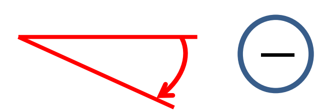
$$\boxed{v_{max} = -\frac{5}{384}\frac{p\ell^4}{EI}}$$

É usual expressar a flecha máxima em módulo:

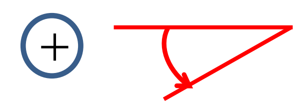
$$\boxed{\delta_C = \left|v_{max}\right| = \frac{5}{384}\frac{p\ell^4}{EI}}$$



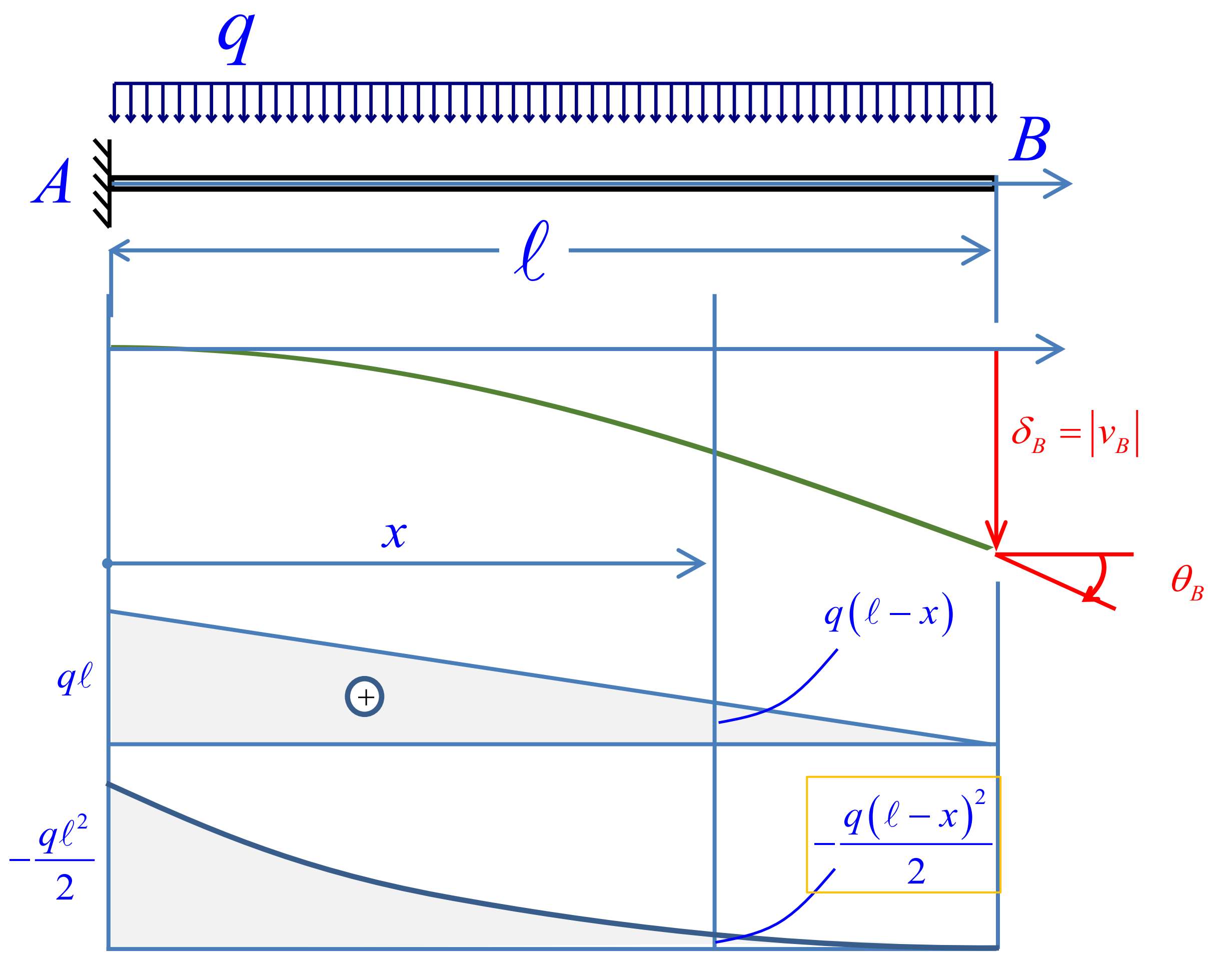
$$\boxed{\theta_A = -\frac{p\ell^3}{24EI}}$$



$$\boxed{\theta_B = +\frac{p\ell^3}{24EI}}$$



Exemplo 2: Determinar o deslocamento e a rotação da extremidade livre da viga em balanço sujeita a uma carga uniformemente distribuída:



$$M(x) = -\frac{q\ell^2}{2} + q\ell x - \frac{qx^2}{2}$$

Exemplo 2 (continuação):

Momentos fletores: $M(x) = -\dfrac{q\ell^2}{2} + q\ell x - \dfrac{qx^2}{2}$

Equação da Linha Elástica: $\dfrac{d^2v}{dx^2} = \dfrac{M(x)}{EI} = \dfrac{1}{EI}\left(-\dfrac{q\ell^2}{2} + q\ell x - \dfrac{qx^2}{2}\right)$

Integrando uma vez: $\dfrac{dv}{dx} = \theta(x) = \dfrac{1}{EI}\left(-\dfrac{q\ell^2}{2}x + \dfrac{q\ell x^2}{2} - \dfrac{qx^3}{6}\right) + \mathbb{C}$

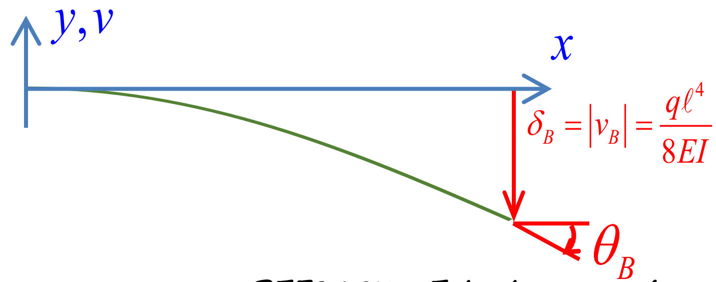
Condição de contorno $\theta(0) = \theta_A = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{C} = 0$

As rotações ficam determinadas: $\dfrac{dv}{dx} = \theta(x) = \dfrac{1}{EI}\left(-\dfrac{q\ell^2}{2}x + \dfrac{q\ell x^2}{2} - \dfrac{qx^3}{6}\right)$

Integrando uma segunda vez: $v(x) = \dfrac{1}{EI}\left(-\dfrac{q\ell^2}{2}\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{q\ell}{2}\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{q}{6}\dfrac{x^4}{4}\right) + \mathbb{D}$

Condição de contorno $v(0) = v_A = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{D} = 0$

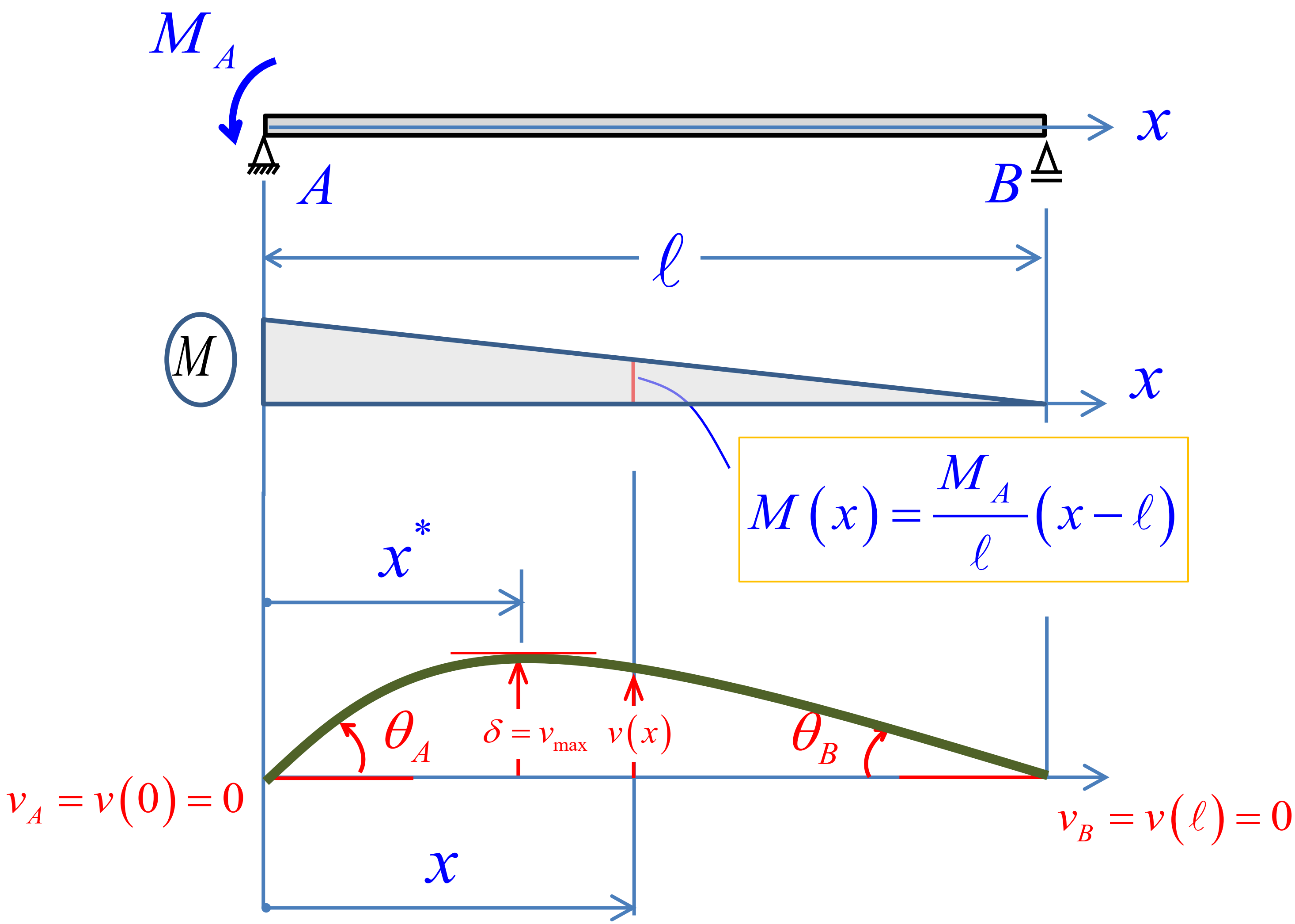
$$\boxed{v(x) = -\frac{qx^2}{24EI}(x^2 - 4\ell x + 6\ell^2)}$$



$$\boxed{\delta_B = |v(\ell)| = \frac{q\ell^4}{8EI}}$$

$$\boxed{\theta_B = |\theta(\ell)| = \frac{q\ell^3}{6EI}}$$

Exemplo 3: Determinar os deslocamentos e a rotação das extremidades da viga biapoiada esquematizada abaixo, sujeita a um momento concentrado na extremidade A:



Exemplo 3 (continuação):

Equação da Linha Elástica: $$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} = \frac{M_A}{EI\ell}(x-\ell)$$

Integrando uma vez: $$\theta(x) = \frac{dv}{dx} = \frac{M_A}{EI\ell}\left(\frac{x^2}{2} - \ell x\right) + \mathbb{C}$$

Integrando uma segunda vez: $$v(x) = \frac{M_A}{EI\ell}\left(\frac{x^3}{6} - \frac{\ell x^2}{2}\right) + \mathbb{C}x + \mathbb{D}$$

Condição de contorno: $$\begin{cases} v_A = v(0) = \mathbb{D} = 0 \\ v_B = v(\ell) = \frac{M_A}{EI\ell}\left(\frac{\ell^3}{6} - \frac{\ell^3}{2}\right) + \mathbb{C}\ell = 0 \Rightarrow \quad \mathbb{C} = \frac{M_A\ell}{3EI} \end{cases}$$

$$\boxed{v(x) = \frac{M_A}{6EI\ell}\left(x^3 - 3\ell x^2 + 2\ell^2 x\right)}$$

$$\boxed{\theta(x) = \frac{M_A}{6EI\ell}(3x^2 - 6\ell x + 2\ell^2)}$$

Exemplo 3 (continuação):

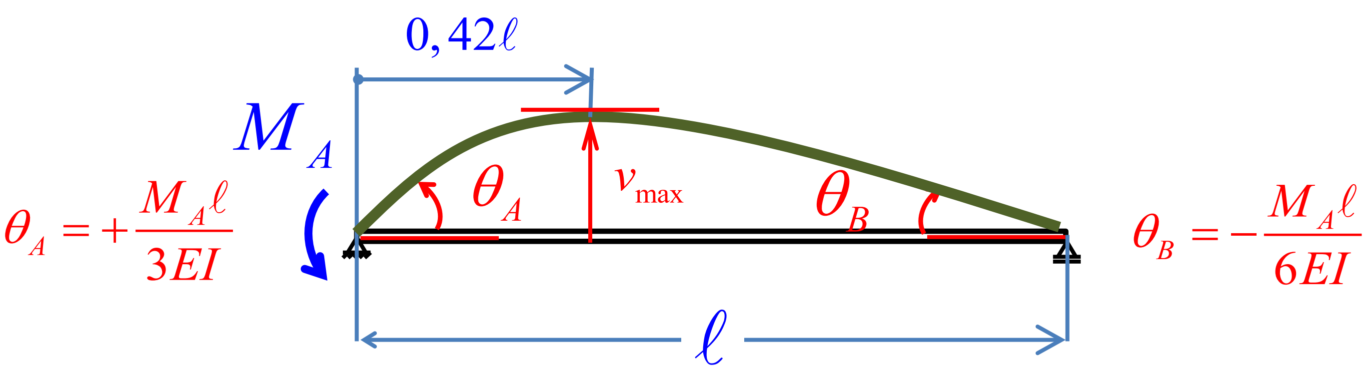
$$\boxed{\theta(x) = \frac{M_A}{6EI\ell}\left(3x^2 - 6\ell x + 2\ell^2\right)}$$

$$\begin{cases} \theta(0) = +\dfrac{M_A \ell}{3EI} \\ \theta(\ell) = -\dfrac{M_A \ell}{6EI} \end{cases}$$

$$\theta(x^*) = \frac{M_A}{6EI\ell}\left(3(x^*)^2 - 6\ell x^* + 2\ell^2\right) = 0$$

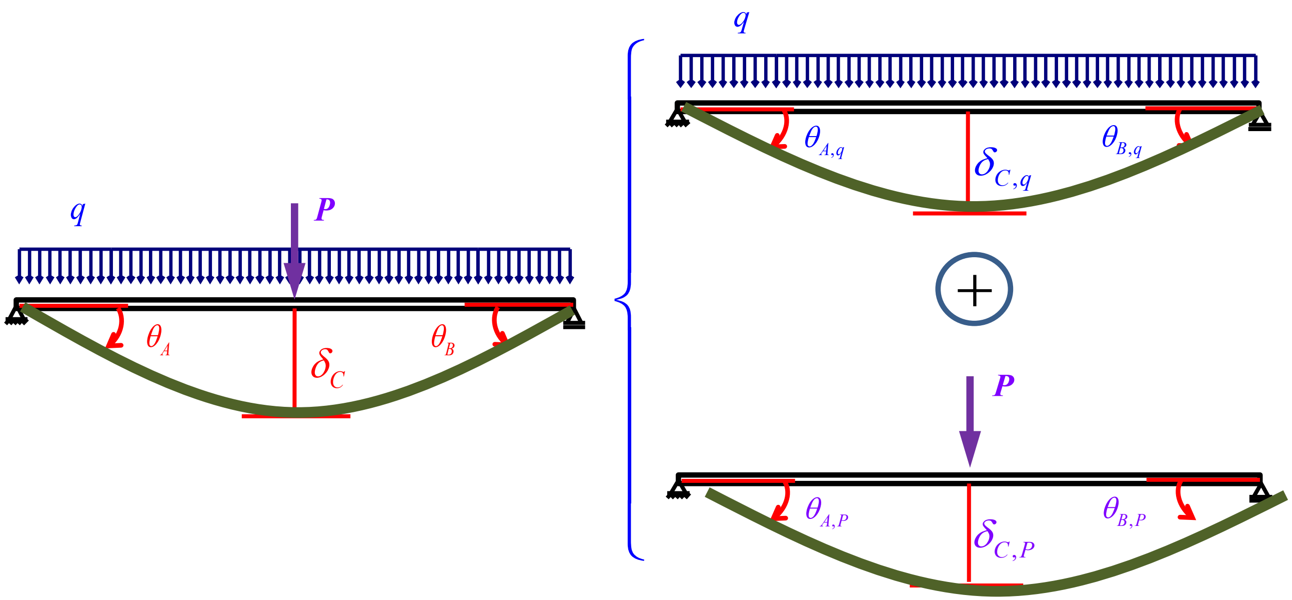
$$3\left(x^*\right)^2 - 6\ell x^* + 2\ell^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^* = \begin{cases} 0,42\ell \\ 1,58\ell \end{cases}$$

$$v_{\max} = v\left(0,42\ell\right) = 0,064\frac{M_A \ell^2}{EI}$$



Superposição de Efeitos

As hipóteses de pequenos deslocamentos e rotações, e equação constitutiva elástico-linear (Lei de Hooke) fazem com que nossa teoria de deslocamentos na flexão também seja linear, sendo então possível aplicar o princípio de ***superposição de efeitos****:*

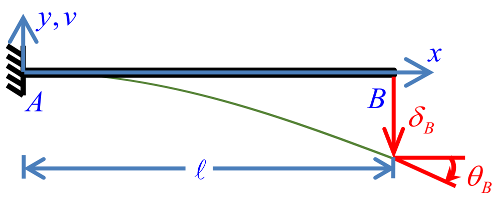


$$\delta_C = \delta_{C,q} + \delta_{C,P}$$

$$\theta_A = \theta_{A,q} + \theta_{A,P}$$

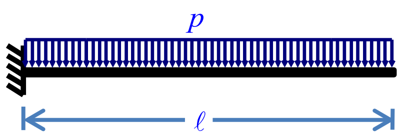
$$\theta_B = \theta_{B,q} + \theta_{B,P}$$

- *Vigas engastadas*



- Deslocamentos transversais: $v(x) = v$
- Rotações: $v'(x) = v'$
- Deslocamento transversal em B: $\delta_B = |v_B|$
- Rotação em B: $\theta_B = |v'_B|$
- EI = constante

1.



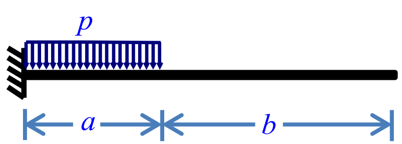
$$v = -\frac{px^2}{24EI}\left(6\ell^2 - 4\ell x + x^2\right)$$

$$\delta_B = \frac{p\ell^4}{8EI}$$

$$v' = -\frac{px}{6EI}\left(3\ell^2 - 3\ell x + x^2\right)$$

$$\theta_B = \frac{p\ell^3}{6EI}$$

2.



$$v = -\frac{px^2}{24EI}\left(6a^2 - 4ax + x^2\right) \qquad (0 \le x \le a)$$

$$v' = -\frac{px}{6EI}\left(3a^2 - 3ax + x^2\right) \qquad (0 \le x \le a)$$

$$v = -\frac{pa^3}{24EI}\left(4x - a\right) \qquad (a \le x \le \ell)$$

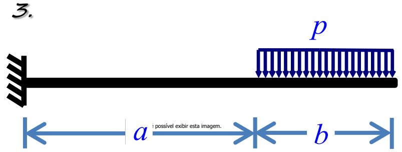
$$v' = -\frac{pa^3}{6EI} \qquad (a \le x \le \ell)$$

Em $x = a$:

$$v = -\frac{pa^4}{8EI} \qquad v' = -\frac{pa^3}{6EI}$$

$$\delta_B = \frac{pa^3}{24EI}\left(4\ell - a\right) \qquad \theta_B = \frac{pa^3}{6EI}$$

3.



$$v=-\frac{pbx^2}{12EI}\left(3\ell+3a-2x\right)\qquad \left(0\le x\le a\right)$$

$$v'=-\frac{pbx}{2EI}\left(\ell+a-x\right)\qquad \left(0\le x\le a\right)$$

$$v=-\frac{p}{24EI}\left(x^4-4\ell x^3+6\ell^2x^2-4a^3x+a^4\right)\qquad \left(a\le x\le \ell\right)$$

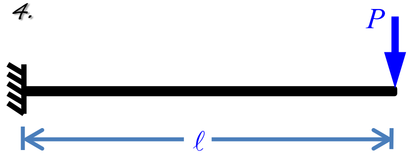
$$v'=-\frac{p}{6EI}\left(x^3-3\ell x^2+3\ell^2x-a^3\right)\qquad \left(a\le x\le \ell\right)$$

$$\delta_B=\frac{p}{24EI}\left(3\ell^4-4a^3\ell+a^4\right)$$

Em $x=a$:

$$v=-\frac{pa^2b}{12EI}\left(3\ell+a\right)\qquad v'=-\frac{pab\ell}{2EI}\qquad \theta_B=\frac{p}{6EI}\left(\ell^3-a^3\right)$$

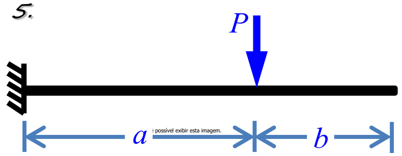
4.



$$v=-\frac{Px^2}{6EI}\left(3\ell-x\right)\qquad \delta_B=\frac{P\ell^3}{3EI}$$

$$v'=-\frac{Px}{2EI}\left(2\ell-x\right)\qquad \theta_B=\frac{P\ell^2}{2EI}$$

5.



$$v=-\frac{Px^2}{6EI}\left(3a-x\right)\qquad \left(0\le x\le a\right)$$

$$v'=-\frac{Px}{2EI}\left(2a-x\right)\qquad \left(0\le x\le a\right)$$

$$v=-\frac{Pa^2}{6EI}\left(3x-a\right)\qquad \left(a\le x\le \ell\right)$$

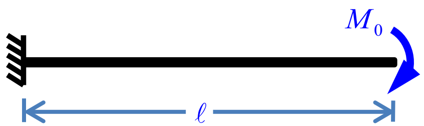
Em $x=a$:

$$v=-\frac{Pa^3}{3EI}\qquad v'=-\frac{Pa^2}{2EI}$$

$$v'=-\frac{Pa^2}{2EI}\qquad \left(a\le x\le \ell\right)$$

$$\delta_B=\frac{Pa^2}{6EI}\left(3\ell-a\right)\qquad \theta_B=\frac{Pa^2}{2EI}$$

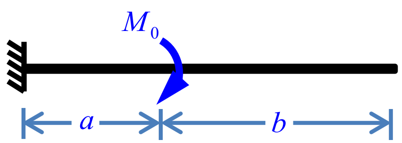
6.



$$v = -\frac{M_0 x^2}{2EI} \qquad v' = -\frac{M_0 x}{EI}$$

$$\delta_B = \frac{M_0 \ell^2}{2EI} \qquad \theta_B = \frac{M_0 \ell}{EI}$$

7.



$$v = -\frac{M_0 x^2}{2EI} \qquad v' = -\frac{M_0 x}{EI} \qquad (0 \le x \le a)$$

$$v = -\frac{M_0 a}{2EI}(2x - a) \qquad (a \le x \le \ell)$$

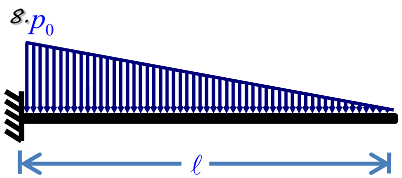
$$v' = -\frac{M_0 a}{EI} \qquad (a \le x \le \ell)$$

Em $x = a$:

$$v = -\frac{M_0 a^2}{2EI} \qquad v' = -\frac{M_0 a}{EI}$$

$$\delta_B = \frac{M_0 a}{2EI}(2\ell - a) \qquad \theta_B = \frac{M_0 a}{EI}$$

8.

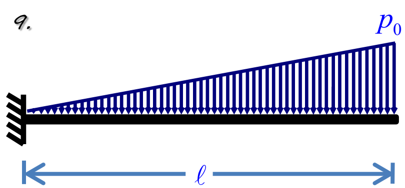


$$v = -\frac{p_0 x^2}{120 \ell EI}\left(10\ell^3 - 10\ell^2 x + 5\ell x^2 - x^3\right)$$

$$v' = -\frac{p_0 x}{24 \ell EI}\left(4\ell^3 - 6\ell^2 x + 4\ell x^2 - x^3\right)$$

$$\delta_B = \frac{p_0 \ell^4}{30EI} \qquad \theta_B = \frac{p_0 \ell^3}{24EI}$$

9.

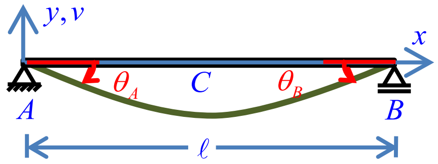


$$v = -\frac{p_0 x^2}{120 \ell EI}\left(20\ell^3 - 10\ell^2 x + x^3\right)$$

$$v' = -\frac{p_0 x}{24 \ell EI}\left(8\ell^3 - 6\ell^2 x + x^3\right)$$

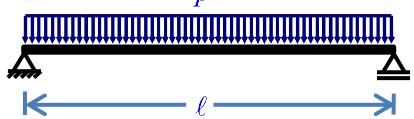
$$\delta_B = \frac{11 p_0 \ell^4}{120EI} \qquad \theta_B = \frac{p_0 \ell^3}{8EI}$$

- ## *Vigas simplesmente apoiadas*



- Deslocamentos transversais: $v(x) = v$
- Rotações: $v'(x) = v'$
- Distância entre A e o ponto de $\delta_{máx}$: x_1
- Deslocamento transversal máximo: $\delta_{máx} = |v(x_1)|$
- Deslocamento transversal em C (ponto médio): $\delta_C = |v_C|$
- Rotação em A: $\theta_A = |v'_A|$
- Rotação em B: $\theta_B = |v'_B|$
- EI = constante

1.

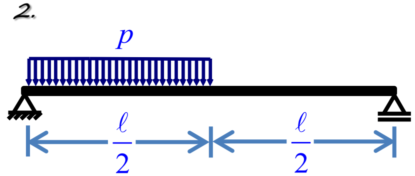


$$v = -\frac{px}{24EI}\left(\ell^3 - 2\ell x^2 + x^3\right)$$

$$v' = -\frac{p}{24EI}\left(\ell^3 - 6\ell x^2 + 4x^3\right)$$

$$\delta_C = \delta_{máx} = \frac{5p\ell^4}{384EI} \qquad \theta_A = \theta_B = \frac{p\ell^3}{24EI}$$

2.



$$v = -\frac{px}{384EI}\left(9\ell^3 - 24\ell x^2 + 16x^3\right) \qquad \left(0 \le x \le \frac{\ell}{2}\right)$$

$$v' = -\frac{p}{384EI}\left(9\ell^3 - 72\ell x^2 + 64x^3\right) \qquad \left(0 \le x \le \frac{\ell}{2}\right)$$

$$v = -\frac{p\ell}{384EI}\left(8x^3 - 24\ell x^2 + 17\ell^2 x - \ell^3\right) \qquad \left(\frac{\ell}{2} \le x \le \ell\right)$$

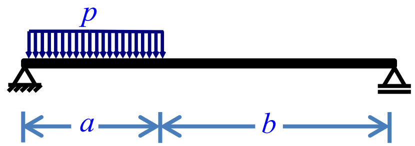
$$v' = -\frac{p\ell}{384EI}\left(24x^2 - 48\ell x + 17\ell^2\right) \qquad \left(\frac{\ell}{2} \le x \le \ell\right)$$

$$\delta_C = \frac{5pL^4}{768EI}$$

$$\theta_A = \frac{3p\ell^3}{128EI}$$

$$\theta_B = \frac{7p\ell^3}{384EI}$$

3.



$$v = -\frac{px}{24\ell EI}\left(a^4 - 4a^3\ell + 4a^2\ell^2 + 2a^2x^2 - 4a\ell x^2 + \ell x^3\right) \qquad (0 \le x \le a)$$

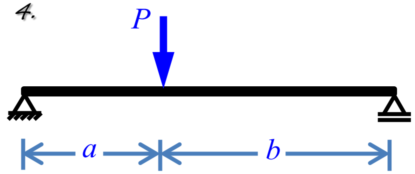
$$v' = -\frac{p}{24\ell EI}\left(a^4 - 4a^3\ell + 4a^2\ell^2 + 6a^2x^2 - 12a\ell x^2 + 4\ell x^3\right) \qquad (0 \le x \le a)$$

$$v = -\frac{pa^2}{24\ell EI}\left(-a^2\ell + 4\ell^2 x + a^2 x - 6\ell x^2 + 2x^3\right) \qquad (a \le x \le \ell)$$

$$v' = -\frac{pa^2}{24\ell EI}\left(4\ell^2 + a^2 - 12\ell x + 6x^2\right) \qquad (a \le x \le \ell)$$

$$\theta_A = \frac{pa^2}{24\ell EI}\left(2\ell - a\right)^2 \qquad \theta_B = \frac{pa^2}{24\ell EI}\left(2\ell^2 - a^2\right)$$

4.



$$v = -\frac{Pbx}{6\ell EI}\left(\ell^2 - b^2 - x^2\right) \qquad (0 \le x \le a)$$

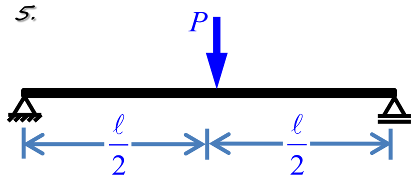
$$v' = -\frac{Pb}{6\ell EI}\left(\ell^2 - b^2 - 3x^2\right) \qquad (0 \le x \le a)$$

$$\theta_A = \frac{Pab}{6\ell EI}\left(\ell + b\right) \qquad \theta_B = \frac{Pab}{6\ell EI}\left(\ell + a\right)$$

Se $a \ge b$: $\delta_C = \dfrac{Pb(3\ell^2 - 4b^2)}{48EI}$ Se $a \le b$: $\delta_C = \dfrac{Pa(3\ell^2 - 4a^2)}{48EI}$

Se $a \ge b$: $x_1 = \sqrt{\dfrac{\ell^2 - b^2}{3}}$ *e* $\delta_{máx} = \dfrac{Pb(\ell^2 - b^2)^{3/2}}{9\sqrt{3}\ell EI}$

5.

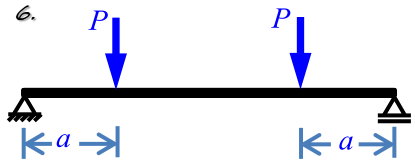


$$v = -\frac{Px}{48EI}\left(3\ell^2 - 4x^2\right) \qquad \left(0 \le x \le \frac{\ell}{2}\right)$$

$$v' = -\frac{P}{16EI}\left(\ell^2 - 4x^2\right) \qquad \left(0 \le x \le \frac{\ell}{2}\right)$$

$$\delta_C = \delta_{máx} = \frac{P\ell^3}{48EI} \qquad \theta_A = \theta_B = \frac{P\ell^2}{16EI}$$

6.



$$v = -\frac{Px}{6EI}\left(3a\ell - 3a^2 - x^2\right) \qquad \left(0 \le x \le a\right)$$

$$v' = -\frac{P}{2EI}\left(a\ell - a^2 - x^2\right) \qquad \left(0 \le x \le a\right)$$

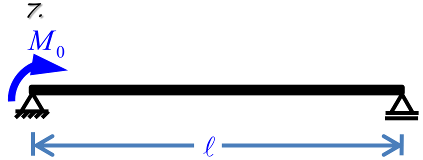
$$v = -\frac{Pa}{6EI}\left(3\ell x - 3x^2 - a^2\right) \qquad \left(a \le x \le \ell - a\right)$$

$$v' = -\frac{Pa}{2EI}\left(\ell - 2x\right) \qquad \left(a \le x \le \ell - a\right)$$

$$\theta_A = \theta_B = \frac{Pa}{2EI}\left(\ell - a\right)$$

$$\delta_C = \delta_{máx} = \frac{Pa}{24EI}\left(3\ell^2 - 4a^2\right)$$

7.



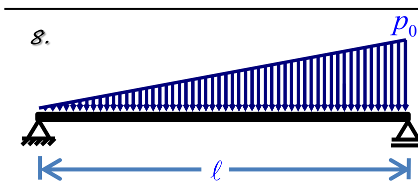
$$v = -\frac{M_0 x}{6\ell EI}\left(2\ell^2 - 3\ell x + x^2\right)$$

$$v' = -\frac{M_0}{6\ell EI}\left(2\ell^2 - 6\ell x + 3x^2\right)$$

$$\delta_C = \frac{M_0\ell^2}{16EI} \qquad \theta_A = \frac{M_0\ell}{3EI} \qquad \theta_B = \frac{M_0\ell}{6EI}$$

$$x_1 = \ell\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \quad e \quad \delta_{máx} = \frac{M_0\ell^2}{9\sqrt{3}EI}$$

8.



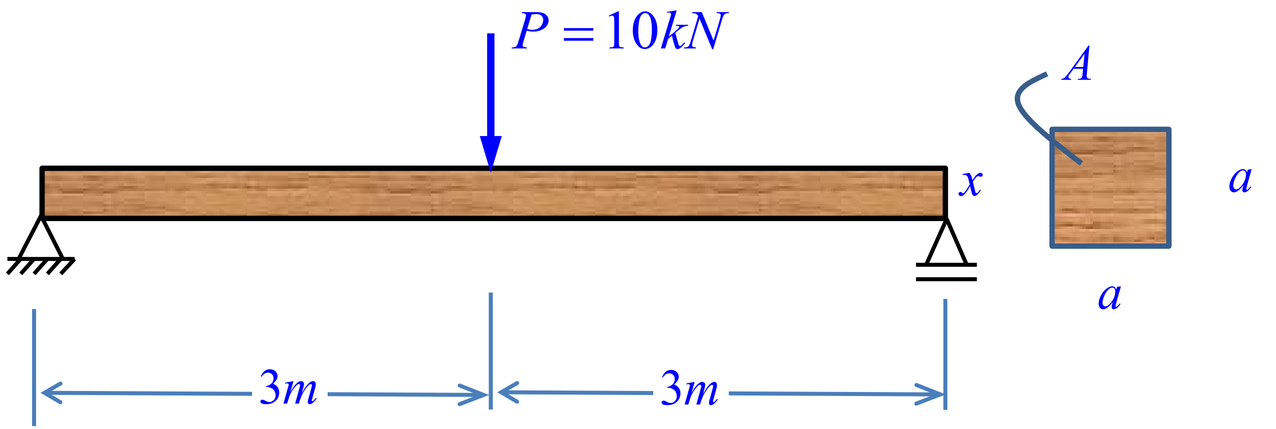
$$v = -\frac{p_0 x}{360\ell EI}\left(7\ell^4 - 10\ell^2x^2 + 3x^4\right)$$

$$v' = -\frac{p_0}{360\ell EI}\left(7\ell^4 - 30\ell^2x^2 + 15x^4\right)$$

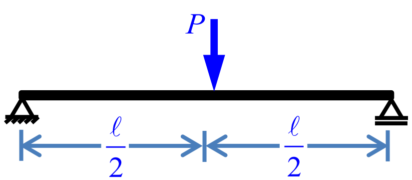
$$\delta_C = \frac{5p_0\ell^4}{768EI} \qquad \theta_A = \frac{7p_0\ell^3}{360EI} \qquad \theta_B = \frac{p_0\ell^3}{45EI}$$

$$x_1 = 0{,}5193\ell \quad e \quad \delta_{máx} = 0{,}00652\frac{p_0\ell^4}{EI}$$

Exemplo 4 – Dimensionar a seção transversal da viga de madeira (E=10GPa), para atender ao limite $\delta \leq \ell / 300$



Nas tabelas encontra-se o caso:



$$\boxed{\delta_C = \frac{P\ell^3}{48EI}}$$

Logo

$$\delta = \frac{P\ell^3}{48EI} = \frac{10 \times 6^3}{48 \times 10^7 \times \left(\frac{a^4}{12}\right)} \leq \frac{6}{300}$$

$$a^4 \geq 12 \times \frac{300}{6} \times \frac{10 \times 6^3}{48 \times 10^7} = 2{,}7 \times 10^{-3} m^4$$

$$a \geq \sqrt[4]{2{,}7 \times 10^{-3}} = 0{,}228m$$

$$\boxed{a \geq 23cm}$$