

Filtros Digitais

Estruturas para sistemas de tempo discreto

Introdução

Introdução

Sistema LTI

Entrada e saída satisfazem uma equação de diferenças

$$y[n] = \frac{1}{a_0} \left(\sum_{k=0}^M b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] \right)$$

RF pode ser usada para obter a equação de diferenças

RI \leftrightarrow RF

São descrições equivalentes do sistema



Introdução

Sistema LTI

Entrada e saída satisfazem uma equação de diferenças

$$y[n] = \frac{1}{a_0} \left(\sum_{k=0}^M b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] \right)$$

RF pode ser usada para obter a equação de diferenças

RI \leftrightarrow RF

São descrições equivalentes do sistema



Interconexão de operações elementares

Soma

Multiplicação por constante

Atrasos

Estruturas para sistemas de tempo discreto

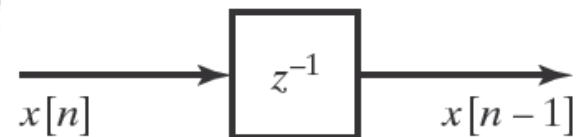
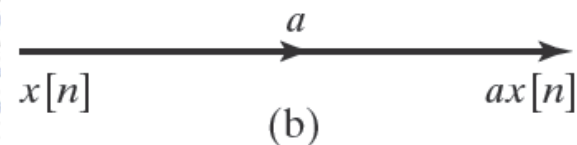
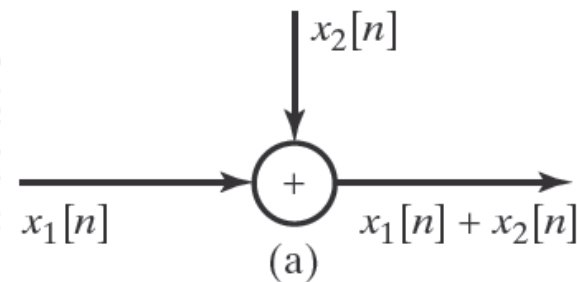
REPRESENTAÇÃO EM DIAGRAMAS DE BLOCOS DE EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS LINEARES COM COEFICIENTES CONSTANTES

Representação em diagrama de blocos de equações de diferenças lineares com coeficientes constantes

- Os elementos básicos necessários para a implementação de um sistema LIT de tempo discreto são:
 - ✓ somadores,
 - ✓ multiplicadores e
 - ✓ memória para armazenar os valores atrasados de sequência e os coeficientes.

Representação em diagrama de blocos de equações de diferenças lineares com coeficientes constantes

A interconexão desses elementos básicos é convenientemente representada por diagramas de blocos compostos dos símbolos gráficos básicos mostrados ao lado.



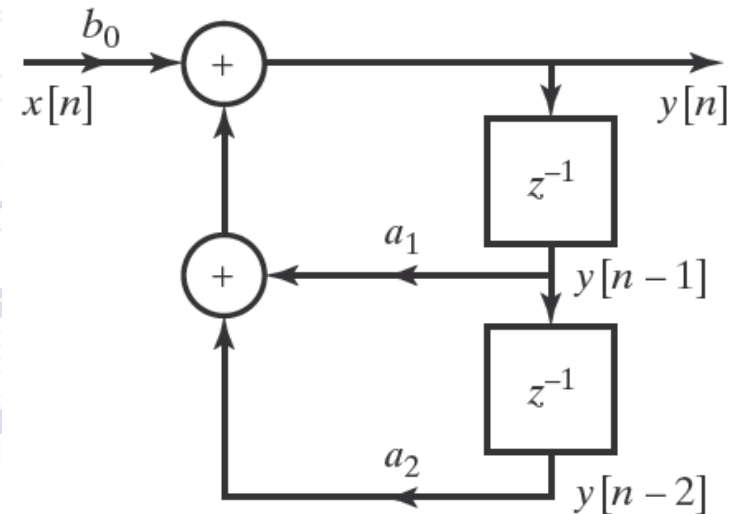
Representação em diagrama de blocos de equações de diferenças lineares com coeficientes constantes

Exemplo

Representação em diagrama de blocos de uma equação de diferenças de ordem 2.

$$y[n] = a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + b_0 x[n].$$

$$H(z) = \frac{b_0}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}}.$$

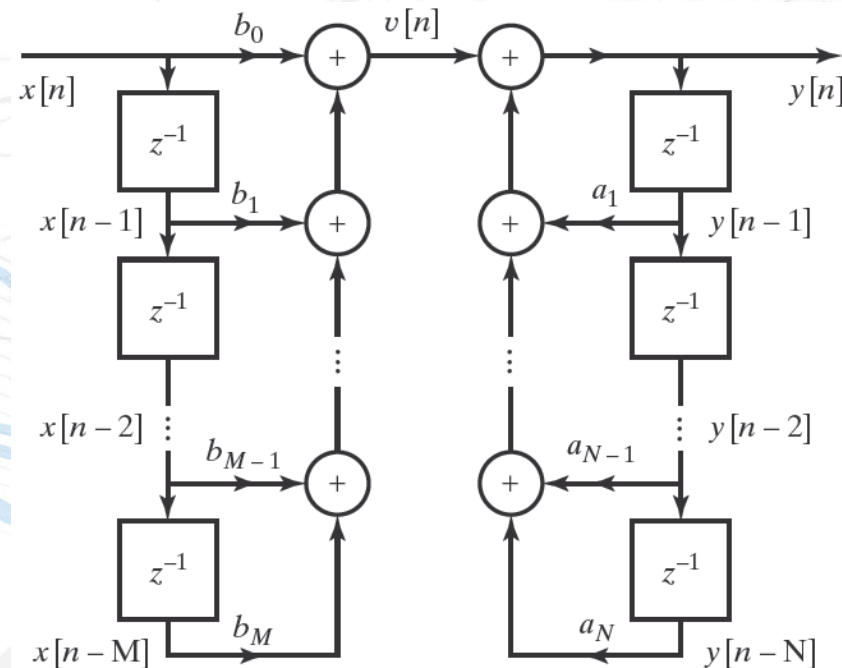


Representação em diagrama de blocos de equações de diferenças lineares com coeficientes constantes

- Representação por diagrama de blocos para uma equação de diferenças geral de ordem N .

$$y[n] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k],$$

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}.$$



Representação em diagrama de blocos de equações de diferenças lineares com coeficientes constantes

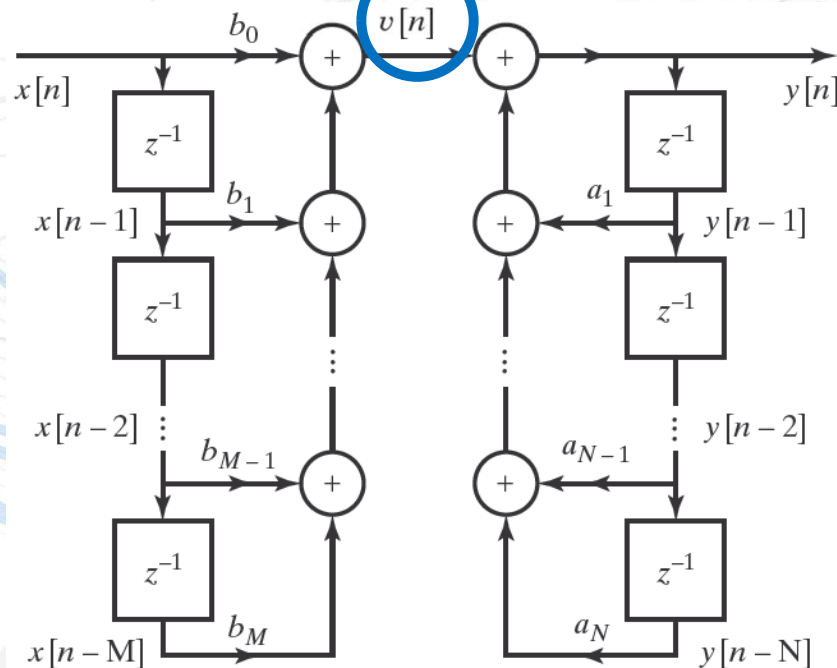
- Representação por diagrama de blocos para uma equação de diferenças geral de ordem N .

$$y[n] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k],$$

$$y[n] = \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^M b_k x[n-k].$$

$$v[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k],$$

$$y[n] = \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + v[n].$$

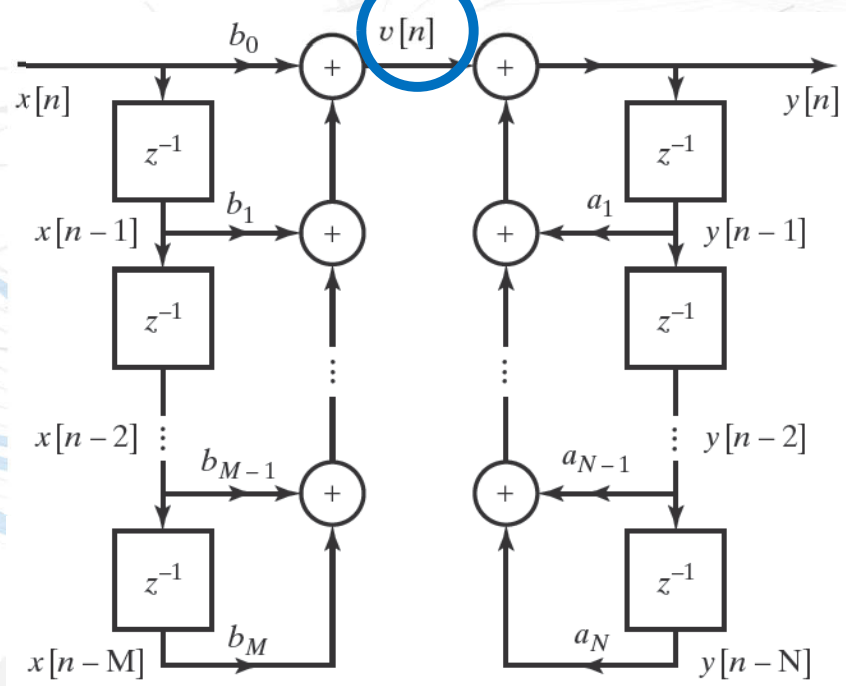


Representação em diagrama de blocos de equações de diferenças lineares com coeficientes constantes

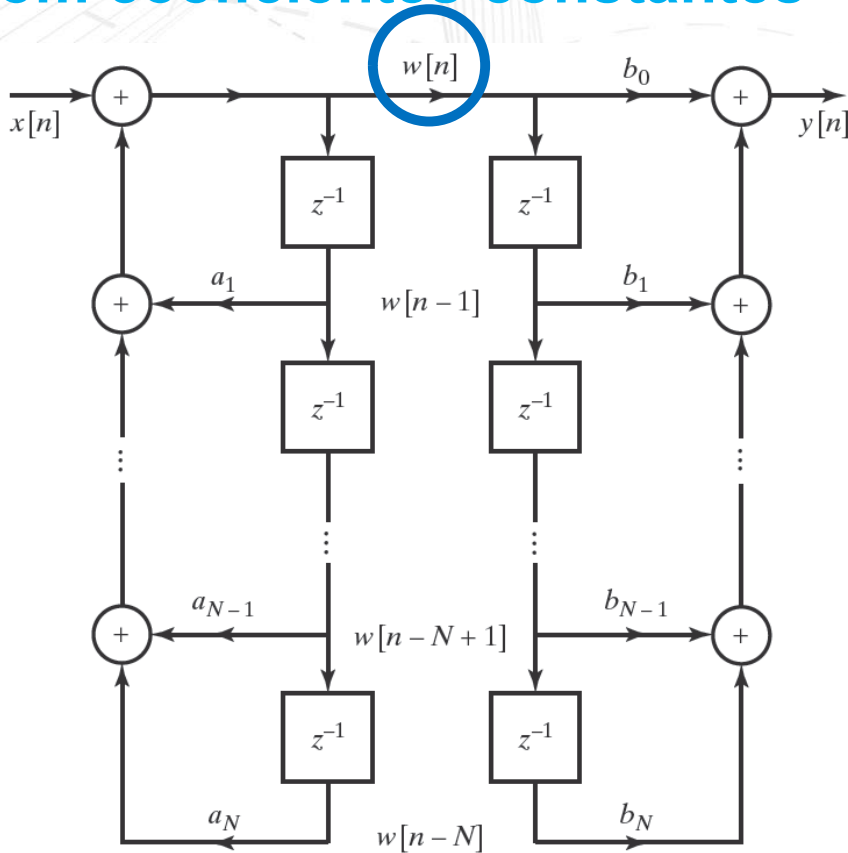
Cascata de sistemas

$$v[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k],$$

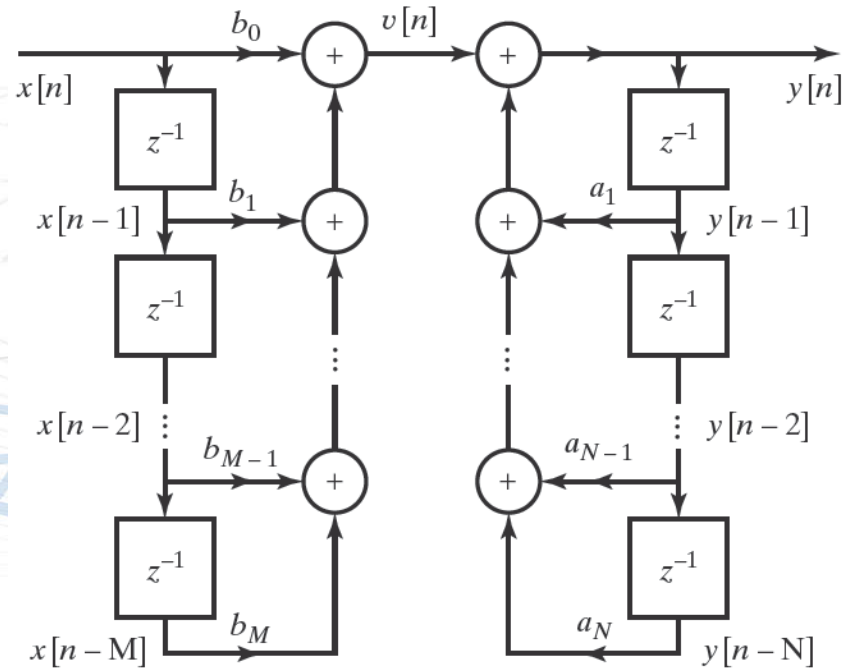
$$y[n] = \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + v[n].$$



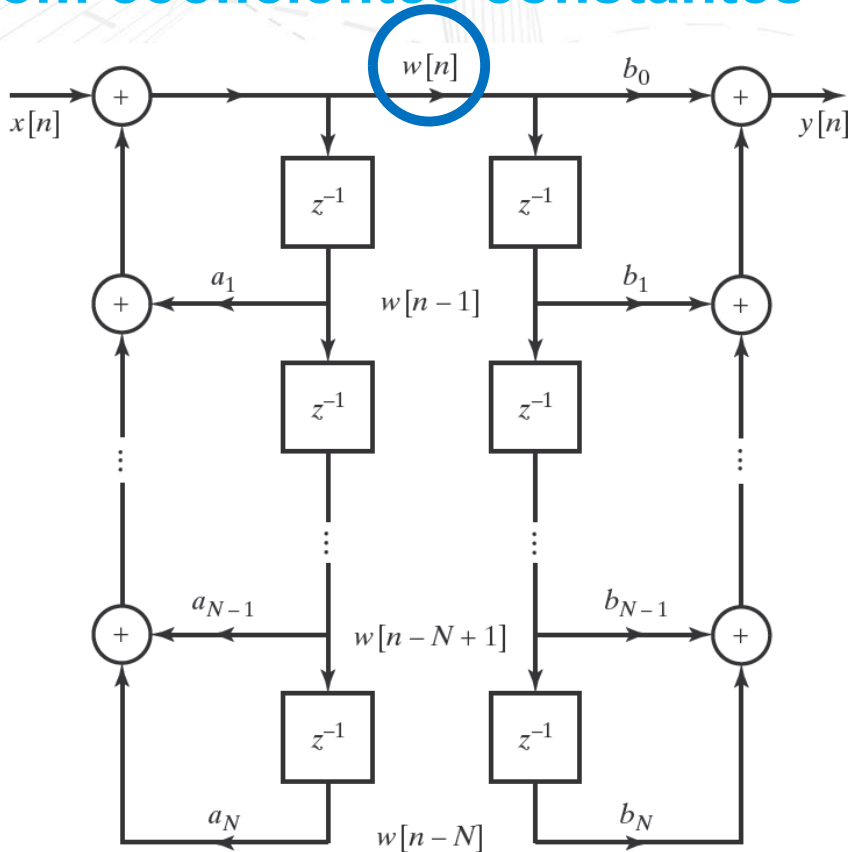
Representação em diagrama de blocos de equações de diferenças lineares com coeficientes constantes



$N=M$ por conveniência



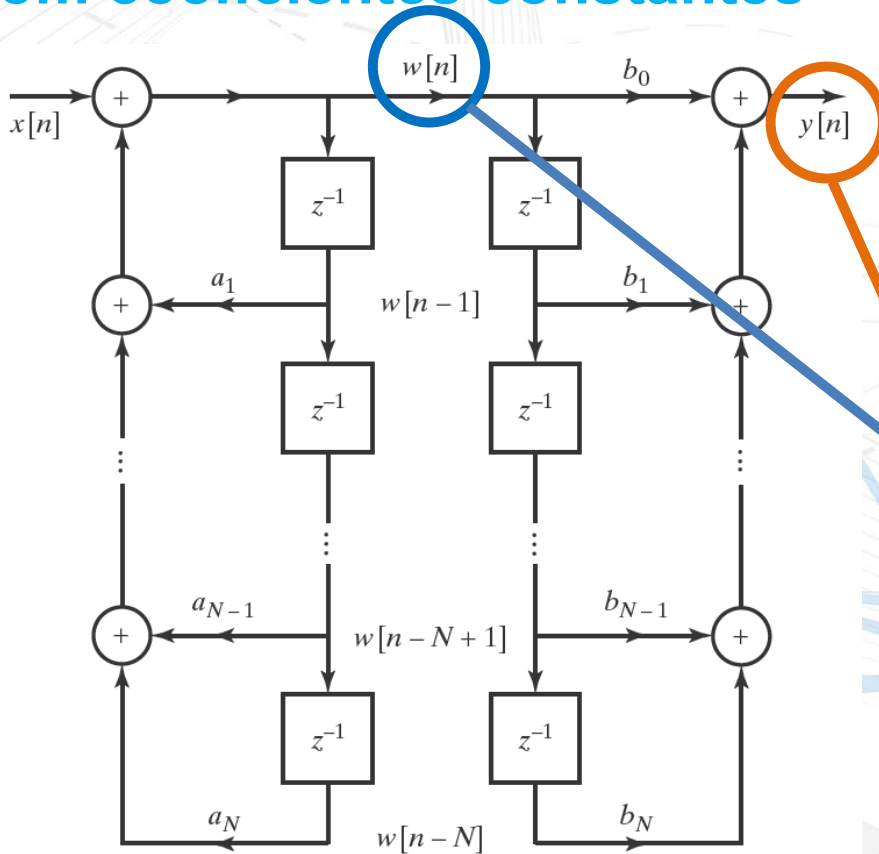
Representação em diagrama de blocos de equações de diferenças lineares com coeficientes constantes



$$w[n] = \sum_{k=1}^N a_k w[n-k] + x[n],$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k w[n-k].$$

Representação em diagrama de blocos de equações de diferenças lineares com coeficientes constantes



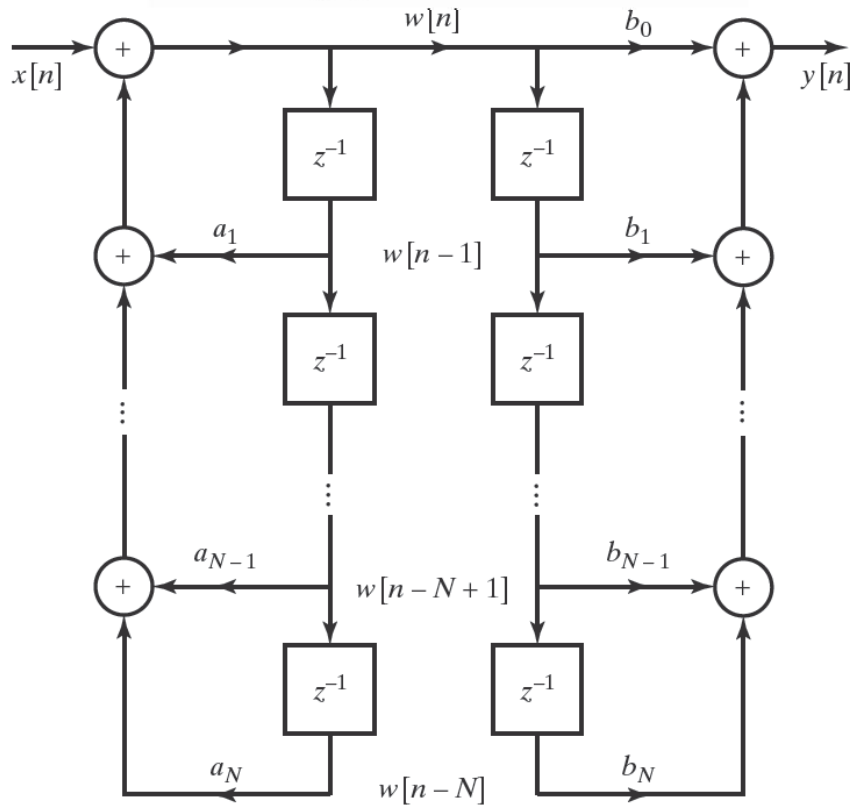
$$H(z) = H_1(z)H_2(z) = \left(\sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \right) \left(\frac{1}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \right)$$

$$W(z) = H_2(z)X(z) = \left(\frac{1}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \right) X(z),$$

$$Y(z) = H_1(z)W(z) = \left(\sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \right) W(z).$$

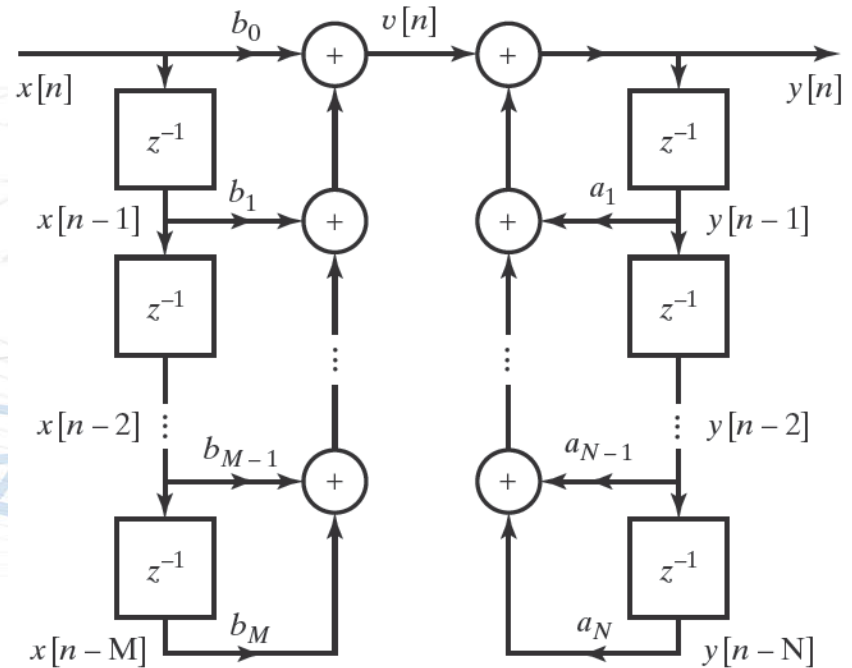
$$w[n] = \sum_{k=1}^N a_k w[n-k] + x[n],$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k w[n-k].$$



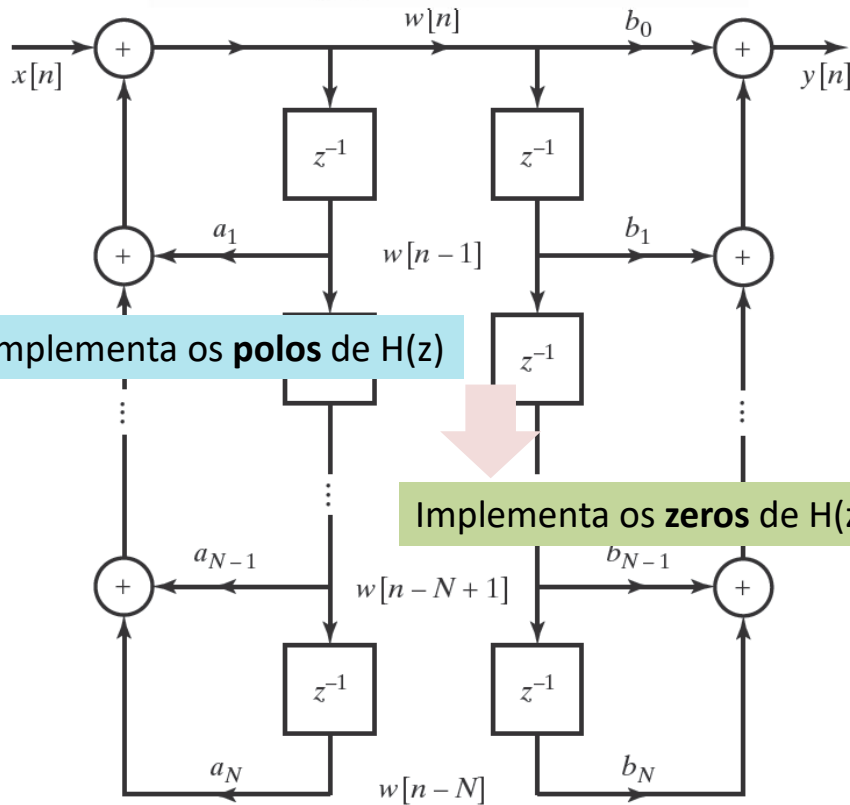
$$v[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k],$$

$$y[n] = \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + v[n].$$



$$w[n] = \sum_{k=1}^N a_k w[n-k] + x[n],$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k w[n-k].$$

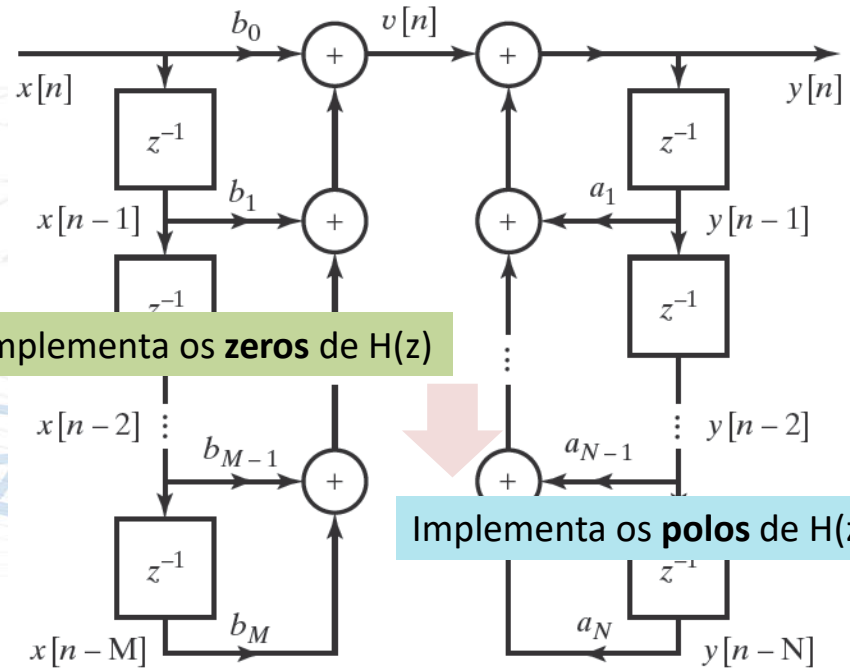


Implementa os polos de H(z)

Implementa os zeros de H(z)

$$v[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k],$$

$$y[n] = \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + v[n].$$

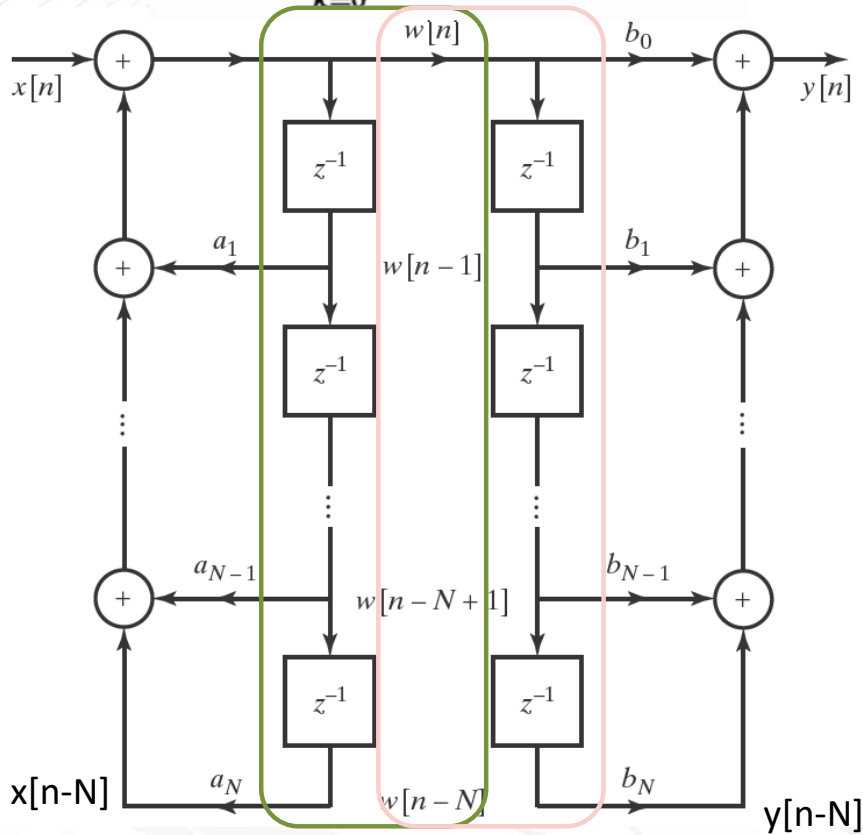


Implementa os zeros de H(z)

Implementa os polos de H(z)

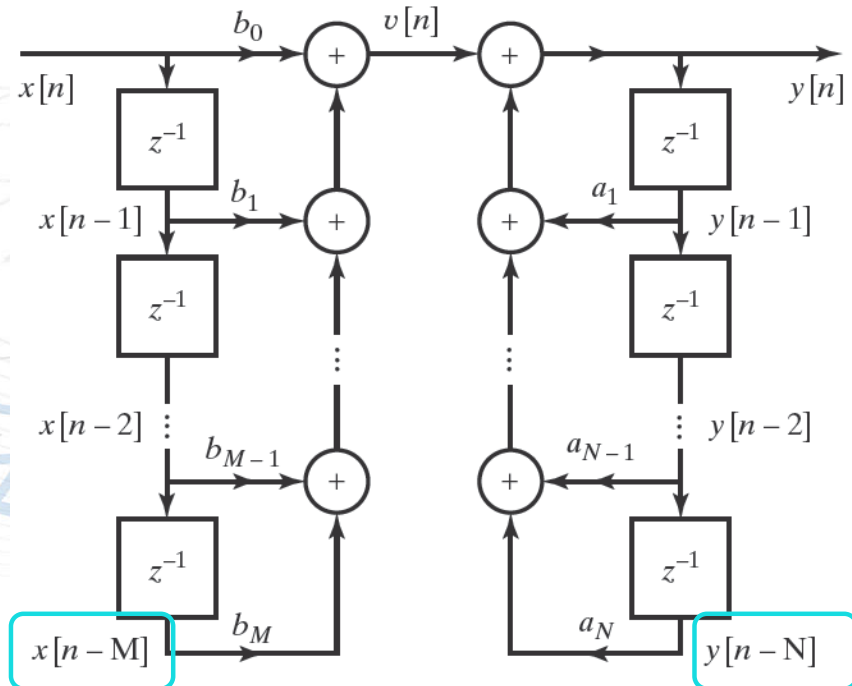
$$w[n] = \sum_{k=1}^N a_k w[n-k] + x[n],$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k w[n-k].$$



$$v[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k],$$

$$y[n] = \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + v[n].$$

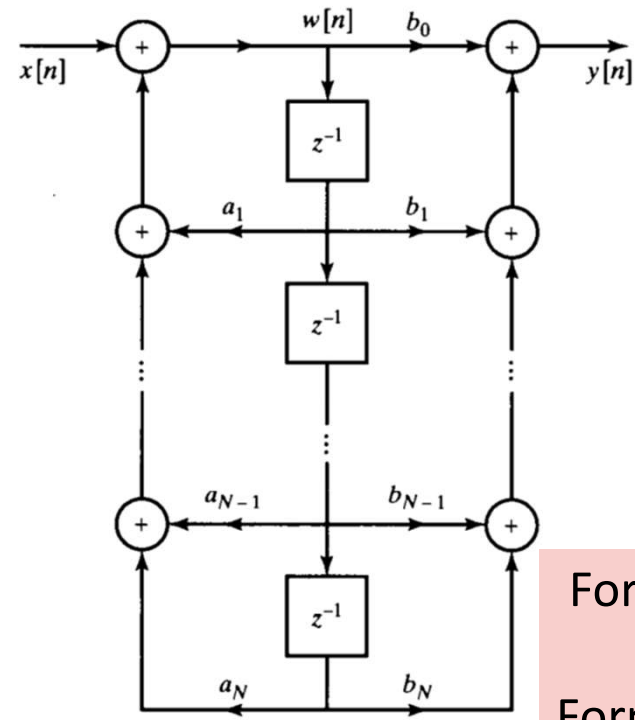
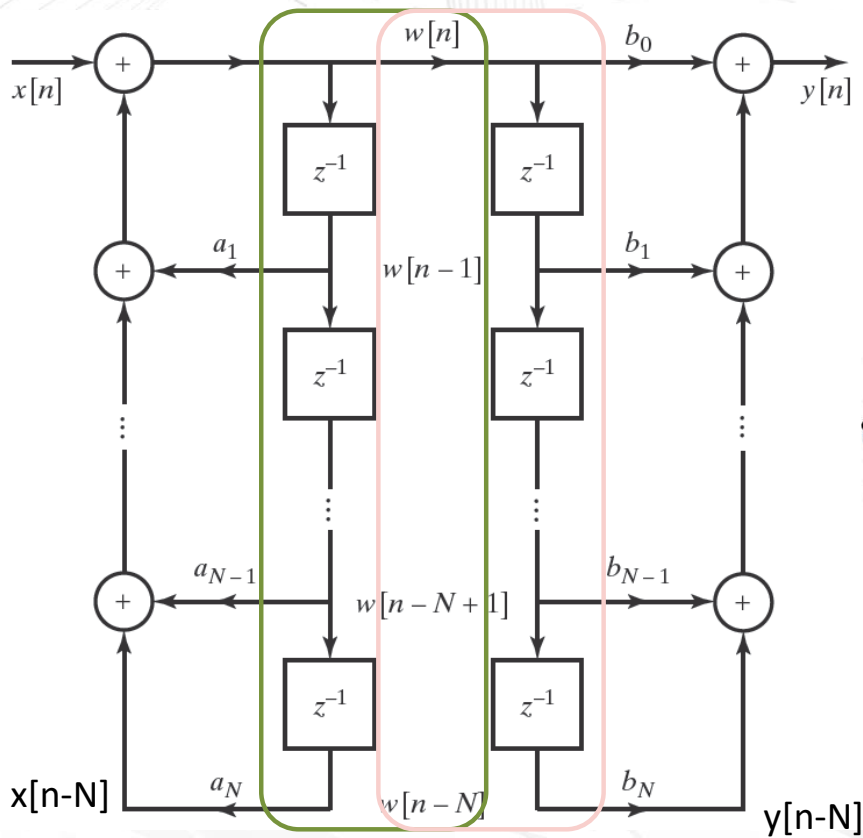


N+M elementos

Processamento em tempo discreto de sinais

3ª edição

Forma direta I



Forma direta II ou Forma canônica

Exemplo

Represente o sistema $H(z)$ a seguir na forma direta I e na forma direta II

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1}}{1 - 1.5z^{-1} + 0.9z^{-2}}$$

b_0 points to the constant term 1 in the numerator.
 b_1 points to the coefficient 2 of z^{-1} in the numerator.
 a_0 points to the constant term 1 in the denominator.
 a_1 points to the coefficient -1.5 of z^{-1} in the denominator.
 a_2 points to the coefficient 0.9 of z^{-2} in the denominator.

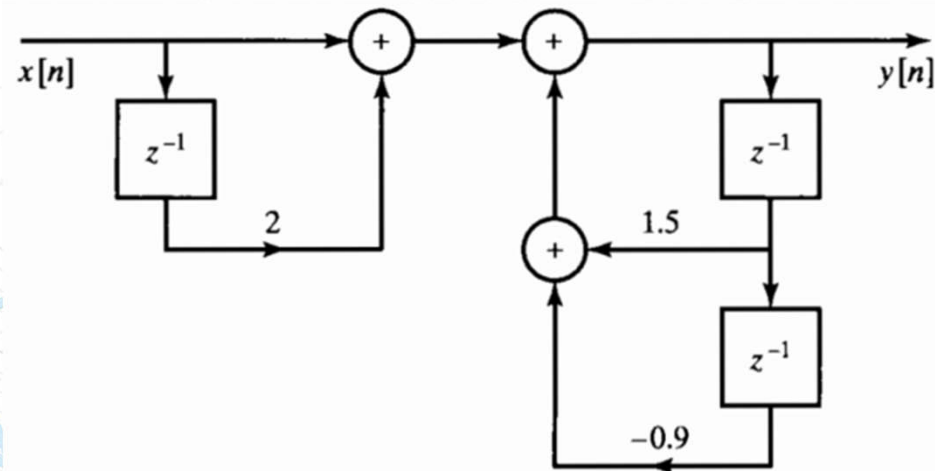


Figure 6.6 Direct form I implementation of Eq. (6.16).

Exemplo

Represente o sistema $H(z)$ a seguir na forma direta I e na forma direta II

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1}}{1 - 1.5z^{-1} + 0.9z^{-2}}$$

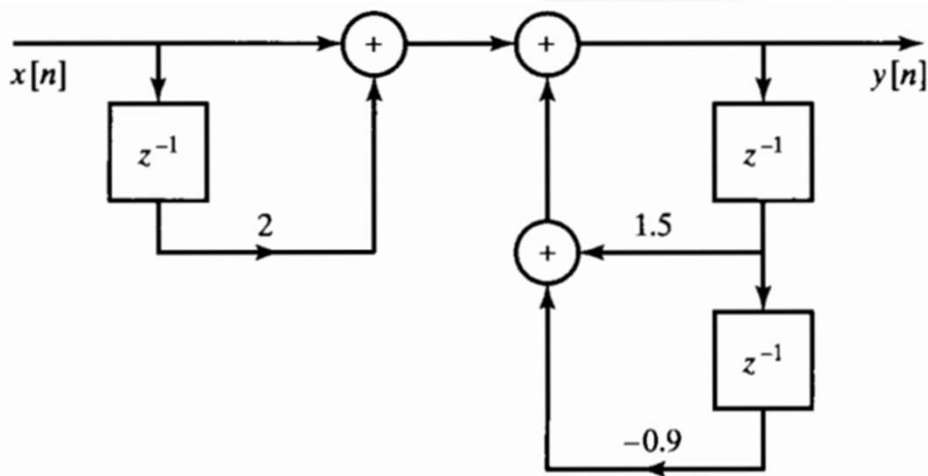


Figure 6.6 Direct form I implementation of Eq. (6.16).

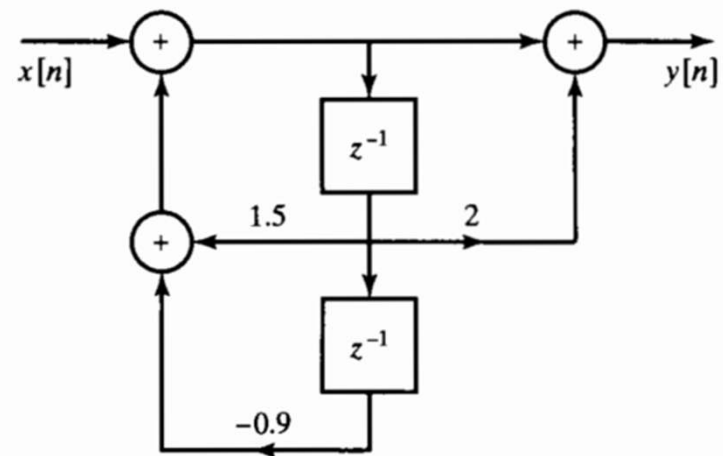


Figure 6.7 Direct form II implementation of Eq. (6.16).

Estruturas para sistemas de tempo discreto

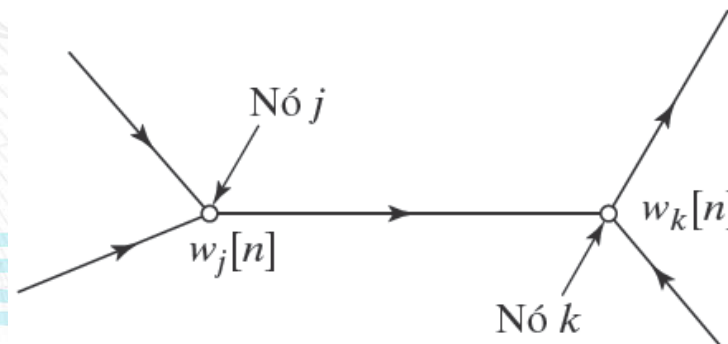
REPRESENTAÇÃO EM DIAGRAMAS DE FLUXO DE SINAIS DE EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS LINEARES COM COEFICIENTES CONSTANTES

Representação em diagrama de fluxo de sinais de equações de diferenças lineares com coeficientes constantes

- Uma representação em **diagrama de fluxo de sinais** de uma equação de diferenças é essencialmente equivalente à representação em diagrama de blocos, exceto por algumas diferenças de notação.
- Um diagrama de fluxo de sinais é uma rede de ramos orientados que se conectam em nós.
- Associado a cada nó, há uma variável ou o valor do nó.

Representação em diagrama de fluxo de sinais de equações de diferenças lineares com coeficientes constantes

- Exemplo de nós e ramos em um diagrama de fluxo de sinais.

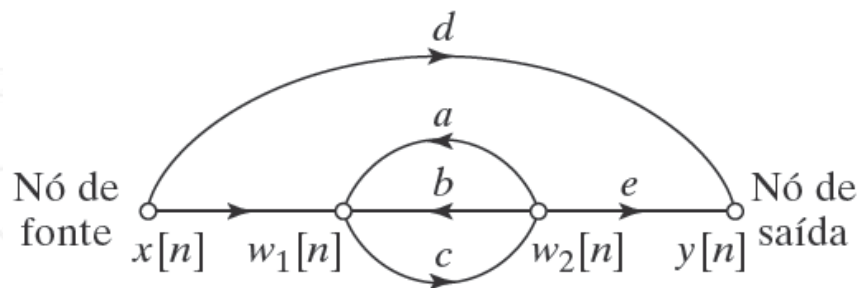


- Para completar a definição da notação do diagrama de fluxo de sinais, definiremos dois tipos especiais de nós.

Representação em diagrama de fluxo de sinais de equações de diferenças lineares com coeficientes constantes

- **Nós de fonte** são aqueles que não possuem ramos de entrada, e são usados para representar a injeção de entradas externas ou fontes de sinal em um diagrama.
- **Nós de saída** são aqueles que possuem apenas ramos de entrada, e são usados para extrair saídas de um diagrama.
- Nós de fonte, nós de saída e ramos de ganho simples são ilustrados no diagrama de fluxo de sinais da figura a seguir.

Representação em diagrama de fluxo de sinais de equações de diferenças lineares com coeficientes constantes



$$w_1[n] = x[n] + aw_2[n] + bw_2[n],$$

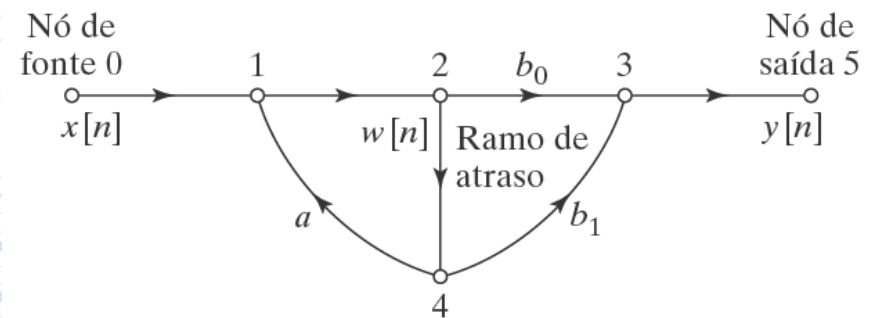
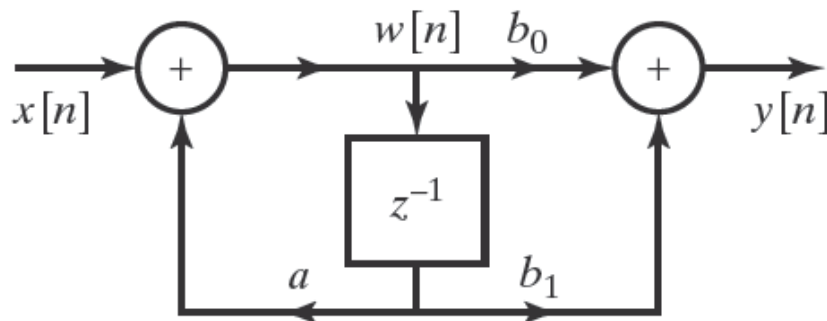
$$w_2[n] = cw_1[n],$$

$$y[n] = dx[n] + ew_2[n].$$

- Como todas são operações lineares, é possível usar a notação de diagrama de fluxo de sinais para representar algoritmos na implementação de sistemas LIT de tempo discreto.

Representação em diagrama de fluxo de sinais de equações de diferenças lineares com coeficientes constantes

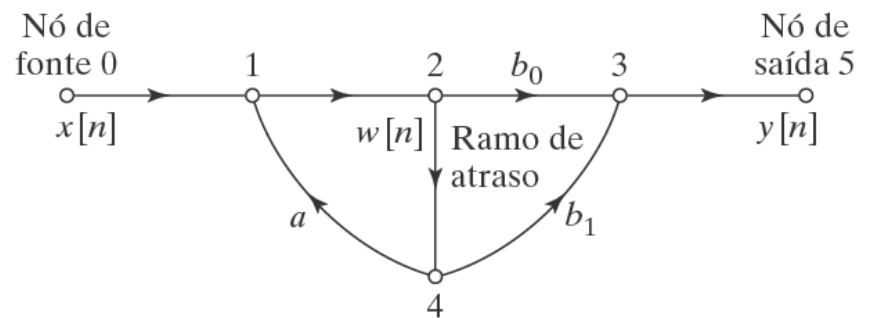
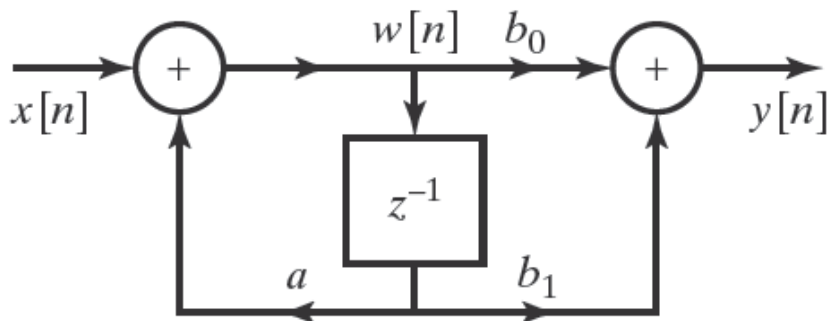
- Representação do diagrama de blocos de um filtro digital de primeira ordem.



Estrutura do diagrama de fluxo de sinais correspondente

Representação em diagrama de fluxo de sinais de equações de diferenças lineares com coeficientes constantes

- Representação do diagrama de blocos de um filtro digital de primeira ordem.

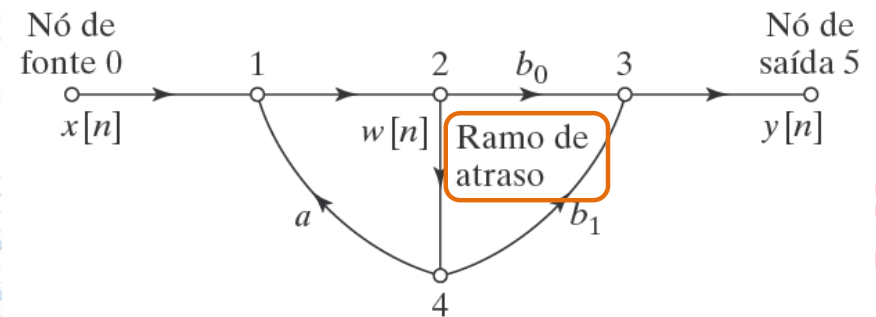
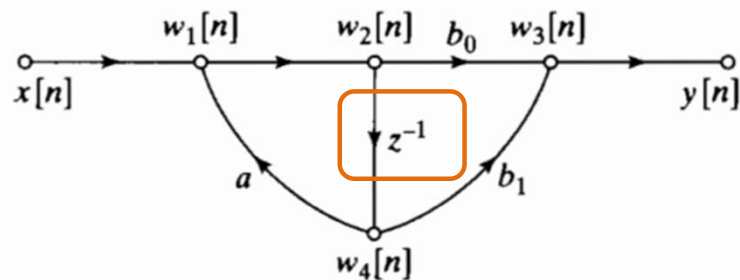


Estrutura do diagrama de fluxo de sinais correspondente

C $w_1[n] = aw_4[n] + x[n],$
F $w_2[n] = w_1[n],$
E $w_3[n] = b_0w_2[n] + b_1w_4[n],$
T $w_4[n] = w_2[n - 1],$
U $y[n] = w_3[n],$

Representação em diagrama de fluxo de sinais de equações de diferenças lineares com coeficientes constantes

- Representação do diagrama de blocos de um filtro digital de primeira ordem.



Estrutura do diagrama de fluxo de sinais correspondente

Exemplo

Obtenha a RI para o sistema representado pela figura abaixo

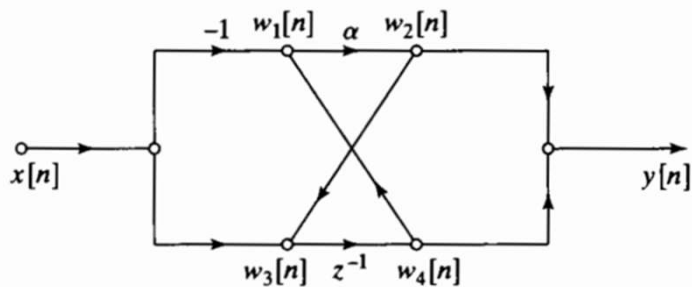


Figure 6.12 Flow graph not in standard direct form.

1. Escrever as equações de diferença para os nós

$$w_1[n] = w_4[n] - x[n], \quad (6.20a)$$

$$w_2[n] = \alpha w_1[n], \quad (6.20b)$$

$$w_3[n] = w_2[n] + x[n], \quad (6.20c)$$

$$w_4[n] = w_3[n - 1], \quad (6.20d)$$

$$y[n] = w_2[n] + w_4[n]. \quad (6.20e)$$

2. Calcular a TZ das equações

$$W_1(z) = W_4(z) - X(z), \quad (6.21a)$$

$$W_2(z) = \alpha W_1(z), \quad (6.21b)$$

$$W_3(z) = W_2(z) + X(z), \quad (6.21c)$$

$$W_4(z) = z^{-1} W_3(z), \quad (6.21d)$$

$$Y(z) = W_2(z) + W_4(z). \quad (6.21e)$$

3. Simplificações

Exemplo

Obtenha a RI para o sistema representado pela figura abaixo

3. Simplificações

$$W_2(z) = \alpha(W_4(z) - X(z)), \quad (6.22a)$$

$$W_4(z) = z^{-1}(W_2(z) + X(z)), \quad (6.22b)$$

$$Y(z) = W_2(z) + W_4(z). \quad (6.22c)$$

$$W_2(z) = \frac{\alpha(z^{-1} - 1)}{1 - \alpha z^{-1}} X(z), \quad (6.23a)$$

$$W_4(z) = \frac{z^{-1}(1 - \alpha)}{1 - \alpha z^{-1}} X(z), \quad (6.23b)$$

$$Y(z) = \left(\frac{\alpha(z^{-1} - 1) + z^{-1}(1 - \alpha)}{1 - \alpha z^{-1}} \right) X(z) = \left(\frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}} \right) X(z). \quad (6.24)$$

$$h[n] = \alpha^{n-1} u[n-1] - \alpha^{n+1} u[n]$$

← IDTFT

$$H(z) = \frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}}, \quad (6.25)$$



$$\# W_2(z) = \alpha (W_4(z) - X(z))$$

$$W_2(z) = \alpha W_4(z) - \alpha X(z)$$

$$W_2(z) = \alpha [z^{-1} (W_2(z) + X(z))] - \alpha X(z)$$

$$W_2(z) = \alpha z^{-1} W_2(z) + \alpha z^{-1} X(z) - \alpha X(z)$$

$$W_2(z) - \alpha z^{-1} W_2(z) = \alpha z^{-1} X(z) - \alpha X(z)$$

$$(1 - \alpha z^{-1}) W_2(z) = \alpha (z^{-1} - 1) X(z)$$

$$W_2(z) = \frac{\alpha (z^{-1} - 1)}{1 - \alpha z^{-1}} X(z)$$

$$\# W_4(z) = z^{-1} [W_2(z) + X(z)]$$

$$W_4(z) = z^{-1} \left[\frac{\alpha (z^{-1} - 1)}{1 - \alpha z^{-1}} X(z) + X(z) \right] =$$

$$= z^{-1} \left[\frac{\alpha (z^{-1} - 1) + 1 - \alpha z^{-1}}{1 - \alpha z^{-1}} \right] X(z) =$$

$$= z^{-1} \left[\frac{\cancel{\alpha} z^{-1} - \alpha + 1 - \cancel{\alpha} z^{-1}}{1 - \alpha z^{-1}} \right] X(z)$$

$$W_4(z) = z^{-1} \left[\frac{1 - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}} \right] X(z)$$

Exemplo

Obtenha a RI para o sistema representado pela figura abaixo

3. Simplificações

$$W_2(z) = \alpha(W_4(z) - X(z)),$$

$$W_4(z) = z^{-1}(W_2(z) + X(z)),$$

$$Y(z) = W_2(z) + W_4(z).$$

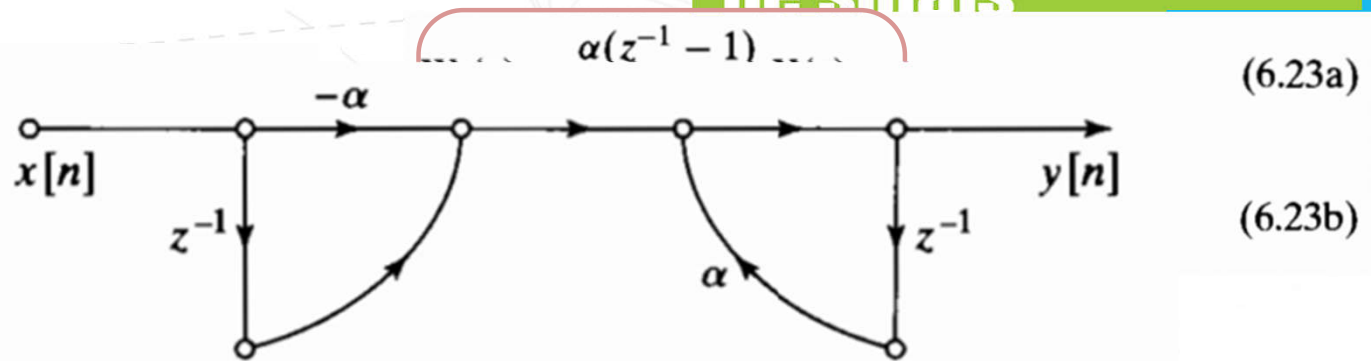


Figure 6.13 Direct form I equivalent of Figure 6.12.

$$Y(z) = \left(\frac{\alpha(z^{-1} - 1) + z^{-1}(1 - \alpha)}{1 - \alpha z^{-1}} \right) X(z)$$

$$h[n] = \alpha^{n-1}u[n-1] - \alpha^{n+1}u[n]$$

← IDTFT

$$H(z) = \frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}}, \tag{6.25}$$

Estruturas para sistemas de tempo discreto

SISTEMAS FIR E IIR

Estruturas básicas para sistemas IIR

- Representação por diagramas equivalentes
- Complexidade computacional
 - Quantidade de multiplicadores por constantes
 - Quantidade de atrasos
 - Cada atraso requer um registrador de memória
- Aritmética de precisão finita
 - Efeito da ordem dos cálculos

Introdução

$$y[n] = \frac{1}{a_0} \left(\sum_{k=0}^M b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] \right)$$

= 0

Filtro implementado diretamente através de convolução

RI é finita

Filtros **FIR** (*Finite Impulse Response*)

Filtro convolução

≠ 0

Depende das amostras passadas

Filtros **IIR** (*Infinite Impulse Response*)

Filtro recursivo

Estruturas para sistemas de tempo discreto

ESTRUTURAS BÁSICAS PARA SISTEMAS IIR

Estruturas básicas para sistemas IIR

Forma direta

- A eq. de diferenças é implementada na forma original
- forma direta I e forma direta II

$$y[n] = \frac{1}{a_0} \left(\sum_{k=0}^M b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] \right)$$

Forma de cascata

- H(z) é fatorada em fatores menores de 2ª ordem
- H(z) resultante é o PRODUTOS desses fatores

Forma paralela

- H(z) é fatorada em fatores menores de 2ª ordem
- Frações parciais
- H(z) resultante é a SOMA desses fatores

Estruturas básicas para sistemas IIR

Formas diretas

Processamento em tempo discreto de sinais

3ª edição

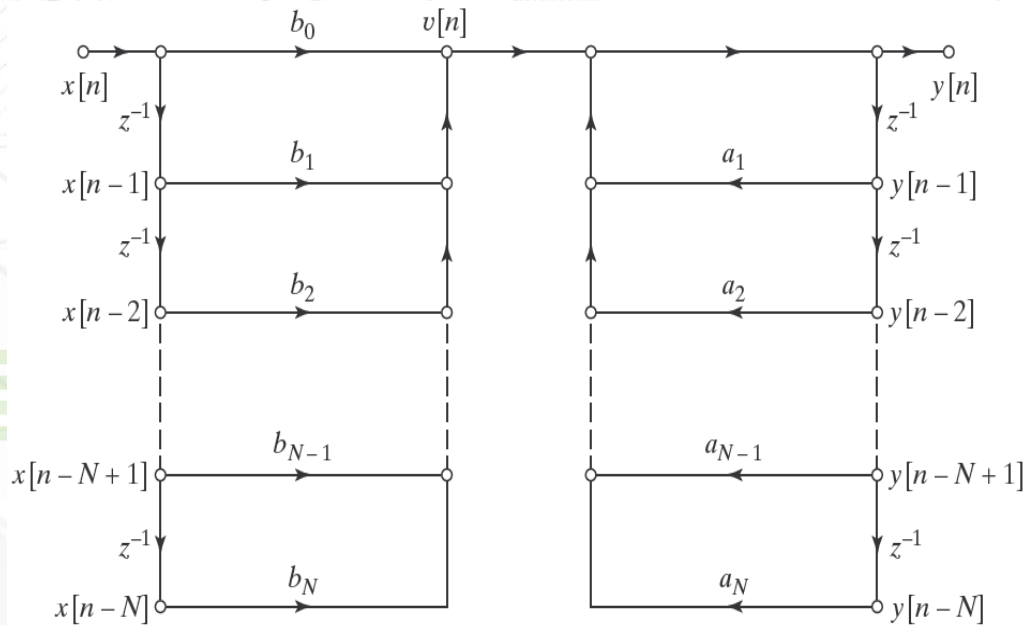


Diagrama de fluxo de sinais da estrutura na **forma direta I** para um sistema de ordem N .

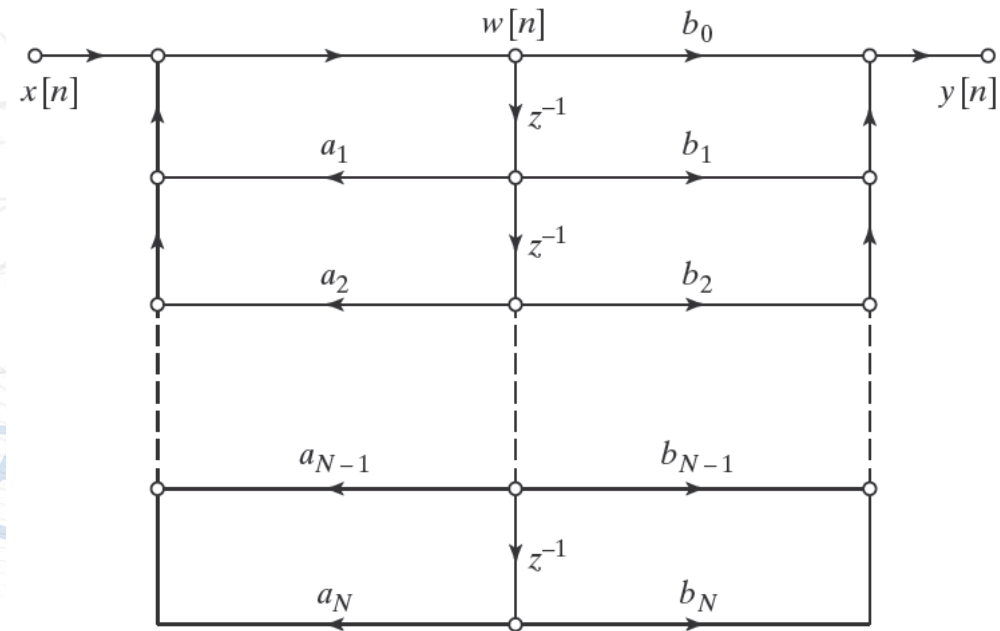
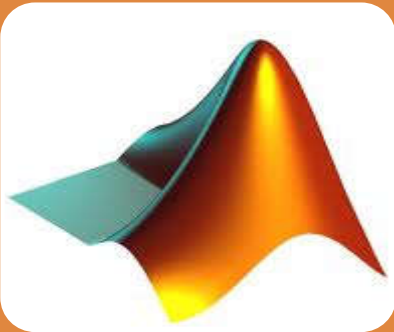
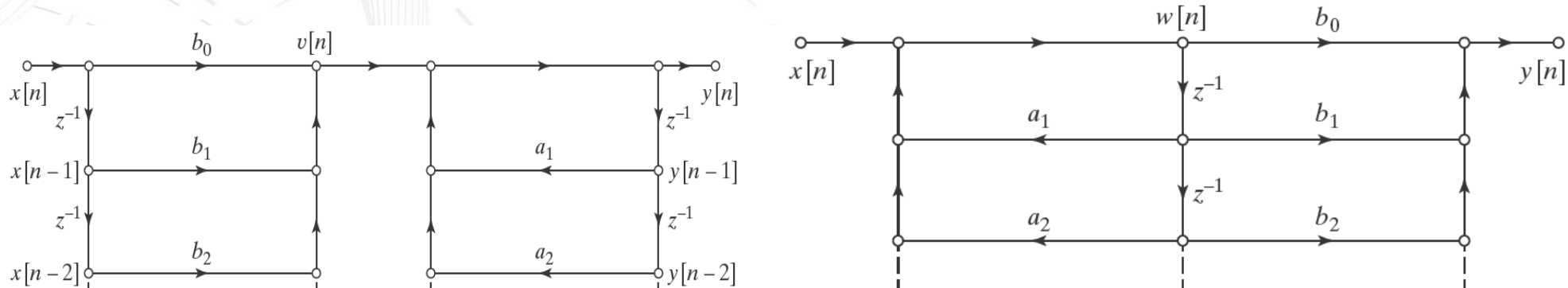


Diagrama de fluxo de sinais da estrutura na **forma direta II** para um sistema de ordem N .

Estruturas básicas para
sistemas IIR

Formas diretas



filter

- Vetores a_n e b_n

Exemplo

Considere a seguinte função do sistema.

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0.75z^{-1} + 0.125z^{-2}}$$

Esboce a forma direta I e a II.

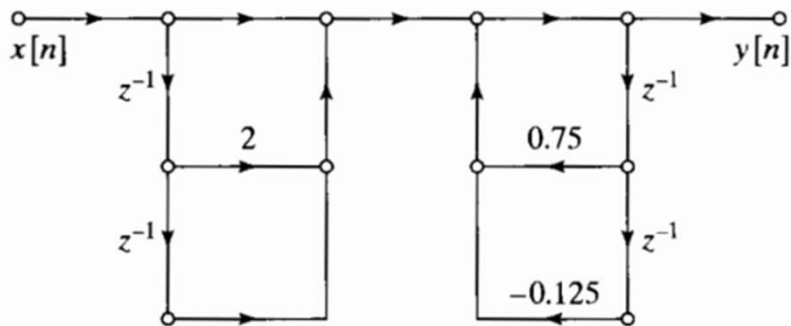


Figure 6.16 Direct form I structure for Example 6.4.

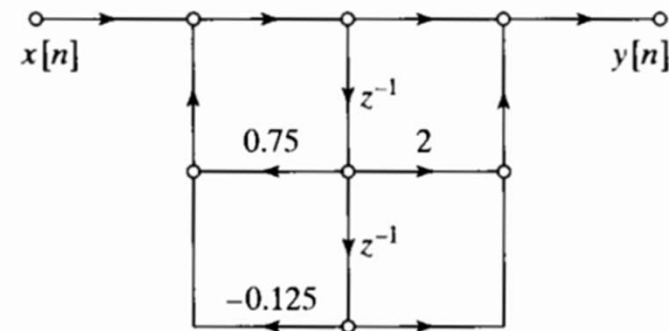
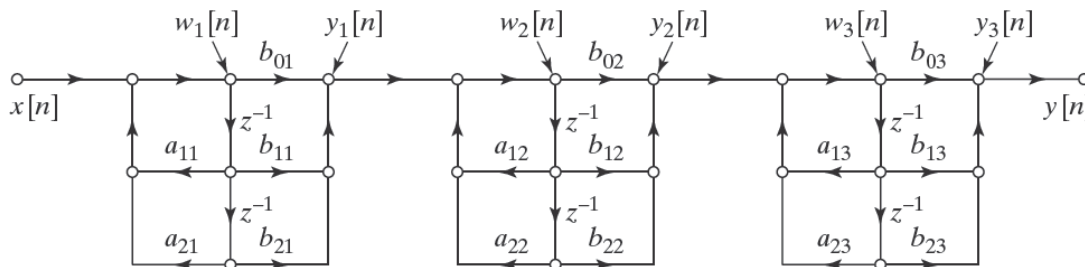


Figure 6.17 Direct form II structure for Example 6.4.

Estruturas básicas para sistemas IIR

Forma em cascata

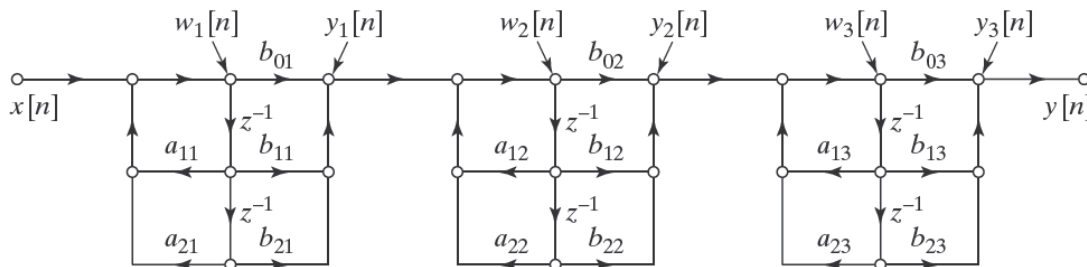
- Estrutura na forma em cascata para um sistema de sexta ordem com uma realização na forma direta II de subsistemas de segunda ordem.



Estruturas básicas para sistemas IIR

Forma em cascata

- Estrutura na forma em cascata para um sistema de sexta ordem com uma realização na forma direta II de subsistemas de segunda ordem.



$$y_0[n] = x[n], \quad (6.31a)$$

$$w_k[n] = a_{1k}w_k[n-1] + a_{2k}w_k[n-2] + y_{k-1}[n], \quad k = 1, 2, \dots, N_s, \quad (6.31b)$$

$$y_k[n] = b_{0k}w_k[n] + b_{1k}w_k[n-1] + b_{2k}w_k[n-2], \quad k = 1, 2, \dots, N_s, \quad (6.31c)$$

$$y[n] = y_{N_s}[n]. \quad (6.31d)$$

Exemplo

Considere a seguinte função do sistema.

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0.75z^{-1} + 0.125z^{-2}} = \frac{(1 + z^{-1})(1 + z^{-1})}{(1 - 0.5z^{-1})(1 - 0.25z^{-1})}$$

Esboce a forma cascata.

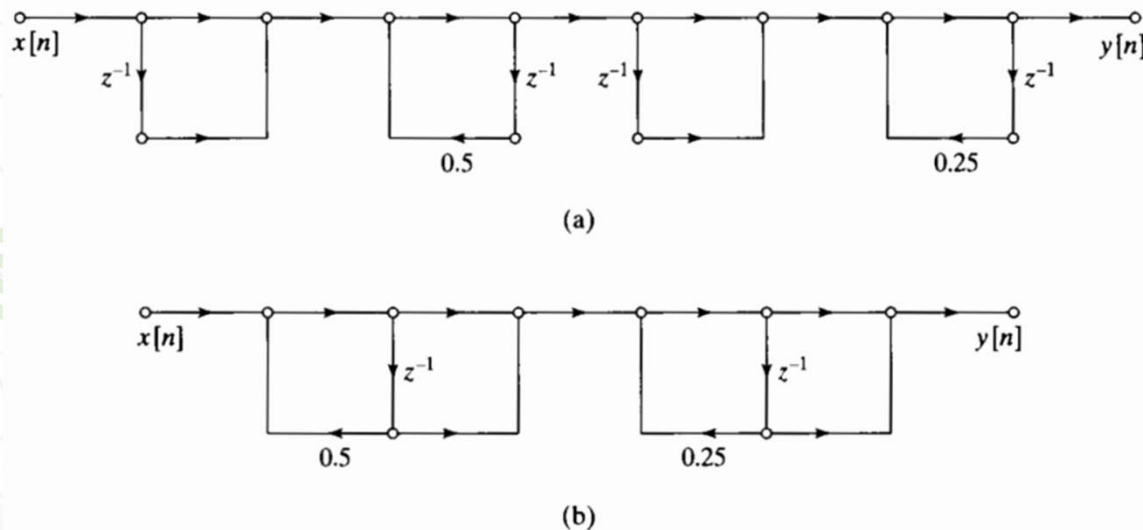


Figure 6.19 Cascade structures for Example 6.5. (a) Direct form I subsections. (b) Direct form II subsections.

Exemplo

Um filtro é descrito pela equação de diferenças:

$$16y(n) + 12y(n-1) + 2y(n-2) - 4y(n-3) - y(n-4) \\ = x(n) - 3x(n-1) + 11x(n-2) - 27x(n-3) + 18x(n-4)$$

Determine sua estrutura em cascata.

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_Nz^{-N}}{1 + a_1z^{-1} + \dots + a_Nz^{-N}} \\ = b_0 \frac{1 + \frac{b_1}{b_0}z^{-1} + \dots + \frac{b_N}{b_0}z^{-N}}{1 + a_1z^{-1} + \dots + a_Nz^{-N}} \\ = b_0 \prod_{k=1}^K \frac{1 + B_{k,1}z^{-1} + B_{k,2}z^{-2}}{1 + A_{k,1}z^{-1} + A_{k,2}z^{-2}} \quad (6.3)$$

$$H_k(z) = \frac{Y_{k+1}(z)}{Y_k(z)} = \frac{1 + B_{k,1}z^{-1} + B_{k,2}z^{-2}}{1 + A_{k,1}z^{-1} + A_{k,2}z^{-2}}; \quad k = 1, \dots, K$$

$$Y_1(z) = b_0X(z); \quad Y_{K+1}(z) = Y(z)$$

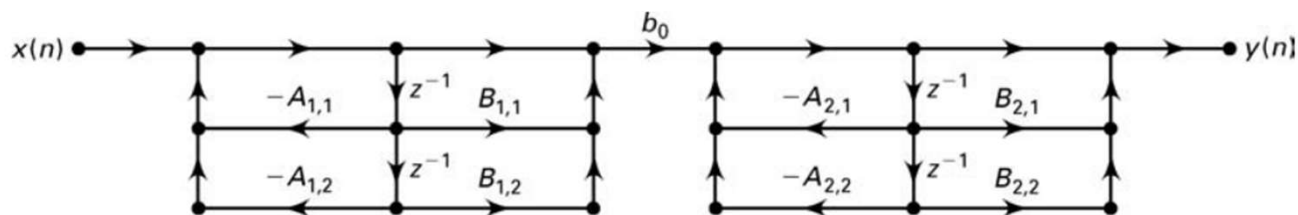


FIGURE 6.5 Cascade form structure for $N = 4$

Exemplo

Um filtro é descrito pela equação de diferenças:

$$16y(n) + 12y(n-1) + 2y(n-2) - 4y(n-3) - y(n-4) \\ = x(n) - 3x(n-1) + 11x(n-2) - 27x(n-3) + 18x(n-4)$$

Determine sua estrutura em cascata.

```
function [b0,B,A] = dir2cas(b,a);  
% DIRECT-form to CASCADE-form conversion (cplxpair version)  
% -----  
% [b0,B,A] = dir2cas(b,a)  
% b0 = gain coefficient  
% B = K by 3 matrix of real coefficients containing bk's  
% A = K by 3 matrix of real coefficients containing ak's  
% b = numerator polynomial coefficients of DIRECT form  
% a = denominator polynomial coefficients of DIRECT form
```

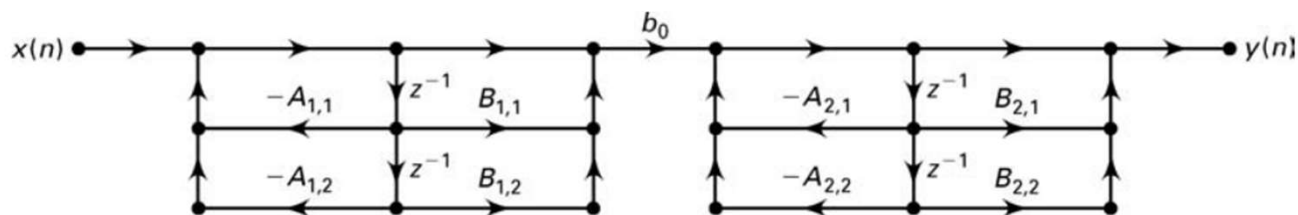
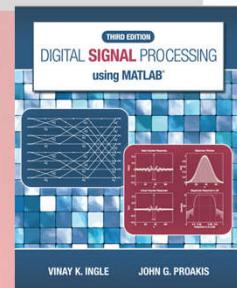


FIGURE 6.5 Cascade form structure for $N = 4$



Exemplo

Um filtro é descrito pela equação de diferenças:

$$16y(n) + 12y(n-1) + 2y(n-2) - 4y(n-3) - y(n-4) = x(n) - 3x(n-1) + 11x(n-2) - 27x(n-3) + 18x(n-4)$$

Determine sua estrutura em cascata.

```
>> b=[1 -3 11 -27 18]; a=[16 12 2 -4 -1];
>> [b0,B,A]=dir2cas(b,a)
b0 = 0.0625
B =
  1.0000  -0.0000   9.0000
  1.0000  -3.0000   2.0000
A =
  1.0000  1.0000   0.5000
  1.0000  -0.2500  -0.1250
```

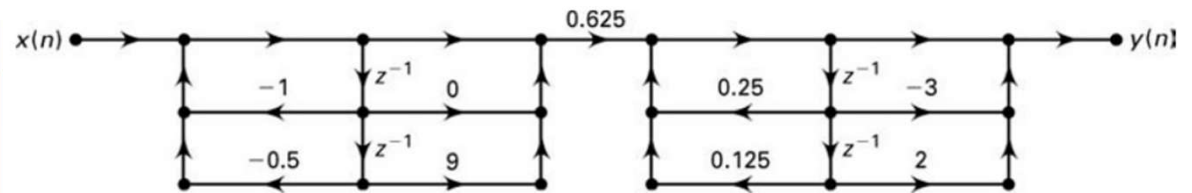


FIGURE 6.6 Cascade structure in Example 6.1

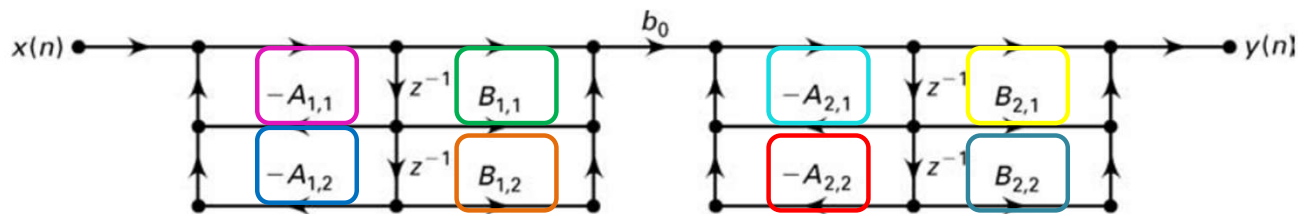


FIGURE 6.5 Cascade form structure for $N = 4$

Exemplo

```
>> b=[1 -3 11 -27 18]; a=[16 12 2 -4 -1];  
>> [b0,B,A]=dir2cas(b,a)  
b0 = 0.0625  
B =
```

Um filtro
equação

$$16y(n) + 12y(n-1) + 2y(n-2) - 4y(n-3) - y(n-4) = x(n) - 3x(n-1) + 11x(n-2) - 27x(n-3) + 18x(n-4)$$

Determinar
cascata

$x(n)$ →

```
>> delta = impz(0,0,7)  
delta =  
     1     0     0     0     0     0     0  
>> format long  
>> hcas=casfiltr(b0,B,A,delta)  
hcas =  
Columns 1 through 4  
    0.0625000000000000    -0.2343750000000000    0.8554687500000000   -2.2841796875000000  
Columns 5 through 8  
    2.67651367187500    -1.52264404296875    0.28984069824219    0.49931716918945  
>> hdir=filter(b,a,delta)  
hdir =  
Columns 1 through 4  
    0.0625000000000000    -0.2343750000000000    0.8554687500000000   -2.2841796875000000  
Columns 5 through 8  
    2.67651367187500    -1.52264404296875    0.28984069824219    0.49931716918945
```

MATLAB

Estruturas básicas para sistemas IIR

Forma paralela

$$N \geq M, N_p = M - N$$

$$N = N_1 + 2N_2$$

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N_p} C_k z^{-k} + \sum_{k=1}^{N_1} \frac{A_k}{1 - c_k z^{-1}} + \sum_{k=1}^{N_2} \frac{B_k(1 - e_k z^{-1})}{(1 - d_k z^{-1})(1 - d_k^* z^{-1})}, \quad (6.34)$$

Agrupando polos reais e complexos

$$N_s = (N + 1)/2$$

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N_p} C_k z^{-k} + \sum_{k=1}^{N_s} \frac{e_{0k} + e_{1k} z^{-1}}{1 - a_{1k} z^{-1} - a_{2k} z^{-2}},$$

$$w_k[n] = a_{1k} w_k[n-1] + a_{2k} w_k[n-2] + x[n], \quad k = 1, 2, \dots, N_s, \quad (6.36a)$$

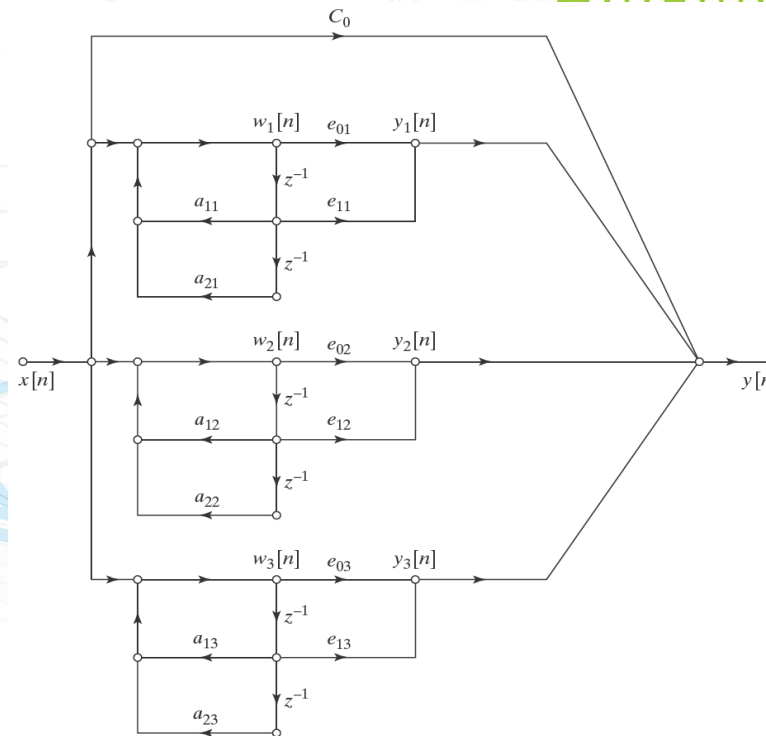
$$y_k[n] = e_{0k} w_k[n] + e_{1k} w_k[n-1], \quad k = 1, 2, \dots, N_s, \quad (6.36b)$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N_p} C_k x[n-k] + \sum_{k=1}^{N_s} y_k[n]. \quad (6.36c)$$

Estruturas básicas para sistemas IIR

Forma paralela

- Estrutura na forma paralela para o sistema de sexta ordem ($M = N = 6$) com os polos reais e complexos agrupados em pares.



Exemplo

Considere a seguinte função do sistema.

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0.75z^{-1} + 0.125z^{-2}} = \frac{(1 + z^{-1})(1 + z^{-1})}{(1 - 0.5z^{-1})(1 - 0.25z^{-1})} = 8 + \frac{-7 + 8z^{-1}}{1 - 0.75z^{-1} + 0.125z^{-2}}$$

Esboce a forma paralela.

Frações parciais

$$H(z) = 8 + \frac{18}{1 - 0.5z^{-1}} - \frac{25}{1 - 0.25z^{-1}}$$

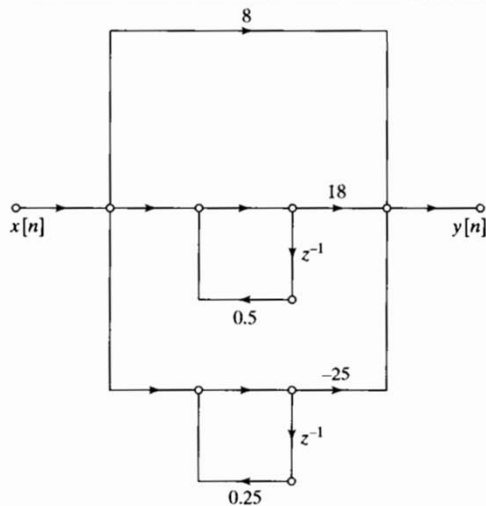


Figure 6.22 Parallel-form structure for Example 6.6 using first-order systems.

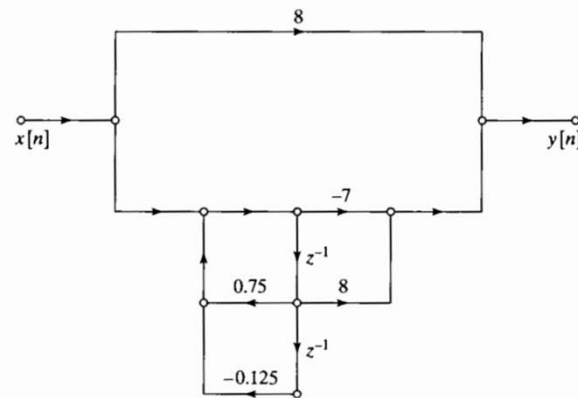


Figure 6.21 Parallel-form structure for Example 6.6 using a second-order system.

Exemplo

Um filtro é descrito pela equação de diferenças:

$$16y(n) + 12y(n-1) + 2y(n-2) - 4y(n-3) - y(n-4) \\ = x(n) - 3x(n-1) + 11x(n-2) - 27x(n-3) + 18x(n-4)$$

Determine sua estrutura na forma paralela.

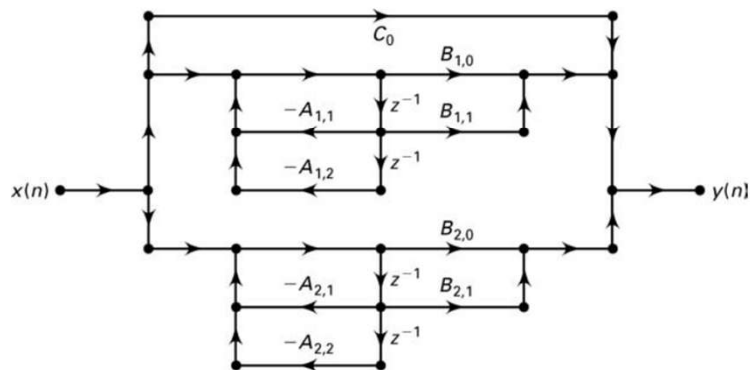


FIGURE 6.7 Parallel form structure for $N = 4$

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_Mz^{-M}}{1 + a_1z^{-1} + \dots + a_Nz^{-N}} \\ = \frac{\hat{b}_0 + \hat{b}_1z^{-1} + \dots + \hat{b}_{N-1}z^{1-N}}{1 + a_1z^{-1} + \dots + a_Nz^{-N}} + \underbrace{\sum_0^{M-N} C_k z^{-k}}_{\text{only if } M \geq N} \\ = \sum_{k=1}^K \frac{B_{k,0} + B_{k,1}z^{-1}}{1 + A_{k,1}z^{-1} + A_{k,2}z^{-2}} + \underbrace{\sum_0^{M-N} C_k z^{-k}}_{\text{only if } M \geq N} \quad (6.4)$$

$K=N/2$

$$H_k(z) = \frac{Y_{k+1}(z)}{Y_k(z)} = \frac{B_{k,0} + B_{k,1}z^{-1}}{1 + A_{k,1}z^{-1} + A_{k,2}z^{-2}}; \quad k = 1, \dots, K$$

$$Y_k(z) = H_k(z)X(z), \quad Y(z) = \sum Y_k(z), \quad M < N$$

Exemplo

Um filtro é descrito pela equação de diferenças:

$$16y(n) + 12y(n-1) + 2y(n-2) - 4y(n-3) - y(n-4) \\ = x(n) - 3x(n-1) + 11x(n-2) - 27x(n-3) + 18x(n-4)$$

Determine sua estrutura na forma paralela.

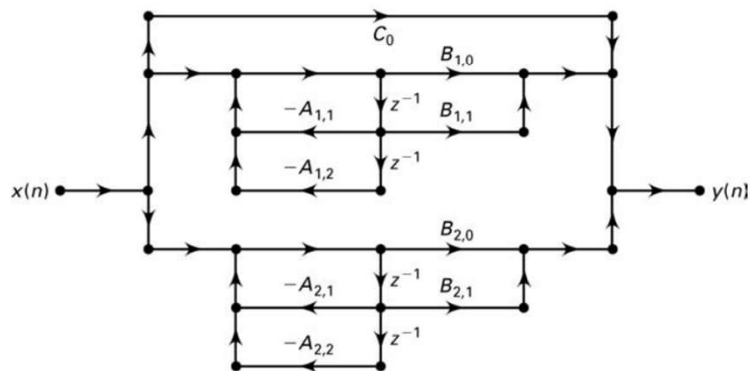
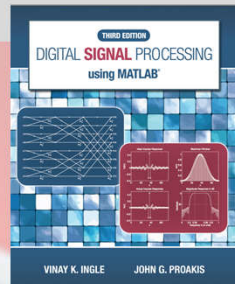


FIGURE 6.7 Parallel form structure for $N = 4$

```
function [C,B,A] = dir2par(b,a);
% DIRECT-form to PARALLEL-form conversion
% -----
% [C,B,A] = dir2par(b,a)
% C = Polynomial part when length(b) >= length(a)
% B = K by 2 matrix of real coefficients containing bk's
% A = K by 3 matrix of real coefficients containing ak's
% b = numerator polynomial coefficients of DIRECT form
% a = denominator polynomial coefficients of DIRECT form
%
M = length(b); N = length(a);
```



Exemplo

Um filtro é descrito pela equação de diferenças:

$$16y(n) + 12y(n-1) + 2y(n-2) - 4y(n-3) - y(n-4) \\ = x(n) - 3x(n-1) + 11x(n-2) - 27x(n-3) + 18x(n-4)$$

Determine sua estrutura na forma paralela.

```
>> b=[1 -3 11 -27 18]; a=[16 12 2 -4 -1];  
>> [C,B,A]=dir2par(b,a)
```

C =
-18

B =

10.0500 -3.9500

28.1125 -13.3625

A =

1.0000 1.0000 0.5000

1.0000 -0.2500 -0.1250

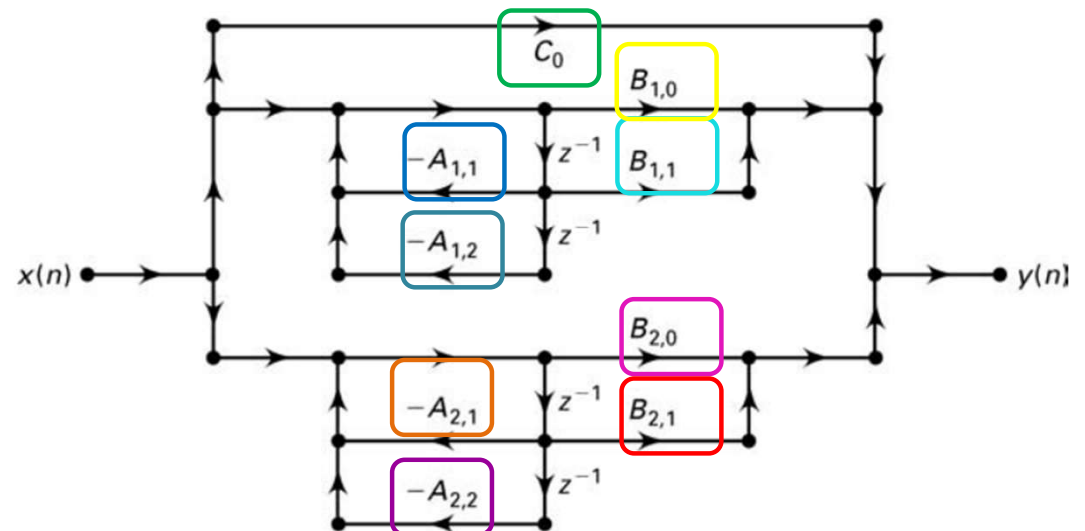


FIGURE 6.7 Parallel form structure for $N = 4$

Exemplo

Um filtro é descrito pela equação de diferenças:

$$16y(n) + 12y(n-1) + 2y(n-2) - 4y(n-3) - y(n-4) = x(n) - 3x(n-1) + 11x(n-2) - 27x(n-3) + 18x(n-4)$$

Determine sua estrutura na forma paralela.

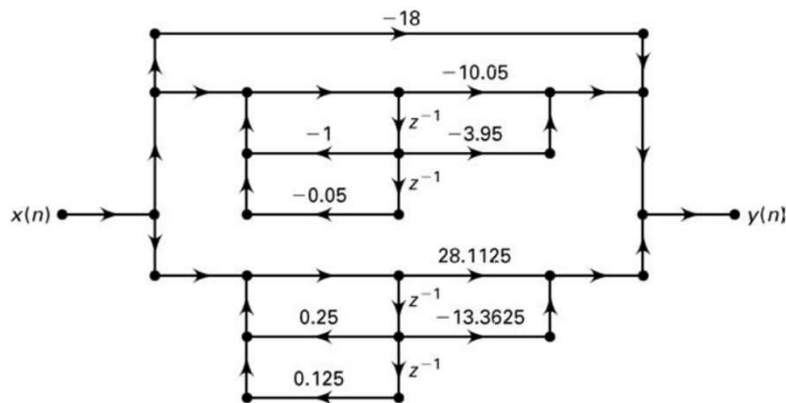


FIGURE 6.8 Parallel form structure in Example 6.2

```
>> b=[1 -3 11 -27 18]; a=[16 12 2 -4 -1];
>> [C,B,A]=dir2par(b,a)
```

C =
-18

B =

10.0500 -3.9500

28.1125 -13.3625

A =

1.0000 1.0000 0.5000

1.0000 -0.2500 -0.1250

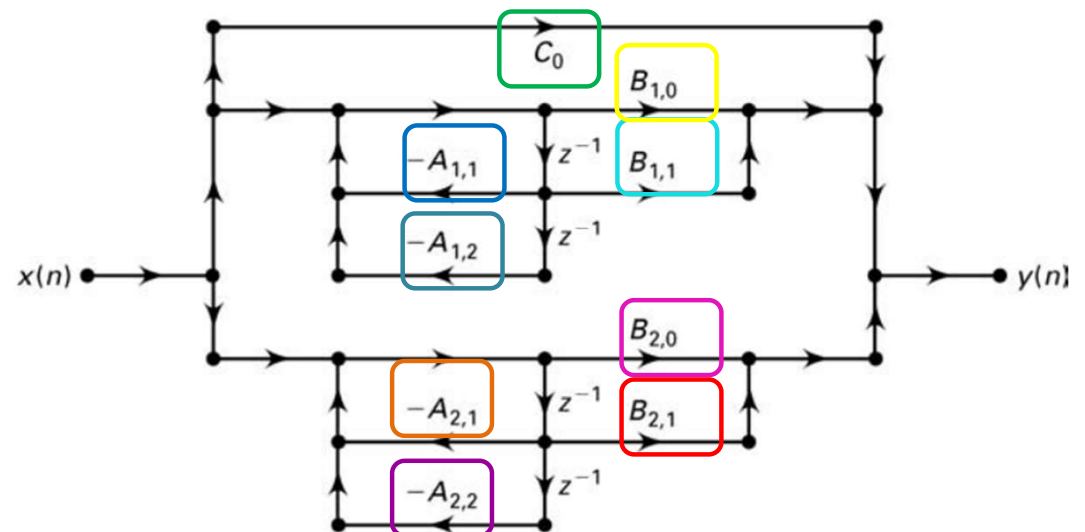


FIGURE 6.7 Parallel form structure for $N = 4$

Exemplo

Um filtro é descrito pela

```
>> b=[1 -3 11 -27 18]; a=[16 12 2 -4 -1];
>> [C,B,A]=dir2par(b,a)
```

```
C =
    -18
```

```
B =
```

```
10.0500
```

```
-3.9500
```

```
>> format long; delta = impseq(0,0,7); hpar=parfiltr(C,B,A,delta)
```

```
hpar =
```

```
Columns 1 through 4
```

```
0.062500000000000000 -0.234375000000000000 0.855468750000000000 -2.284179687500000000
```

```
Columns 5 through 8
```

```
2.676513671875000000 -1.522644042968750000 0.289840698242190000 0.499317169189450000
```

```
>> hdir = filter(b,a,delta)
```

```
hdir =
```

```
Columns 1 through 4
```

```
0.062500000000000000 -0.234375000000000000 0.855468750000000000 -2.284179687500000000
```

```
Columns 5 through 8
```

```
2.676513671875000000 -1.522644042968750000 0.289840698242190000 0.499317169189450000
```

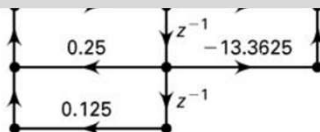


FIGURE 6.8 Parallel form structure in Example 6.2

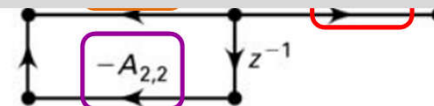


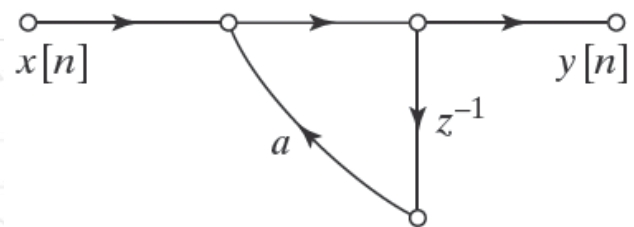
FIGURE 6.7 Parallel form structure for $N = 4$

Estruturas básicas para sistemas IIR

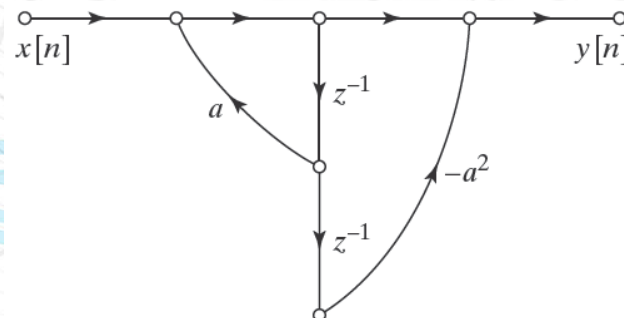
Oppenheim • Schafer

Processamento em tempo discreto de sinais

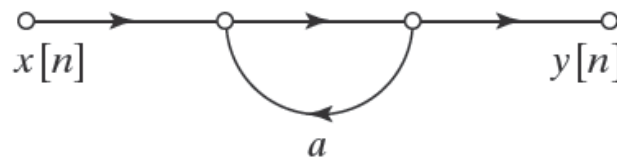
3ª edição



Sistema com laço de realimentação.



Sistema FIR com laço de realimentação.



Sistema não computável

Estruturas básicas para sistemas IIR

Realimentação em sistemas IIR

Oppenheim • Schafer

Processamento em tempo discreto de sinais

3ª edição

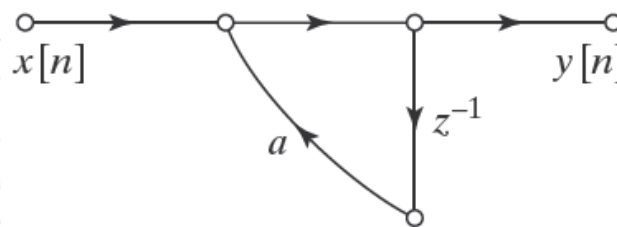
$$y[n] = ay[n - 1] + x[n].$$

$\delta[n]$



$$h[n] = a^n u[n].$$

Sequencia infinitamente longa



Sistema com laço de realimentação.

Estruturas básicas para sistemas IIR

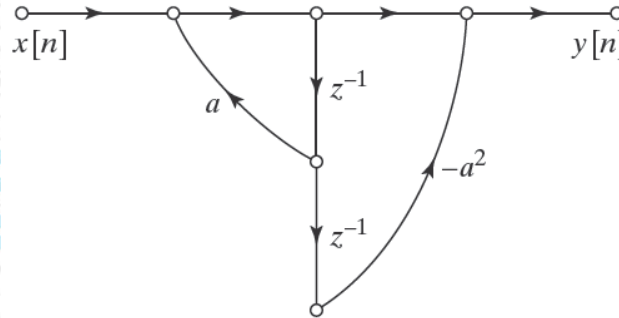
Realimentação em sistemas IIR

$$H(z) = \frac{1 - a^2 z^{-2}}{1 - az^{-1}} = \frac{(1 - az^{-1})(1 + az^{-1})}{1 - az^{-1}} = 1 + az^{-1}.$$



← Finita

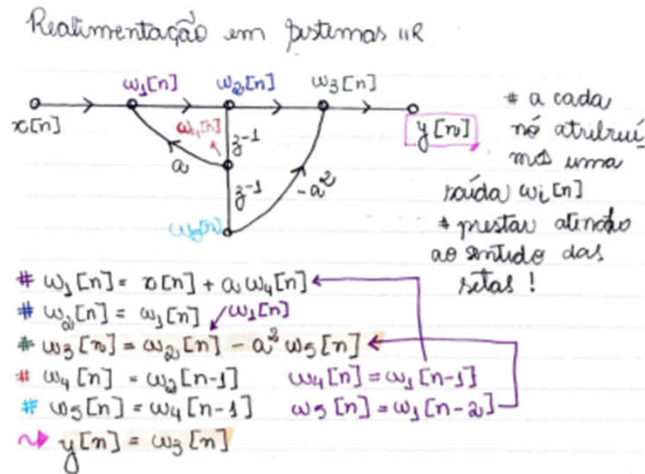
$$h[n] = \delta[n] + a\delta[n - 1].$$



Sistema FIR com laço de realimentação.

Estruturas básicas para sistemas IIR

Realimentação em sistemas IIR



Para obter $H(z)$ a partir da equação de diferenças precisamos obter $Y(z)/X(z) = H(z)$, mas antes de aplicar a TZ é possível combi- nar algumas expressões anteriores. O ponto de partida é $y[n]$

$$y[n] = w_3[n] = w_2[n] - a^2 w_5[n] =$$

$$= w_1[n] - a^2 w_3[n-2]$$

Vamos calcular a TZ

$$Y(z) = W_1(z) - a^2 z^{-2} W_1(z) =$$

$$Y(z) = (1 - a^2 z^{-2}) W_1(z)$$

→ Quem é $W_1(z)$?

$$w_3[n] = a w_4[n] + w_2[n] = x[n] + a w_1[n-1]$$

$$\therefore W_3(z) = X(z) + a z^{-1} W_1(z)$$

$$W_1(z) [1 - a z^{-1}] = X(z)$$

$$W_1(z) = \frac{1}{1 - a z^{-1}} X(z) \quad \textcircled{I}$$

Ⓢ em Ⓢ → pode ser fatorado

$$Y(z) = (1 - a^2 z^{-2}) \frac{1}{1 - a z^{-1}} X(z)$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{(1 + a z^{-1})(1 - a z^{-1})}{(1 - a z^{-1})} = 1 + a z^{-1}$$

Logo $H(z) = 1 + a z^{-1}$ *

Estruturas básicas para sistemas IIR

Realimentação em sistemas IIR

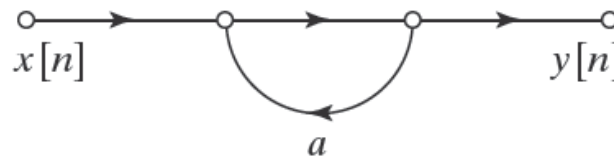
Oppenheim • Schafer

Processamento em tempo discreto de sinais

3ª edição

É a quantidade que queremos calcular!

$$y[n] = ay[n] + x[n].$$



Sistema não computável

Estruturas para sistemas de tempo discreto

ESTRUTURAS BÁSICAS PARA SISTEMAS FIR

Introdução

$$y[n] = \frac{1}{a_0} \left(\sum_{k=0}^M b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] \right) \rightarrow y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

= 0

Filtro implementado diretamente através de convolução

RI é finita

Filtros **FIR** (*Finite Impulse Response*)

Filtro convolução

≠ 0

Depende das amostras passadas

Filtros **IIR** (*Infinite Impulse Response*)

Filtro recursivo

Introdução

$$y[n] = \frac{1}{a_0} \left(\sum_{k=0}^M b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] \right) \longrightarrow y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

$$h[n] = \begin{cases} b_n & n = 0, 1, \dots, M, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \dots + b_{M-1} x(n-M+1)$$

Estruturas básicas para sistemas FIR

Forma direta

- A eq. de diferenças é implementada na forma original

Forma de cascata

- $H(z)$ é fatorada em fatores menores de 2ª ordem
- $H(z)$ resultante é o PRODUTOS desses fatores

Forma de fase-linear

- $H[n]$ tem propriedades de simetria e essas propriedades são usadas para reduzir as multiplicações

Forma de frequência de amostragem

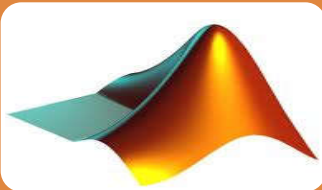
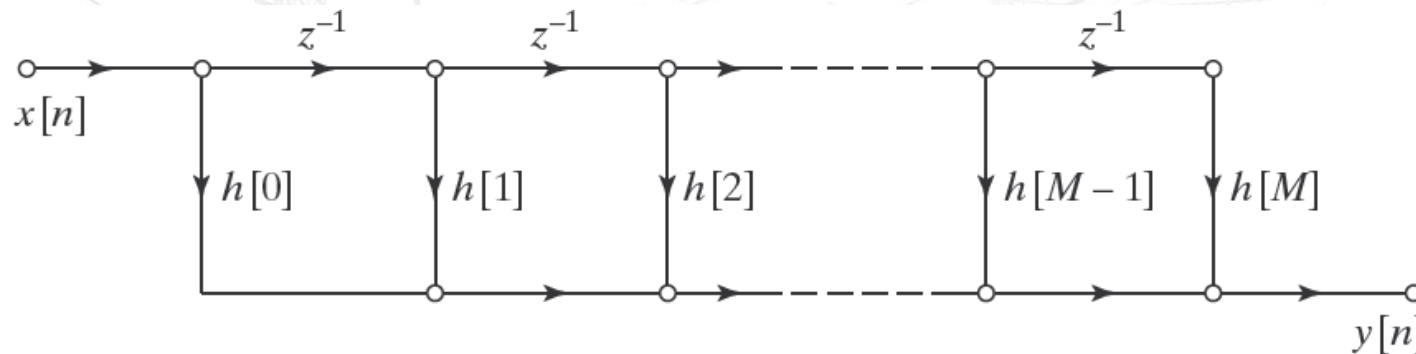
- Baseada na DFT de $h[n]$
- Leva para uma estrutura paralela
- Útil para design baseado na RF

$$y[n] = \left(\sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \right)$$

Estruturas básicas de rede para sistemas FIR

Forma direta

Realização de um sistema FIR na forma direta.



filter

- Vetores $a_0=1$ e b_n

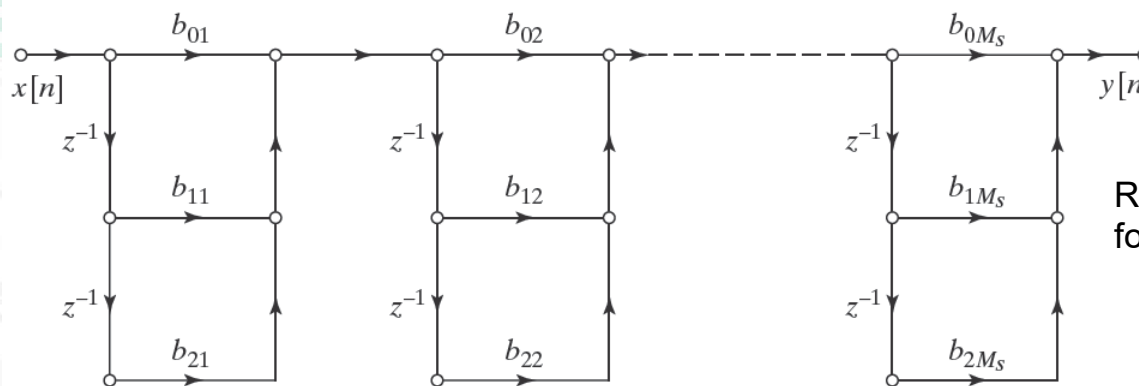
Estruturas básicas de rede para sistemas FIR

Forma em cascata

É obtida fatorando-se $H(z)$

$$H(z) = \sum_{n=0}^M h[n]z^{-n} = \prod_{k=1}^{M_s} (b_{0k} + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2}), \quad (6.48)$$

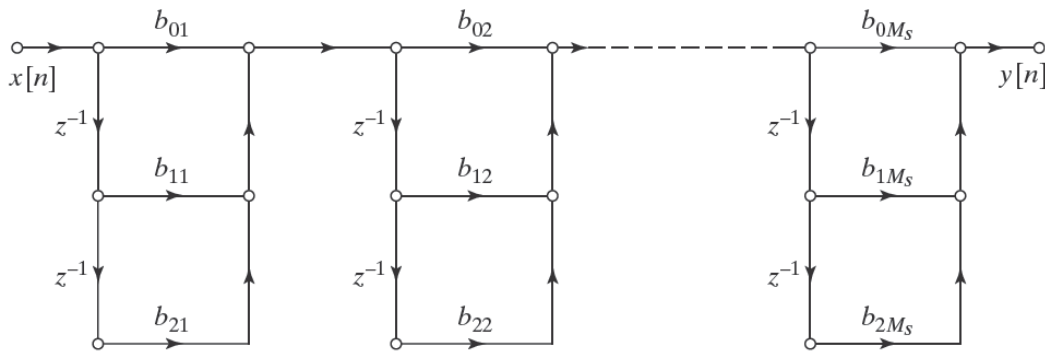
$M_s = (M + 1)/2$



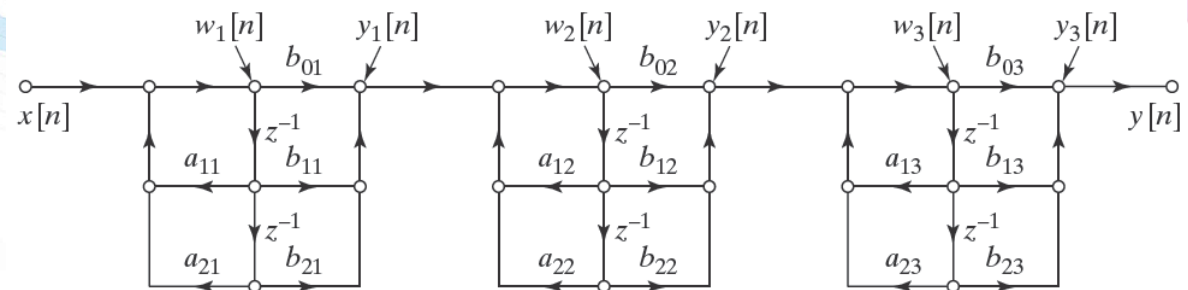
Realização de um sistema FIR na forma em cascata

Estruturas básicas de rede para sistemas FIR

Forma em cascata

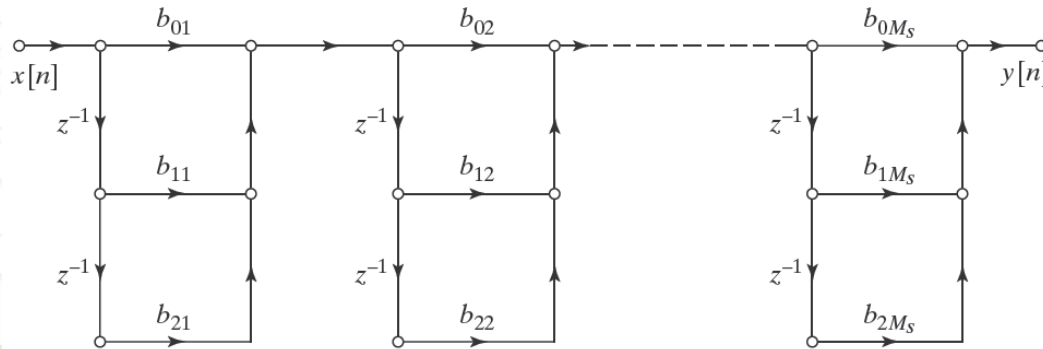


É exatamente o mesmo filtro IIR em cascata com os coeficientes a_{ik} nulos

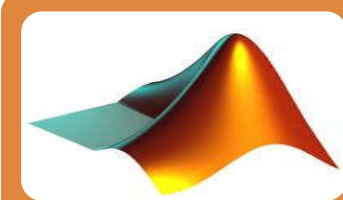
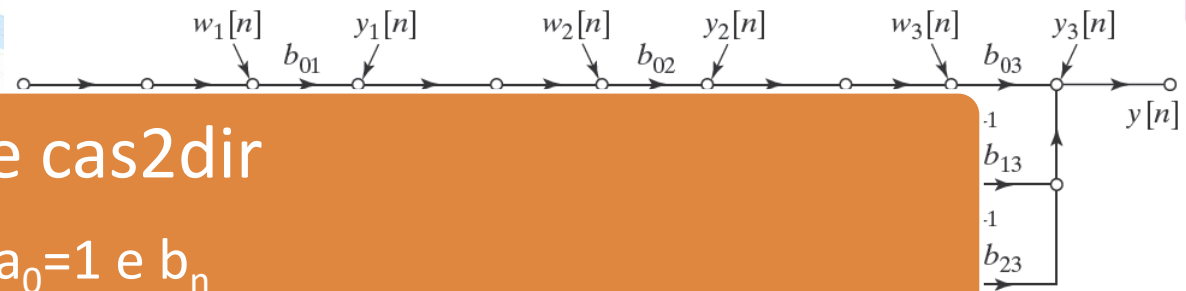


Estruturas básicas de rede para sistemas FIR

Forma em cascata



É exatamente o mesmo filtro IIR em cascata com os coeficientes a_{ik} nulos



dir2cas e cas2dir

- Vetores $a_0=1$ e b_n

Estruturas básicas de rede para sistemas FIR

Estruturas para sistemas FIR de fase linear

Para filtros seletores de frequência é desejável que eles tenham uma fase linear

$$\angle H(e^{j\omega}) = \beta - \alpha\omega, \quad -\pi < \omega \leq \pi$$

constante

$\beta = 0$ ou $\beta = \pm \frac{\pi}{2}$

$$h(n) = h(M-1-n); \quad \beta = 0, \alpha = \frac{M-1}{2}, 0 \leq n \leq M-1 \quad (6.10)$$

ou

$$h(n) = -h(M-1-n); \quad \beta = \pm\pi/2, \alpha = \frac{M-1}{2}, 0 \leq n \leq M-1 \quad (6.11)$$

$h[n]$ é simétrica

Estruturas básicas de rede para sistemas FIR

Estruturas para sistemas FIR de fase linear

Para filtros seletores de frequência é desejável que eles tenham uma fase linear

$$y(n) = b_0x(n) + b_1x(n-1) + \cdots + b_{M-1}x(n-M+1) \quad (6.7)$$

$$h(n) = h(M-1-n); \quad \beta = 0, \alpha = \frac{M-1}{2}, 0 \leq n \leq M-1 \quad (6.10)$$

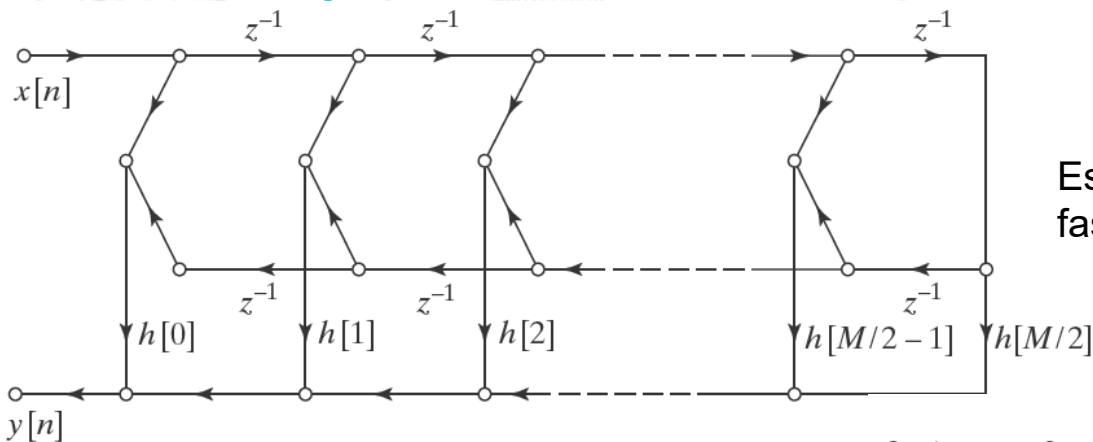


$$h(n) = -h(M-1-n); \quad \beta = \pm\pi/2, \alpha = \frac{M-1}{2}, 0 \leq n \leq M-1 \quad (6.11)$$

$$\begin{aligned} y(n) &= b_0x(n) + b_1x(n-1) + \cdots + b_1x(n-M+2) + b_0x(n-M+1) \\ &= b_0[x(n) + x(n-M+1)] + b_1[x(n-1) + x(n-M+2)] + \cdots \end{aligned}$$

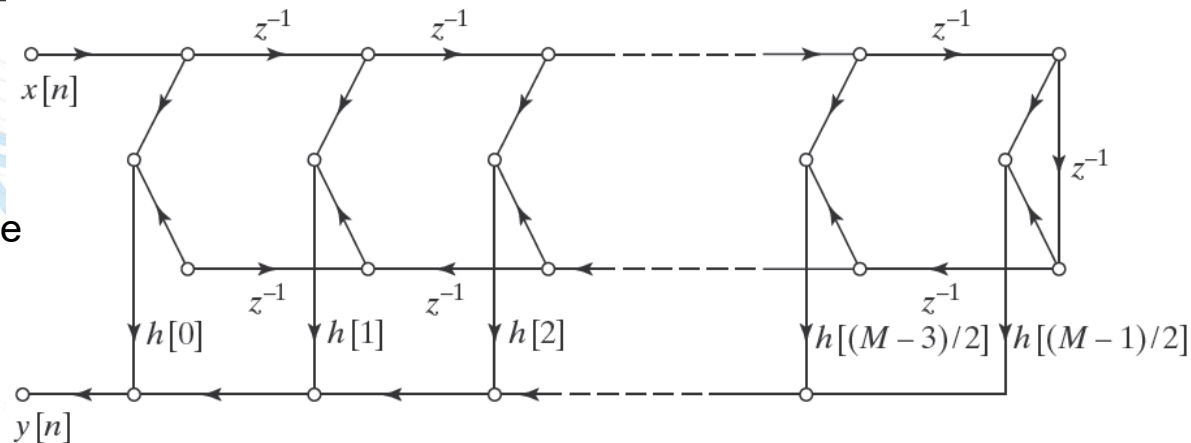
Estruturas básicas de rede para sistemas FIR

Estruturas para sistemas FIR de fase linear



Estrutura na forma direta para um sistema FIR de fase linear quando M é um inteiro par.

Estrutura na forma direta para um sistema FIR de fase linear quando M é um inteiro ímpar.



Estruturas básicas de rede para sistemas FIR

Estruturas para sistemas FIR de fase linear

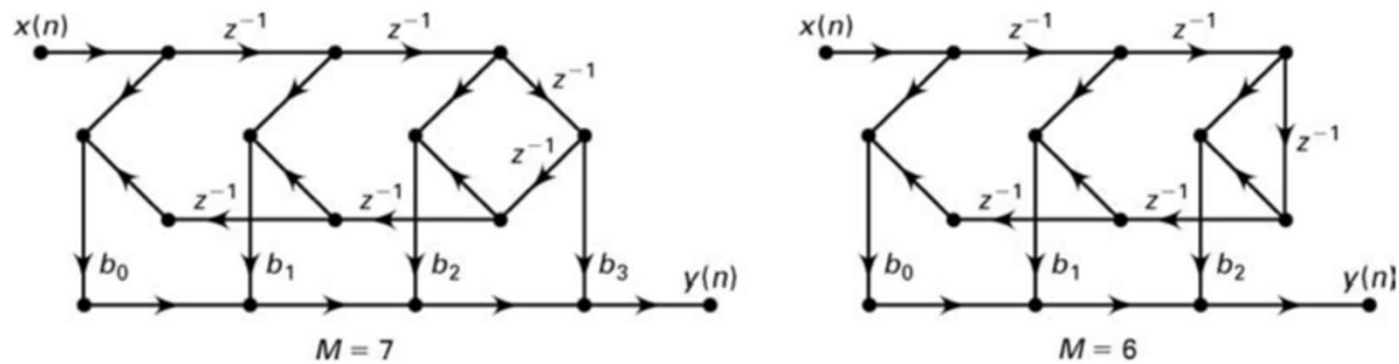
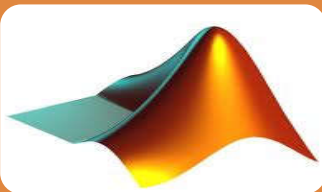


FIGURE 6.12 Linear-phase form FIR structures (symmetric impulse response)



filter

- Vetores $a_0=1$ e b_n

Exemplo

Um filtro FIR é descrito pela seguinte função do sistema:

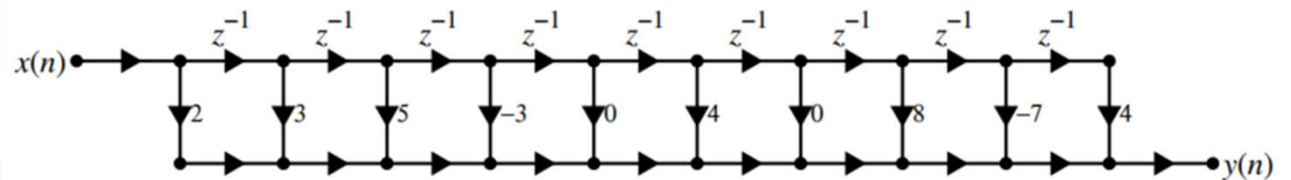
$$H(z) = 2 + 3z^{-1} + 5z^{-2} - 3z^{-3} + 4z^{-5} + 8z^{-7} - 7z^{-8} + 4z^{-9}$$

Determine e desenhe sua estrutura

- Na forma direta
- Na forma de cascata

a)

```
% (a) Direct form  
% Given FIR filter coefficients  
b = [2,3,5,-3,0,4,0,8,-7,4]; a = 1;
```



Exemplo

Um filtro FIR é descrito pela seguinte função do sistema:

$$H(z) = 2 + 3z^{-1} + 5z^{-2} - 3z^{-3} + 4z^{-5} + 8z^{-7} - 7z^{-8} + 4z^{-9}$$

Determine e desenhe sua estrutura

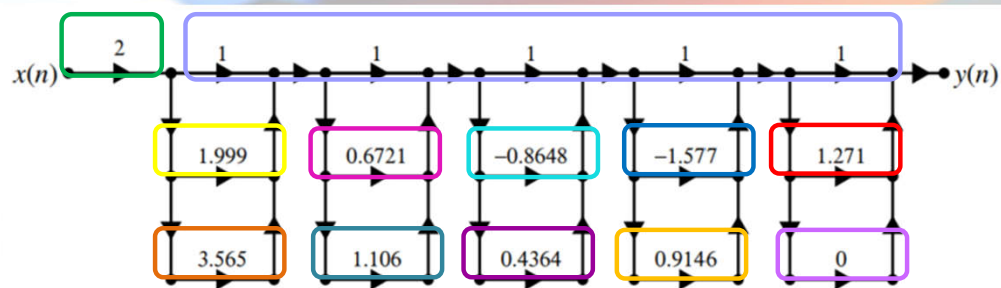
a) Na forma direta

b) Na forma de cascata

b) % (b) Cascade form
% Given FIR filter coefficients
b = [2,3,5,-3,0,4,0,8,-7,4]; a = 1;
[b0,B,A] = dir2cas(b,a)

b0 =
2

1.0000	1.9987	3.5650
1.0000	0.6721	1.1062
1.0000	-0.8648	0.4364
1.0000	-1.5766	0.9146
1.0000	1.2706	0



Exemplo

Um filtro FIR é descrito pela seguinte função do sistema:

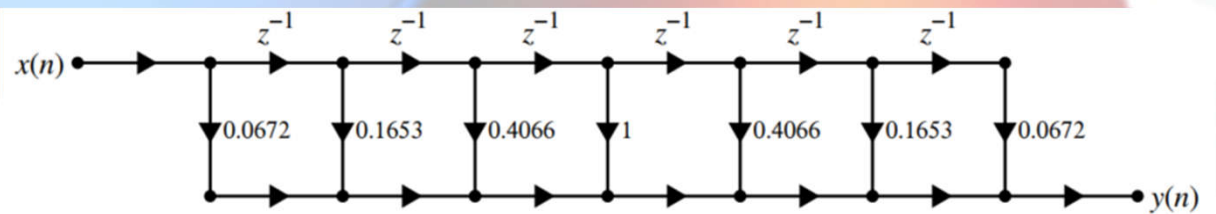
$$y(n] = \sum_{k=0}^6 e^{-0.9|k-3|} x(n-k)$$

Determine e desenhe sua estrutura

- Na forma direta
- Na forma de fase-linear
- Na forma de cascata

a)

```
% (a) Direct form
% Given FIR filter coefficients
k = [0:6]; b = exp(-0.9*abs(k-3))
b =
    0.0672    0.1653    0.4066    1.0000    0.4066    0.1653    0.0672
```



Exemplo

Um filtro FIR é descrito pela seguinte função do sistema:

$$y(n] = \sum_{k=0}^6 e^{-0.9|k-3|} x(n-k)$$

Determine e desenhe sua estrutura

- Na forma direta
- Na forma de fase-linear
- Na forma de cascata

b)

```
% (b) Linear-phase form  
% Given FIR filter coefficients  
k = [0:6]; b = exp(-0.9*abs(k-3))  
b =
```

0.0672

0.1653

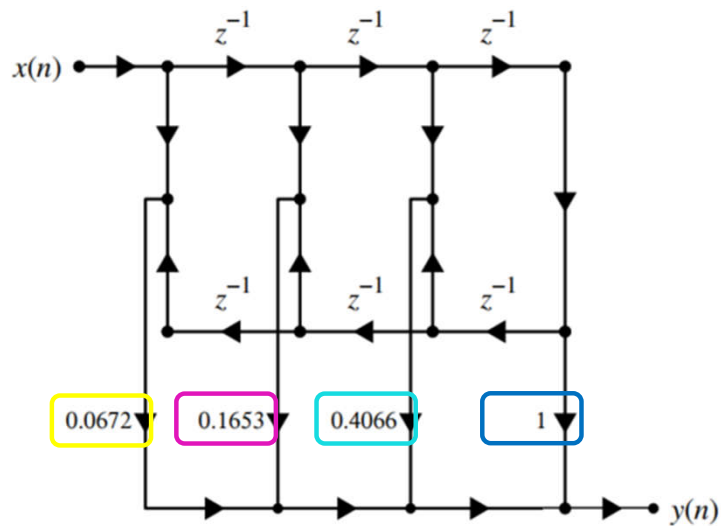
0.4066

1.0000

0.4066

0.1653

0.0672



Exemplo

Um filtro FIR é descrito pela seguinte função do sistema:

$$y(n] = \sum_{k=0}^6 e^{-0.9|k-3|} x(n-k)$$

Determine e desenhe sua estrutura

- Na forma direta
- Na forma de fase-linear
- Na forma de cascata

b)

```
% (b) Linear-phase form  
% Given FIR filter coefficients  
k = [0:6]; b = exp(-0.9*abs(k-3))  
b =
```

0.0672

0.1653

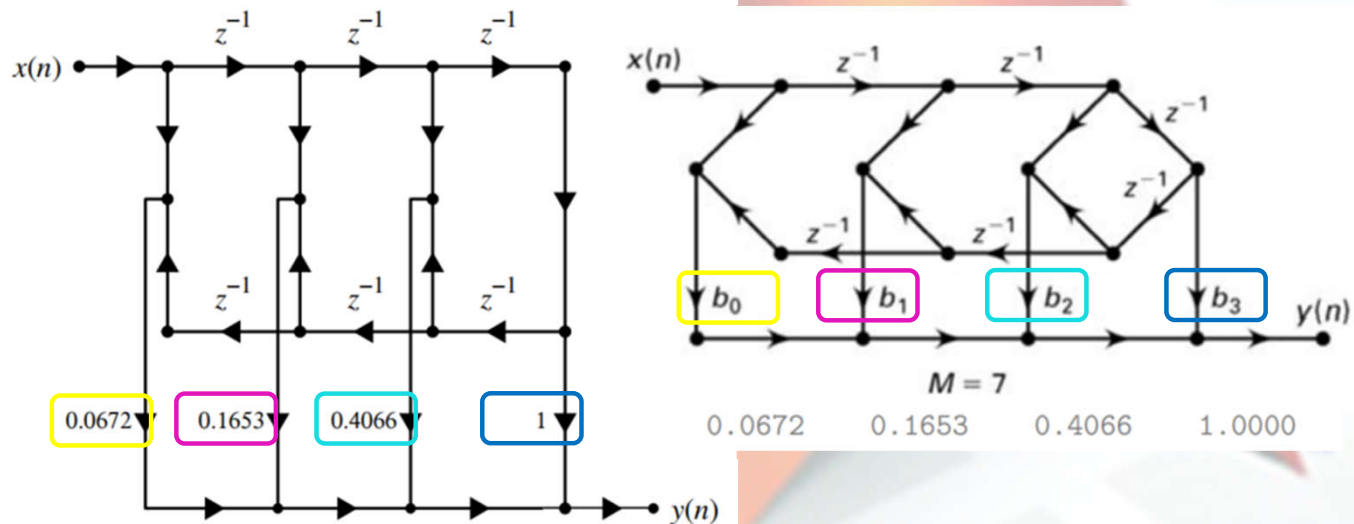
0.4066

1.0000

0.4066

0.1653

0.0672



Exemplo

Um filtro FIR é descrito pela seguinte função do sistema:

$$y(n) = \sum_{k=0}^6 e^{-0.9|k-3|} x(n-k)$$

Determine e desenhe sua estrutura

- Na forma direta
- Na forma de fase-linear
- Na forma de cascata

b) % (c) Cascade Form
% Given FIR filter coefficients
k = [0:6]; b = exp(-0.9*abs(k-3)); a = 1;
[b0,B,A] = dir2cas(b,a)

b0 =
0.0672

B =

1.0000	-0.0366	0.1817
1.0000	-0.2015	5.5030
1.0000	2.6978	1.0000

