Aula 1: Teoria de Conjuntos, Espaços Métricos Definição de topologia e Exemplos

Universidade de São Paulo

São Carlos - SP, Brasil

1^o **Semestre de 2023 - Curso de Topologia**

Estes slides tem interseção com as notas de aulas dos professores

- Jorge Mujica (foi professor da IMECC-UNICAMP)
- Leandro Aurichi (professor do ICMC-USP)

Dados dois conjuntos A e B, diremos que A é subconjunto de B, e escreveremos $A \subset B$, se cada elemento de A pertence a B, ou seja se $x \in A$ implica $x \in B$.

Diremos que A é igual a B, e escreveremos $A = B$, se A e B tem os mesmos elementos, ou seja se $A \subset B$ e $B \subset A$.

A união, a interseção, e a diferença de dois conjuntos A e B é definida por

$$A \cup B = \{x : x \in A \quad \text{ou} \quad x \in B\},$$

$$A \cap B = \{x : x \in A \quad \text{e} \quad x \in B\},$$

$$A \backslash B = \{x : x \in A \quad \text{e} \quad x \notin B\}.$$

Se estamos considerando subconjuntos de um conjunto fixo X, então o conjunto $X \backslash A$ é chamado de complementar de A em X, e é também denotado por A^c.

A união e a interseção de uma família de conjuntos $A_i (i \in I)$ é definida por

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x : x \in A_i \text{ para algum } i \in I\},$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x : x \in A_i \text{ para todo } i \in I\}.$$

Dado um conjunto $X, \mathcal{P}(X)$ denota o conjunto formado pelos subconjuntos de X, ou seja

$$\mathcal{P}(X) = \{A : A \subset X\}.$$

$\emptyset$ denota o conjunto vazio. $\mathbb{N}$ denota o conjunto dos números naturais, ou seja o conjunto dos inteiros positivos. $\mathbb{Z}$ denota o conjunto dos inteiros. $\mathbb{Q}$ denota o conjunto dos números racionais. $\mathbb{R}$ denota o conjunto dos números reais. $\mathbb{C}$ denota o conjunto dos números complexos.

O produto cartesiano $X \times Y$ de dois conjuntos X e Y é o conjunto dos pares ordenados (x, y) tais que $x \in X$ e $y \in Y$. O produto cartesiano $X_1 \times \ldots \times X_n$ de n conjuntos $X_1, \ldots, X_n$ é o conjunto das n-uplas $(x_1, \ldots, x_n)$ tais que $x_i \in X_i$ para $i = 1, \ldots, n$. Escreveremos X^n em lugar de $X \times \ldots \times X$ (n vezes).

Uma função ou aplicação f de X em Y, denotada por $f : X \to Y$, é uma regra que associa a cada elemento $x \in X$ um único elemento $f(x) \in Y$. O conjunto X é chamado de domínio de f. O conjunto Y é chamado de contradomínio de f. f é dita injetiva se $f(x_1) = f(x_2)$ implica $x_1 = x_2$.f é dita sobrejetiva se para cada $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$. f é dita bijetiva se é injetiva e sobrejetiva. Se $f : X \to Y$ é bijetiva, a função inversa $f^{-1} : Y \to X$ é definida por $f^{-1}(y) = x$ se $f(x) = y$.
O gráfico de f é o conjunto

$$G_f = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}.$$

Dados $A \subset X$ e $B \subset Y$, a imagem de A e a imagem inversa de B são os conjuntos

$$f(A) = \{y \in Y : y = f(x) \text{ para algum } x \in A\},$$

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}.$$

Dadas duas aplicações $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$, a aplicação composta $g \circ f : X \to Z$ é definida por $g \circ f(x) = g(f(x))$ para todo $x \in X$.

Uma relação R num conjunto X é um subconjunto R de $X \times X$. Com frequência escreveremos xRy se $(x, y) \in R$.

Uma relação R em X é dita reflexiva se xRx para todo $x \in X$.R é dita simétrica se xRy implica yRx. R é dita transitiva se xRy e yRz implicam xRz. Diremos que R é uma relação de equivalência se R é reflexiva, simétrica e transitiva.

1. Se $A_i \subset X$ para cada $i \in I$, prove as leis de De Morgan:
   1.1 $X \backslash \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (X \backslash A_i)$.
   1.2 $X \backslash \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (X \backslash A_i)$.
2. Seja $f : X \to Y$ uma aplicação. Dados $B \subset Y$ e $B_i \subset Y$ para cada $i \in I$, prove que:
   2.1 $f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$.
   2.2 $f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i)$.
   2.3 $f^{-1}(Y \backslash B) = X \backslash f^{-1}(B)$.
3. Seja $f : X \to Y$ uma aplicação. Dados $A \subset X$ e $A_i \subset X$ para cada $i \in I$, prove que:
   3.1 $f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$.
   3.2 $f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i \in I} f(A_i)$, com igualdade se f for injetiva.
   3.3 $f(X \backslash A) \subset Y \backslash f(A)$ se f for injetiva.
   3.4 $f(X \backslash A) \supset Y \backslash f(A)$ se f for sobrejetiva.

4. Dê exemplo de uma aplicação $f : X \to Y$ e conjuntos $A_1, A_2 \subset X$ tais que $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$.
5. Dê exemplo de uma aplicação $f : X \to Y$ e um conjunto $A \subset X$ tal que $f(X \backslash A) \neq Y \backslash f(A)$
6. Seja $f : X \to Y$ uma aplicação. Dados $A \subset X$ e $B \subset Y$, prove que:
   6.1 $A \subset f^{-1}(f(A))$, com igualdade se f for injetiva.
   6.2 $f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$, com igualdade se f for sobrejetiva.
7. Dê exemplo de uma aplicação $f : X \to Y$ e um conjunto $A \subset X$ tal que $A \neq f^{-1}(f(A))$.
8. Dê exemplo de uma aplicação $f : X \to Y$ e um conjunto $B \subset Y$ tal que $f\left(f^{-1}(B)\right) \neq B$.
9. Sejam $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ aplicações tais que $g \circ f(x) = x$ para todo $x \in X$. Prove que f é injetiva e g é sobrejetiva.

Definição

Seja X um conjunto não vazio. Uma aplicação $d : X \times X \to \mathbb{R}$ com as propriedades

i) $d(x, y) \geq 0$ para quaisquer $x, y \in X$

ii) $d(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$

iii) $d(x, y) = d(y, x)$ para quaisquer $x, y \in X$

iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ para quaisquer $x, y, z \in X$ (Desigualdade triangular)

é chamada métrica em X.

O par (X, d) é chamado de espaço métrico. Com frequência falaremos do espaço métrico X em lugar do espaço métrico (X, d).

Observação

$$|d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z)$$

Prova: A desigualdade acima é equivalente a

$$-d(y, z) \leq d(x, y) - d(x, z) \leq d(y, z) \Leftrightarrow d(x, z) - d(y, z) \leq d(x, y) \leq d(y, z) + d(x, z)$$

e estas duas desigualdades seguem da desigualdade triangular.

Exemplo 1

1. $X=\mathbb{R}, d(x,y)=|x-y|$.
2. $X=\mathbb{R}^n, d(x,y)=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(x_j-y_j)^2}$. *Esta é a* *métrica euclideana.*
3. $X=\mathbb{R}^n, d(x,y)=\sum_{j=1}^{n}|x_j-y_j|$.
4. $X=\mathbb{R}^n, d(x,y)=\max\{|x_1-y_1|,\dots,|x_n-y_n|\}$.

   Em 2., 3. e 4. $x=(x_1,\dots,x_n), y=(y_1,\dots,y_n)$.
5. *Se X é um conjunto qualquer, então a métrica $d: X\times X\to\mathbb{R}$ definida por $d(x,y)=1$ se $x\neq y$ e $d(x,y)=0$ se $x=y$, é chamada de* *métrica discreta*
6. *Seja (X,d) um espaço métrico, e seja $S\subset X$. Então S é um espaço métrico com a métrica induzida d_S, ou seja $d_S(x,y)=d(x,y)$ para todo $x,y\in S$.*

Exemplo 2 (Exercício)

Considere $X = C^1([0,1],\mathbb{R})$ *e* $d_1, d_2 : X \times X \to \mathbb{R}$ *dadas por*

$$d_1(f,g) = \max_{x\in[0,1]} |f'(x) - g'(x)|, \qquad d_2(f,g) = \max_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)| + d_1(f,g), \quad f,g \in X$$

Então d_1 não é uma métrica em X e d_2 é uma métrica em X.

Definição 3

Seja X um espaço métrico. Dados $a \in X$ e $r > 0$, consideremos os conjuntos

$$B(a;r) = \{x \in X : d(x,a) < r\},$$
$$B[a;r] = \{x \in X : d(x,a) \leq r\}.$$

O conjunto $B(a;r)$ é chamado de bola aberta de centro a e raio r. O conjunto $B[a;r]$ é chamado de bola fechada de centro a e raio r.

Definição 4

Seja X um espaço métrico. Um conjunto $U \subset X$ é dito aberto em X se para cada $a \in U$ existe $r > 0$ tal que $B(a;r) \subset U$. Um conjunto $F \subset X$ é dito fechado em X se $X \backslash F$ é aberto em X.

Exemplo 5

(a) *Cada bola aberta é um subconjunto aberto.*

(b) *Cada bola fechada é um subconjunto fechado.*

Demonstração. (a) Seja $x \in B(a;r)$. Usando a desigualdade triangular é fácil verificar que $B(x; r - d(x,a)) \subset B(a;r)$, e portanto $B(a;r)$ é aberto. De fato:

$$y \in B(x; r - d(x,a)) \Rightarrow d(y,a) \leq d(y,x) + d(x,a) < r - d(x,a) + d(x,a) = r.$$

(b) Para provar que $B[a;r]$ é fechado, basta provar que $X \backslash B[a;r]$ é aberto. Seja $x \in X \backslash B[a;r]$. Usando a desigualdade triangular não é difícil provar, por absurdo, que

$$B(x; d(x,a) - r) \subset X \backslash B[a;r]$$

e portanto $X \backslash B[a;r]$ é aberto. De fato, se $y \in B(x; d(x,a) - r)$, então

$$d(a,y) \geq d(x,a) - d(x,y) > d(x,a) - d(x,a) + r = r.$$

Proposição 6

Seja X um espaço métrico. Então:

(a) *$\emptyset$ e X são abertos.*

(b) *A união de uma família arbitrária de abertos é um aberto.*

(c) *A interseção de uma familia finita de abertos é um aberto.*

Demonstração. (a) é claro.

(b) Seja U_i aberto em X para cada $i \in I$, e seja $a \in \bigcup_{i \in I} U_i$. Então $a \in U_{i_0}$ para algum $i_0 \in I$. Como U_{i_0} é aberto, existe $r > 0$ tal que $B(a; r) \subset U_{i_0}$. Logo $B(a; r) \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ e $\bigcup_{i \in I} U_i$ é aberto.

(c) Seja U_i aberto em X para cada $i \in I$, sendo I finito. Seja $a \in \bigcap_{i \in I} U_i$, ou seja $a \in U_i$ para cada $i \in I$. Para cada $i \in I$ existe $r_i > 0$ tal que $B\left(a; r_i\right) \subset U_i$. Seja $r = \min_{i \in I} r_i$. Segue que $B(a; r) \subset \bigcap_{i \in I} U_i$ e, portanto, $\bigcap_{i \in I} U_i$ é aberto.

Corolário 7

Seja X um espaço métrico. Então:

(a) X *e* $\emptyset$ *são fechados.*

(b) *A interseção de uma família arbitrária de fechados é um fechado.*

(c) *A união de uma família finita de fechados é um fechado.*

Demonstração. Basta aplicar a Proposição anterior e as leis de De Morgan.

Definição 8

*Seja $f : X \to Y$, sendo X e Y espaços métricos. Diremos que **f é continua em $a \in X$** se dado $\epsilon > 0$, podemos achar $\delta > 0$ tal que*

$$d_X(x, a) < \delta \text{ implica } d_Y(f(x), f(a)) < \epsilon$$

ou seja

$$f(B_X(a; \delta)) \subset B_Y(f(a); \epsilon).$$

*Diremos que **f é contínua** se for contínua em cada ponto de X.*

Denotaremos por $C(X; Y)$ o conjunto de todas as funções contínuas $f : X \to Y$. Se $Y = \mathbb{R}$, escreveremos $C(X)$ em lugar de $C(X; \mathbb{R})$.

Proposição 9

Seja $f : X \to Y$, sendo X e Y espaços métricos. Então f é contínua num ponto $a \in X$ se e só se, para cada aberto V de Y contendo $f(a)$, existe um aberto U de X contendo a tal que $f(U) \subset V$.

Demonstração. $(\Rightarrow)$: Seja V um aberto de Y contendo $f(a)$. Seja $\epsilon > 0$ tal que $B_Y(f(a); \epsilon) \subset V$. Por hipótese existe $\delta > 0$ tal que $f\left(B_X(a; \delta)\right) \subset B_Y(f(a); \epsilon)$. Logo basta tomar $U = B_X(a; \delta)$.

$(\Leftarrow)$: Dado $\epsilon > 0$, seja $V = B_Y(f(a); \epsilon)$. Por hipótese existe um aberto U de X contendo a tal que $f(U) \subset V$. Seja $\delta > 0$ tal que $B_X(a; \delta) \subset U$. Segue que $f\left(B_X(a; \delta)\right) \subset B_Y(f(a); \epsilon)$.

Proposição 10

Seja $f : X \to Y$, sendo X e Y espaços métricos. Então são equivalentes:

(a) *f é contínua.*

(b) *$f^{-1}(V)$ é aberto em X para cada aberto V de Y.*

(c) *$f^{-1}(B)$ é fechado em X para cada fechado B de Y.*

Demonstração. $(a) \Rightarrow (b)$: Seja V um aberto de Y. Pela Proposição anterior, para cada $a \in f^{-1}(V)$, existe um aberto U_a de X contendo a tal que $f(U_a) \subset V$, ou seja $U_a \subset f^{-1}(V)$. Segue que

$$f^{-1}(V) = \bigcup \left\{ U_a : a \in f^{-1}(V) \right\} \qquad \text{é aberto em } X.$$

$(b) \Rightarrow (a)$: Basta provar que f é contínua em cada $a \in X$. Seja $a \in X$, e seja V um aberto de Y contendo $f(a)$. Por hipótese $f^{-1}(V)$ é um aberto de X contendo a, e $f\left(f^{-1}(V)\right) \subset V$ (Exercício 6.2 de Teoria de Conjuntos). Então, pela Proposição anterior, f é contínua em a.
A equivalência $(b) \Leftrightarrow (c)$ é consequência direta do Exercício 2.3 de Teoria de Conjuntos.

1. Prove que as seguintes funções são métricas em $C([a,b];\mathbb{R})$:
   1.1 $d(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : a \leq x \leq b\}$.
   1.2 $d(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$.
2. Considere $X = C^1([0,1];\mathbb{R})$ e $d_1, d_2 : X \times X \to \mathbb{R}$ dadas por

$$d_1(f,g) = \max_{x \in [0,1]} |f'(x) - g'(x)|, \qquad d_2(f,g) = \max_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)| + d_1(f,g), \quad f, g \in X$$

   Mostre que d_1 não é uma métrica em X e que d_2 é uma métrica em X.
3. Seja X um espaço métrico.
   3.1 Prove que, para cada $a \in X$ a função $x \in X \to d(x,a) \in \mathbb{R}$ é contínua.
   3.2 Prove que a esfera

$$S(a;r) = \{x \in X : d(x,a) = r\}$$

   é um subconjunto fechado.

4. Seja X um espaço métrico, e seja $S \subset X$, com a métrica induzida.
    4.1 Dados $a \in S$ e $r > 0$, prove que $B_S(a; r) = S \cap B_X(a; r)$.
    4.2 Prove que um conjunto $U \subset S$ é aberto em S se e só se existe um aberto V de X tal que $U = S \cap V$.
5. Seja $X = \mathbb{R}$, e seja $S = \mathbb{Z}$, com a métrica induzida. Prove que cada subconjunto de S é aberto em S.
6. Dê exemplo de uma sequência de abertos de $\mathbb{R}$ cuja interseção não seja um aberto.
7. Dê exemplo de uma sequência de fechados de $\mathbb{R}$ cuja união não seja um fechado.

Definição 11

Seja X um conjunto. Chamaremos de ***topologia*** *em X uma família τ de subconjuntos de X com as seguintes propriedades:*

(a) $\emptyset$ *e X pertencem a τ.*

(b) *A união de uma família arbitrária de membros de τ pertence a τ.*

(c) *A interseção de uma família finita de membros de τ pertence a τ.*

Os membros de τ são chamados de ***abertos*** *de X. O par (X, τ) é chamado de espaço topológico. Com frequência diremos que X é um espaço topológico.*

Exemplo 12

(a) *Se* (X, d) *é um espaço métrico, então segue da Proposição da página 15 que os abertos de* (X, d) *formam uma topologia* τ_d *em* X.

(b) *Se* $X = \mathbb{R}^n$, *então a topologia* τ_d *dada pela métrica euclideana*

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2}$$

é chamada de topologia usual.

(c) *Seja* X *um conjunto qualquer, e seja* τ *a família de todos os subconjuntos de* X. *Claramente* τ *é uma topologia em* X, *chamada de topologia discreta.*

(d) *Seja* X *um conjunto qualquer, e seja* $\tau = \{\emptyset, X\}$. *Claramente* τ *é uma topologia em* X, *chamada de topologia trivial.*

Definição 13

Diremos que um espaço topológico (X, τ) *é metrizável se existir uma métrica d em X tal que* $\tau = \tau_d$.

Notemos que a topologia discreta é sempre metrizável, e vem dada pela métrica discreta.

Definição 14

Dadas duas topologias τ_1 *e* τ_2 *num conjunto X, diremos que* τ_1 *é mais fraca que* τ_2*, ou que* τ_2 *é mais forte que* τ_1*, ou que* τ_2 *é mais fina que* τ_1 *se* $\tau_1 \subset \tau_2$.

A topologia trivial em X é mais fraca que qualquer outra topologia em X. A topologia discreta em X é mais fina que qualquer outra topologia em X.

Definição 15

Seja X um espaço topológico. Diremos que um conjunto $F \subset X$ *é fechado se* $X \backslash F$ *é aberto de X.*

Proposição 16

Seja X um espaço topológico. Então:

(a) *X e $\emptyset$ são fechados.*

(b) *A interseção de uma família arbitrária de fechados é um fechado.*

(c) *A união de uma família finita de fechados é um fechado.*

Demonstração. Basta aplicar as leis de de Morgan.

Proposição 17

Seja X um conjunto, e seja $\mathcal{F}$ uma familia de subconjuntos de X tal que:

(a) *X e $\emptyset$ pertencem a $\mathcal{F}$.*

(b) *A interseção de uma família arbitrária de membros de $\mathcal{F}$ pertence a $\mathcal{F}$.*

(c) *A união de uma familia finita de membros de $\mathcal{F}$ pertence a $\mathcal{F}$.*

Seja $\tau = \{X \backslash F : F \in \mathcal{F}\}$. Então τ é uma topologia em X, e $\mathcal{F}$ coincide com a família dos fechados de (X, τ).

Demonstração. Basta aplicar as leis de De Morgan.

Muitas vezes é mais conveniente descrever a topologia de forma mais local. Uma definição que ajuda tal direção é a seguinte:

Definição 18

Seja (X, τ) um espaço topológico. Dado $x \in X$, dizemos que $V \subset X$ é uma ***vizinhança de*** x *se existe A aberto tal que $x \in A \subset V$.*

1. Prove que as métricas do Exemplos 2, 3 e 4 da página 11 definem a mesma topologia em $\mathbb{R}^n$.
2. Seja $X = \{a, b\}$, com $a \neq b$, e seja
$$\tau = \{\emptyset, \{a\}, X\}$$
Prove que τ é uma topologia em X. O espaço (X, τ) é chamado de espaço de Sierpinski.
3. Seja X um conjunto, e seja
$$\mathcal{F} = \{X\} \cup \{F \subset X : F \text{ é finito }\}$$
Prove que $\mathcal{F}$ é a família de fechados de uma topologia em X, conhecida como topologia cofinita. Você reconhece esta topologia quando X é finito?
4. Seja X um conjunto, e seja
$$\mathcal{F} = \{X\} \cup \{F \subset X : F \text{ é enumerável }\}$$
Prove que $\mathcal{F}$ é a família de fechados de uma topologia em X, conhecida como topologia coenumerável. Você reconhece esta topologia quando X é enumerável?

5. Seja X um conjunto, seja $A \subset X$, e seja

$$\tau_A = \{\emptyset\} \cup \{U : A \subset U \subset X\}$$

   (a) Prove que τ_A é uma topologia em X.
   (b) Descreva os fechados de (X, τ_A).
   (c) Você reconhece τ_A quando $A = \emptyset$ e quando $A = X$?

6. Seja (X, τ) um espaço topológico. Seja $Y \subset X$. Considere

$$\sigma = \{A \cap Y : A \in \tau\}.$$

   (i) Mostre que σ é uma topologia sobre Y - esta é conhecida como topologiadesubespaço - em geral, numa situação $Y \subset X$, se nada for dito, estamos supondo em Y tal topologia.
   (ii) Considere $[0, 1]$ com a topologia de subespaço de $\mathbb{R}$. Mostre que $\left[0, \frac{1}{2}\right[$ é aberto em $[0, 1]$ mas não é aberto em $\mathbb{R}$.

7. Considere $\mathbb{R}$ com a seguinte topologia

$$\tau = \{A \subset \mathbb{R} : \forall\, a \in A,\ \exists\, r > 0,\ [a, a + r[\subset A\}$$

(i) Verifique que τ de fato é uma topologia. Esse espaço é chamado de **reta de Sorgenfrey**.

(ii) Mostre que todo aberto usual nos reais é um aberto na reta de Sorgenfrey.