1ª Lista de Exercicios Entregar dia 11 de abril

1ª Questão: Seja $(G, \cdot)$ um monoide .

I.É a operação $\cdot$ é ~~multiplicativa~~ associativa,
e tem unidade.

Seja ainda
k um corpo, kG o esp vetorial com base G.

Definimos em kG uma estrutura de k-álgebra
dizendo que $\underbrace{g_1 \cdot g_2}_{\text{produto na álgebra}} = \underbrace{g_1 g_2}_{\text{prod no grupo}}$

e extendendo bilinearmente

a) Mostre que se $G = \{t^n : n \in N\}$
$(t^n t^m = t^{n+m})$ então $kG \cong k[t]$

b) Se A é uma k-algebra e
$\varphi : G \to A$ é um morfismo de
monoide então existe um único
morfismo de algebras $\bar{\varphi} : kG \to A$
que estende φ. (Você deve dizer
o que significa "extender φ".

c) Seja G um grupo cíclico de ordem n, $n \in \mathbb{N}$. Mostre que $K[G] \cong K[t]/(t^n - 1)$

2) Seja I ideal (~~bilateral~~) de uma algebra.

Mostre que I é maximal $\Leftrightarrow$ A/I é anel com divisão

3) Seja M um A-módulo (à esquerda), Dado $X \subseteq M$ defina $\operatorname{Ann} X = \{a \in A : ax = 0 \text{ para todo } x \in M\}$

a) Mostre que $\operatorname{Ann} X$ é ideal bilateral

b) Mostre que M admite uma estrutura "natural" de $A/\operatorname{ann} A$ - módulo.

c) Mostre que $\operatorname{ann}(A/\operatorname{ann} A) = 0$

 Entregar 11 de abril

4) Sejam A, B duas k-algebras

${}_B M_A$ um $(B-A)$ bimódulo

(Isto é M é B-módulo à esquerda
A modulo à direita
e além disso $(b(m))a = b(ma)$
para todos $b \in B$, $a \in A$ e $m \in M$.

Seja $R = \begin{bmatrix} A & 0 \\ M & B \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ m & b \end{bmatrix} : a \in A, b \in B, m \in M \right\}$

a) Defina uma estrutura "natural" de k-algebra.

b) Descreva os ideais de R

(Em função dos de A, B e submód M)

5) Seja M um A-módulo e $a \in Z(A)$ = centro de A

Seja $f : M \to M$ dada por

$f(m) = am$

a) Mostre que f é um homomorfismo. (endomorfismo). de A-Modulos

b) Dê um exemplo mostrando que a afirmação não vale (em geral) se $a \notin Z(A)$.

Entregar 11 de abril

6) $f: {}_AM \longrightarrow {}_AN$ hom de A-módulos

a) mostre que M' subm de M então $f(M')$ é subm de N

b) se N' é submódulo de N então $f^{-1}(N')$ é submódulo de M.

7) (Extra) Sejam ${}_BM_A$ e ${}_AN_B$ Bimodulos

Seja $\Lambda = \begin{bmatrix} A & N \\ M & B \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} a & n \\ m & b \end{bmatrix} \right\}$

Exiba condiçoes para aplicações

$\varphi: (M \times N) \longrightarrow B$ e $\psi: N \times M \longrightarrow A$

de modo que Λ se torne uma K-algebra com multiplicação

$$\begin{bmatrix} a & n \\ m & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a' & n' \\ m' & b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa' + \varphi(n,m'), & an' + nb' \\ ma' + bm', & \psi(m,n') + bb' \end{bmatrix}$$

<u>Obs</u>: nesse caso (A, B, ψ, φ) se chama um contexto de Morita.