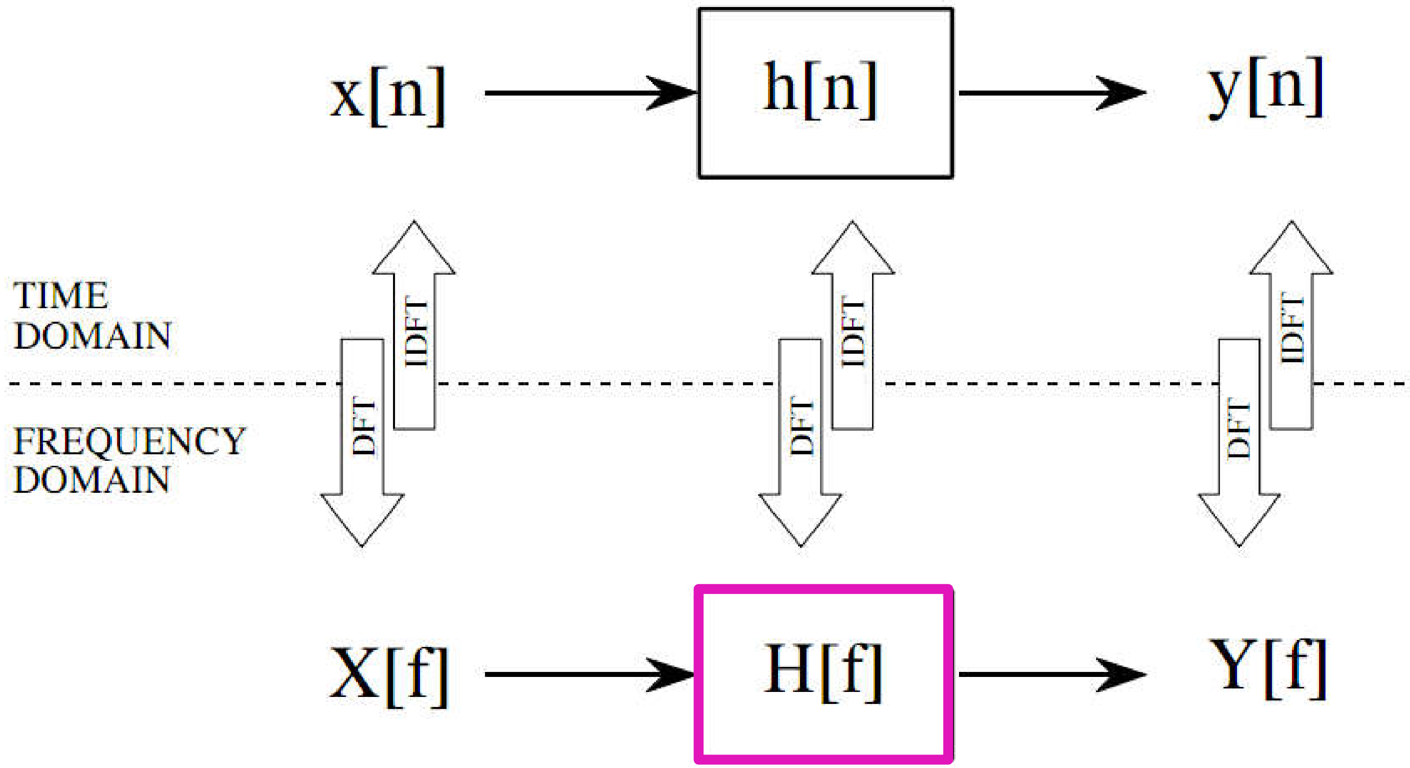
Análise no domínio transformado de sistemas LIT

Análise no domínio transformado de sistemas LIT

INTRODUÇÃO

Resposta em freqüência dos sistemas



$y[n]=x[n]*h[n]$

$Y[f]=X[f]H[f]$

Análise no domínio transformado de sistemas LIT

FUNÇÃO DO SISTEMA (RESPOSTA EM FREQUÊNCIA)

Representação do Sistema por equações de diferenças

Possivel modelar um sistema utilizando equações de diferenças

$$\sum_{k=0}^{N} \alpha_k \Delta^k y[n] = \sum_{k=0}^{M} \beta_k \Delta^k x[n]$$

COMBINAÇÃO DE DIFERENÇAS

Pode ser reescrita de uma forma mais usual

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

Função do Sistema H(z)

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^{M} b_l x[n-l] \Rightarrow y[n] + \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^{M} b_l x[n-l]$$

Aplicando **TZ**, temos

$$Y(z) + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{\ell=0}^{M} b_\ell z^{-\ell} X(z) \Rightarrow H(z) \triangleq \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{\ell=0}^{M} b_\ell z^{-\ell}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

$$= \frac{b_0 z^{-M}\left(z^M + \cdots + \frac{b_M}{b_0}\right)}{z^{-N}\left(z^N + \cdots + a_N\right)}$$

$$Y(z) = H(z)X(z) \Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

com X(z)≠0

$$\boxed{H(z) = b_0\, z^{N-M} \frac{\prod_{\ell=1}^{N}(z - z_\ell)}{\prod_{k=1}^{N}(z - p_k)}}$$

zeros

polos

Função de Transferencia do Sistema H(ω)

- Se a ROC de H(z) incluir o circulo unitário $z = e^{j\omega}$ podemos avaliar H(z) no circulo unitário resultando em uma RF

Vetor no plano complexo Z de que vai do zero z_l até o circulo unitário $z = e^{j\omega}$

$$H(e^{j\omega}) = b_0\ e^{j(N-M)\omega}\ \frac{\prod_1^M \boxed{(e^{j\omega} - z_\ell)}}{\prod_1^N \boxed{(e^{j\omega} - p_k)}}$$

Vetor no plano complexo Z de que vai do polo p_k até o circulo unitário $z = e^{j\omega}$

Magnitude

$$|H(e^{j\omega})| = |b_0| \frac{|e^{j\omega} - z_1| \cdots |e^{j\omega} - z_M|}{|e^{j\omega} - p_1| \cdots |e^{j\omega} - p_N|}$$

São produtos de tamanhos de vetores!

$$\angle H(e^{j\omega}) = \underbrace{[0 \text{ or } \pi]}_{\text{Constant}} + \underbrace{[(N-M)\,\omega]}_{\text{Linear}} + \underbrace{\sum_1^M \angle(e^{j\omega} - z_k)\ - \sum_1^N \angle(e^{j\omega} - p_k)}_{\text{Nonlinear}}$$

Fase

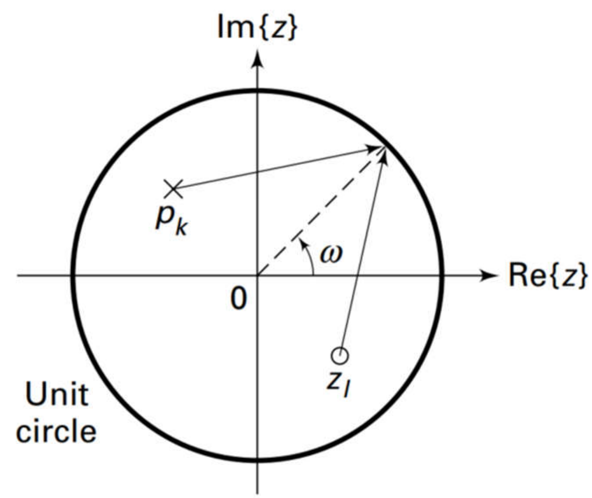
Função de Transferencia do Sistema H(ω)

- Se a ROC de H(z) incluir o circulo unitário $z = e^{j\omega}$ podemos avaliar H(z) no circulo unitário resultando em uma RF

Vetor no plano comple

$$H(e^{j\omega}) = b_0\, e^{j(N-M)\omega}\, \frac{\prod_1^M \boxed{(e^{j\omega} - z_\ell)}}{\prod_1^N \boxed{(e^{j\omega} - p_k)}}$$

Vet



Magnitude

$$|H(e^{j\omega})| = |b_0| \frac{|e^{j\omega} - z_1| \cdots |e^{j\omega} - z_M|}{|e^{j\omega} - p_1| \cdots |e^{j\omega} - p_N|}$$

São produtos de tamanhos de vetores!

$$\angle H(e^{j\omega}) = \underbrace{[0 \text{ or } \pi]}_{\text{Constant}} + \underbrace{[(N-M)\,\omega]}_{\text{Linear}} + \underbrace{\sum_1^M \angle(e^{j\omega} - z_k) - \sum_1^N \angle(e^{j\omega} - p_k)}_{\text{Nonlinear}}$$

Fase

roots, poly, zplane, freqz, impz

- roots determina raízes de um polinômio
- poly obtém os coeficientes de um polinômio a partir de suas raízes
- zplane(b,a) faz um gráfico de polos e zeros dados os vetores **b** e **a**

`zplane(b,a)` where `b` and `a` are row vectors, first uses `roots` to find the zeros and poles of the transfer function represented by numerator coefficients `b` and denominator coefficients `a`. The transfer function is defined in terms of z^{-1}:

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b(1)+b(2)z^{-1}+\cdots+b(n+1)z^{-n}}{a(1)+a(2)z^{-1}+\cdots+a(m+1)z^{-m}}$$

MATLAB®

roots, poly, zplane, freqz, impz

- freqz

Description

[h,w] = freqz(b,a,n) returns the n-point frequency response vector h and the corresponding angular frequency vector w for the digital filter with transfer function coefficients stored in b and a.

- impz

Description

[h,t] = impz(b,a) returns the impulse response of the filter with numerator coefficients, b, and denominator coefficients, a. impz chooses the number of samples and returns the response in the column vector, h, and the sample times in the column vector, t. t = [0:n-1]' and n = length(t) is computed automatically.

Exemplo

Considere o sistema causal

$$y[n] = 0.9y[n-1] + x[n]$$

a) Determine H(z) e esquematize seu diagrama de polos e zeros

b) Faça o gráfico de $|H(e^{j\omega})|$ e $\angle H(e^{j\omega})$

c) Determine a RI h[n]

a)

$$y[n] - 0.9y[n-1] = x[n] \qquad H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$Y(z) - 0.9z^{-1}Y(z) = X(z)$$

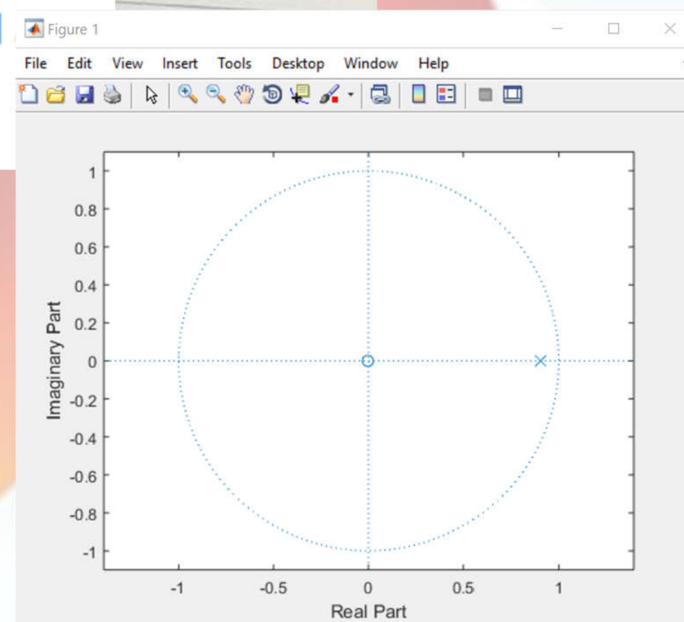
$$(1 - 0.9z^{-1})Y(z) = X(z)$$

$$\underbrace{\frac{Y(z)}{X(z)}}_{} = \frac{1}{1-0.9z^{-1}}$$

$$\boxed{H(z) = \frac{1}{1-0.9z^{-1}}}$$

sist causal
ROC $|z| > 0.9$

```
>> b=[1];a=[1,-0.9]
>> zplane(b,a)
>>
```



Exemplo

Considere o sistema causal
$$y[n] = 0.9y[n-1] + x[n]$$

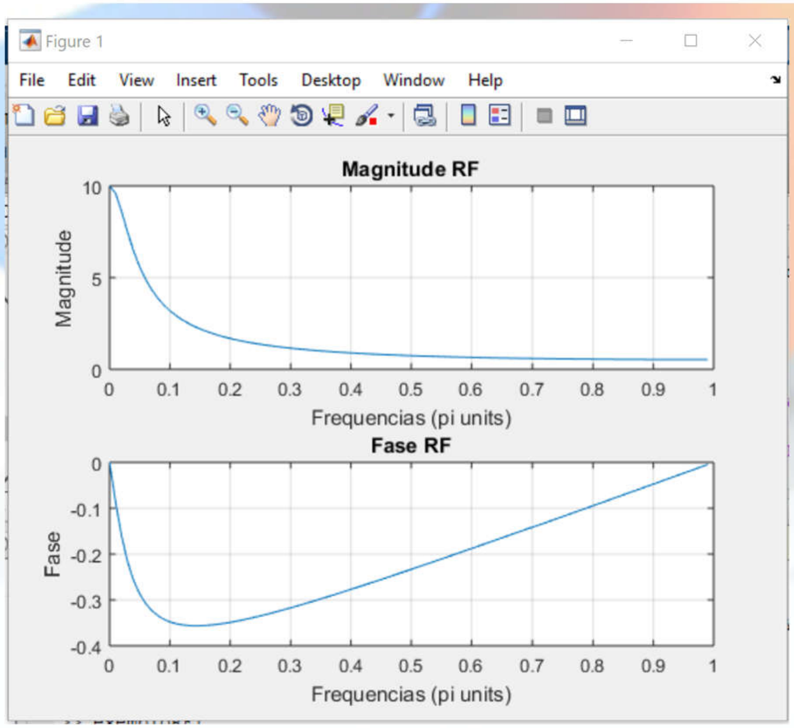
a) Determine H(z) e esquematize seu diagrama de polos e zeros

b) Faça o gráfico de $|H(e^{j\omega})|$ e $\angle H(e^{j\omega})$

c) Determine a RI h[n]

b)

```
b=[1];a=[1,-0.9];
[H,w]=freqz(b,a,100);
magH=abs(H);faseH=angle(H);
subplot(2,1,1);plot(w/pi,magH);grid
xlabel('Frequencias (pi units)');ylabel('Magnitude');title('Magnitude RF');
subplot(2,1,2);plot(w/pi,faseH/pi);grid
xlabel('Frequencias (pi units)');ylabel('Fase');title('Fase RF');
```



Exemplo

Considere o sistema causal
$$\boldsymbol{y[n] = 0.9y[n-1] + x[n]}$$

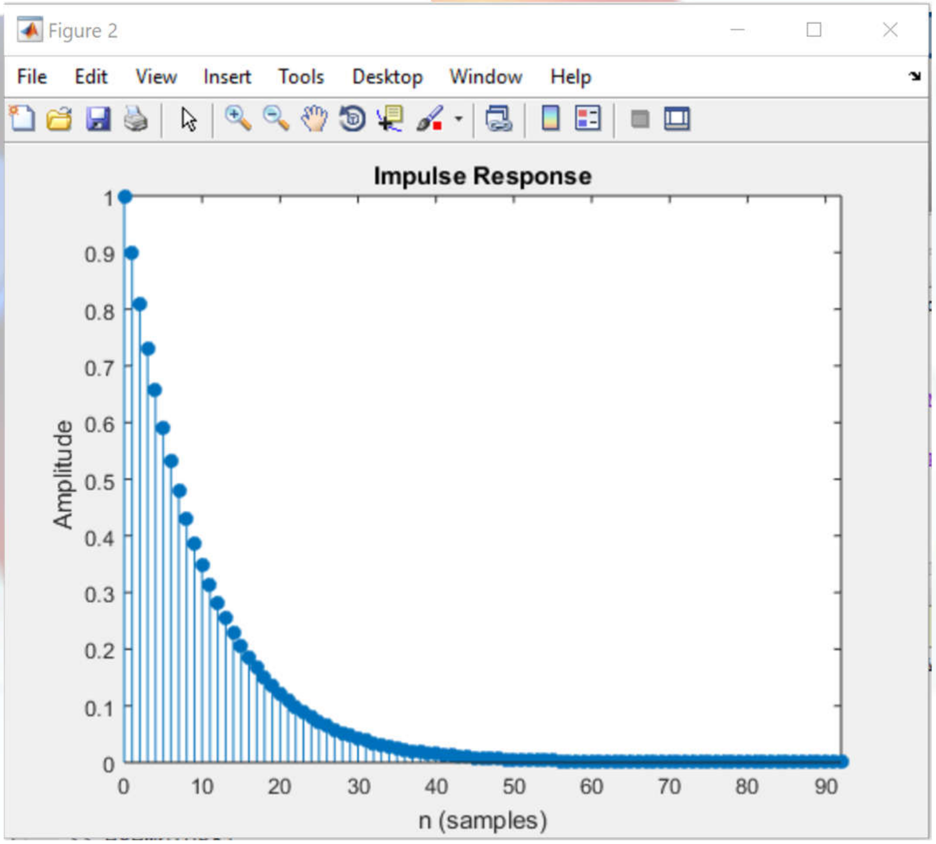
a) Determine H(z) e esquematize seu diagrama de polos e zeros

b) Faça o gráfico de $|H(e^{j\omega})|$ e $\angle H(e^{j\omega})$

c) Determine a RI h[n]

c) $$h(n) = \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{1-0.9z^{-1}},\ |z| > 0.9\right] = (0.9)^n u(n)$$

```
figure(2);impz(b,a);
```



Análise no domínio transformado de sistemas LIT

RELAÇÃO ENTRE AS REPRESENTAÇÕES DE SISTEMAS

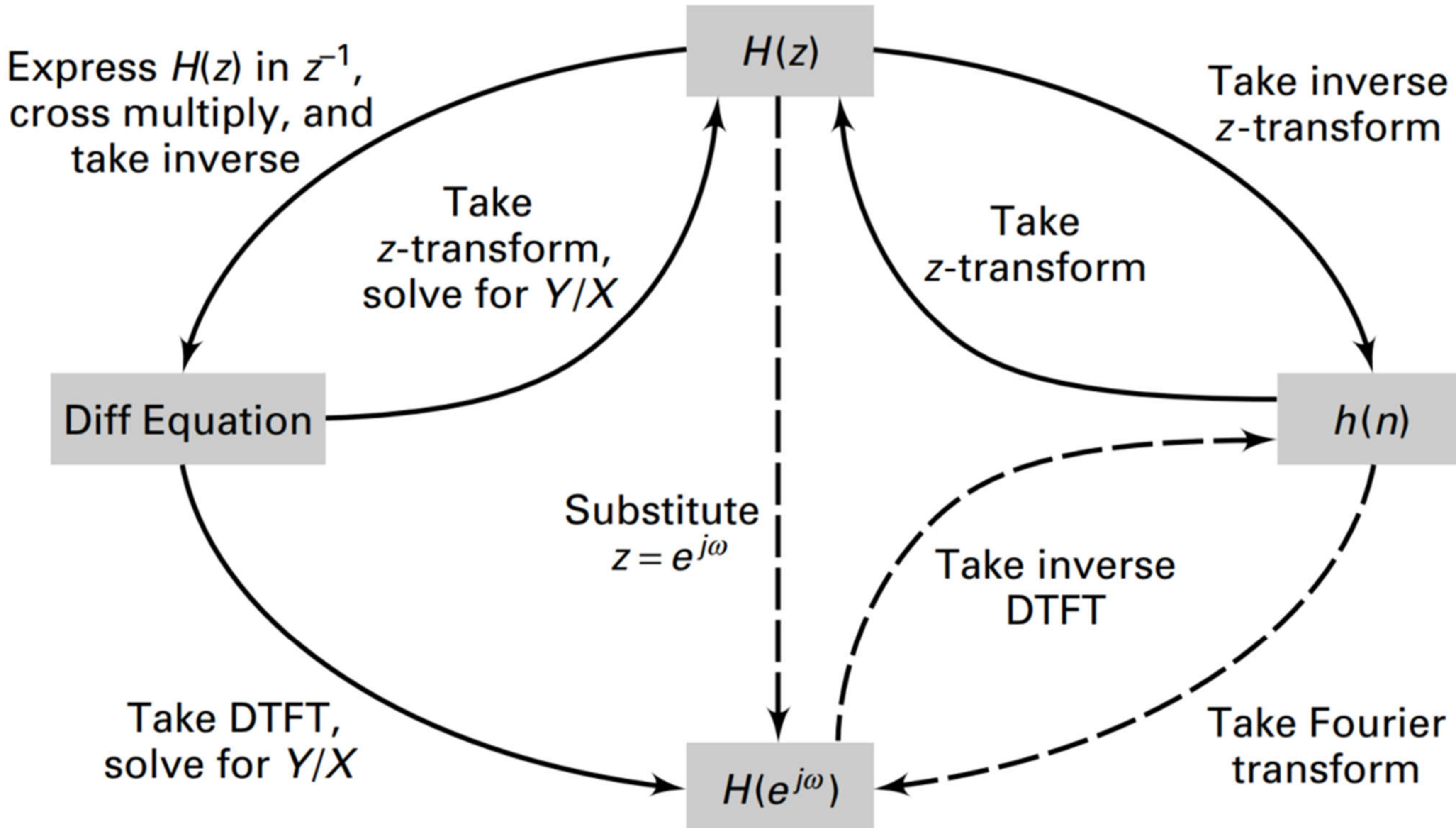


FIGURE 4.9 *System representations in pictorial form*

Análise no domínio transformado de sistemas LIT

ESTABILIDADE E CAUSALIDADE DE SISTEMAS LTI

Sistemas Realizáveis

- Sistemas ESTÁVEIS e CAUSAIS são chamados **REALIZÁVEIS**

Estabilidade
Um sistema LTI é dito estável se a ROC de H(z) contém o circulo unitário

Causalidade
Um sistema LTI causal é estável se possuir todos os **<u>pólos inseridos no círculo unitário.</u>**

Exemplo

Considere o sistema descrito pela seguinte equação de diferenças

$$\boldsymbol{y[n] = 0.81y[n-2] + x[n] - x[n-2]}$$

Determine

a) A função do sistema H(z)

b) A RI h[n]

c) A resposta ao degrau, s[n]

d) A RF $H(e^{j\omega})$. Faça o gráfico de $|H(e^{j\omega})|$ e $\angle H(e^{j\omega})$ no intervalo $0 \leq \omega \leq \pi$

a)

$$Y(z)/X(z)$$

Sistema causal, ROC é o complemento do disco

$$H(z) = \frac{1 - z^{-2}}{1 - 0.81z^{-2}} = \frac{1 - z^{-2}}{(1 + 0.9z^{-1})(1 - 0.9z^{-1})}, \quad |z| > 0.9$$

Exemplo

Considere o sistema descrito pela seguinte equação de diferenças

$$\boldsymbol{y[n] = 0.81y[n-2] + x[n] - x[n-2]}$$

Determine

a) A função do sistema H(z)

b) A RI h[n]

c) A resposta ao degrau, s[n]

d) A RF $H(e^{j\omega})$. Faça o gráfico de $|H(e^{j\omega})|$ e $\angle H(e^{j\omega})$ no intervalo $0 \leq \omega \leq \pi$

b)

$$H(z) = \frac{1 - z^{-2}}{1 - 0.81z^{-2}} = \frac{1 - z^{-2}}{(1 + 0.9z^{-1})(1 - 0.9z^{-1})}, \quad |z| > 0.9$$

```
>> b = [1,0,-1]; a = [1,0,-0.81]; [R,p,C] = residuez(b,a);
R =
   -0.1173
   -0.1173
p =
   -0.9000
    0.9000
C =
    1.2346
```

$$H(z) = 1.2346 - 0.1173\frac{1}{1 + 0.9z^{-1}} - 0.1173\frac{1}{1 - 0.9z^{-1}}, \ |z| > 0.9$$

$$\boxed{h(n) = 1.2346\delta(n) - 0.1173\{1 + (-1)^n\}(0.9)^n u(n)}$$

Exemplo

Considere o sistema descrito pela seguinte equação de diferenças

$$\boldsymbol{y[n] = 0.81y[n-2] + x[n] - x[n-2]}$$

Determine

a) A função do sistema H(z)

b) A RI h[n]

c) A resposta ao degrau, s[n]

d) A RF $H(e^{j\omega})$. Faça o gráfico de $|H(e^{j\omega})|$ e $\angle H(e^{j\omega})$ no intervalo $0 \leq \omega \leq \pi$

c) s[n]=h[n]*u[n] é a resposta do sistema quando a entrada é o degrau

S(z)=H(z)U(z)

$$\mathcal{Z}[u(n)] = U(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}, \quad |z| > 1$$

S(z)=H(z)U(z)=

$$= \left[\frac{(1+z^{-1})(1-z^{-1})}{(1+0.9z^{-1})(1-0.9z^{-1})}\right]\left[\frac{1}{1-z^{-1}}\right], \quad |z| > 0.9 \cap |z| > 1$$

$$= \frac{1+z^{-1}}{(1+0.9z^{-1})(1-0.9z^{-1})}, \quad |z| > 0.9$$

$$= 1.0556\frac{1}{1-0.9z^{-1}} - 0.0556\frac{1}{1+0.9z^{-1}}, \quad |z| > 0.9$$

s(n) $= [1.0556(0.9)^n - 0.0556\,(-0.9)^n]\,u(n)$

Exemplo

d) Substituindo $z = e^{j\omega}$ em H(z)

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 - e^{-j2\omega}}{1 - 0.81e^{-j2\omega}}$$

Considere o sistema descrito pela seguinte equação de diferenças

$$\boldsymbol{y[n] = 0.81y[n-2] + x}$$

```
b=[1,0,-1];a=[1,0,-0.81];
w=[0:500]*pi/500;
H=freqz(b,a,w);
magH=abs(H);faseH=angle(H);
subplot(2,1,1);plot(w/pi,magH);grid
xlabel('Frequencias (pi units)');ylabel('Magnitude');title('Magnitude RF');
subplot(2,1,2);plot(w/pi,faseH/pi);grid
xlabel('Frequencias (pi units)');ylabel('Fase');title('Fase RF');
```

Determine

a) A função do sistem

b) A RI h[n]

c) A resposta ao degrau, s[n]

d) A RF $H(e^{j\omega})$. Faça o gráfico de $|H(e^{j\omega})|$ e $\angle H(e^{j\omega})$ no intervalo $0 \leq \omega \leq \pi$

Exemplo

d) Substituindo $z = e^{j\omega}$em H(z)

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 - e^{-j2\omega}}{1 - 0.81e^{-j2\omega}}$$

Considere o sistema descrito pela seguinte equação de diferenças

$$\boldsymbol{y[n]}$$
$$\boldsymbol{= 0.81y[n-2] + x}$$

Determine

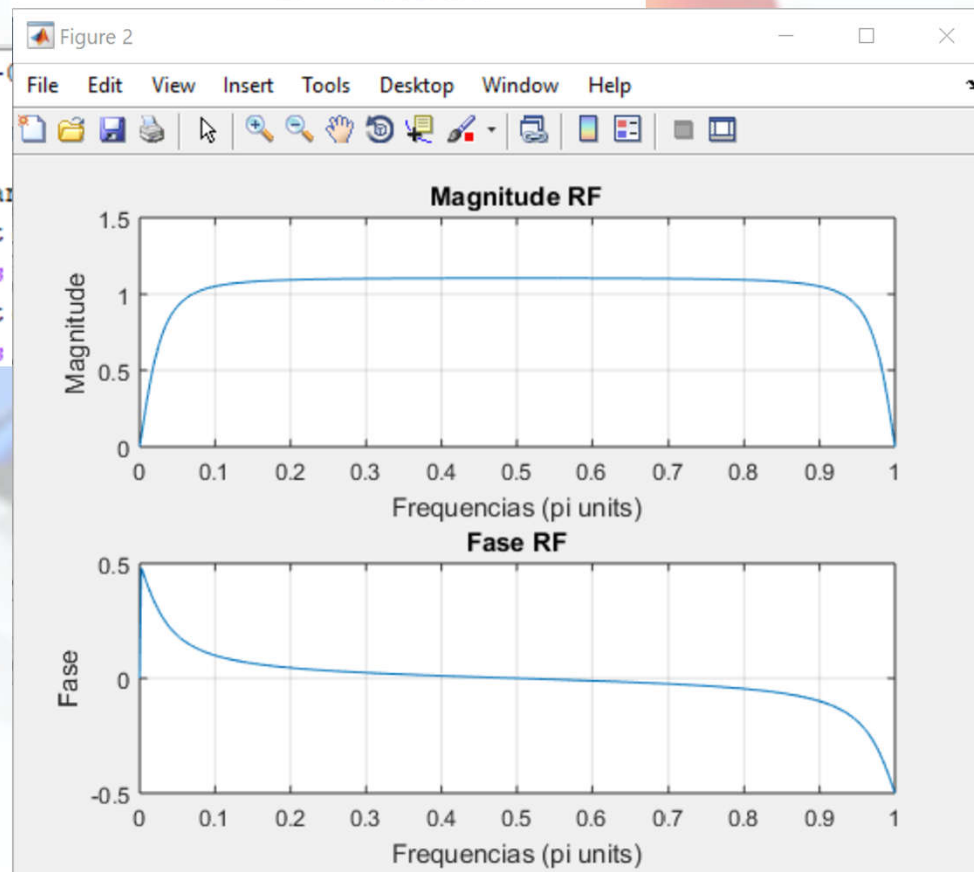
a) A função do sistem

b) A RI h[n]

c) A resposta ao degrau, s[n]

d) A RF $H(e^{j\omega})$. Faça o gráfico de $|H(e^{j\omega})|$ e $\angle H(e^{j\omega})$ no intervalo $0 \leq \omega \leq \pi$

```
b=[1,0,-1];a=[1,0,-(
w=[0:500]*pi/500;
H=freqz(b,a,w);
magH=abs(H);faseH=an
subplot(2,1,1);plot
xlabel('Frequencias
subplot(2,1,2);plot
xlabel('Frequencias
```



Análise no domínio transformado de sistemas LIT

SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE DIFERENÇAS

Solução da equação de diferenças

Solução particular e solução homogênea

- Analogia com equações diferenciais $y[n] = y_h[n] + y_p[n]$

Com base nas condições iniciais

- Em PDS as equações de diferenças estão na direção positiva $n \geq 0$
- Transformada Z unilateral

Análise no domínio transformado de sistemas LIT

SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE DIFERENÇAS

Resposta Homogênea e Resposta Forçada

Solução da equação de diferenças

Quem é y[n]???

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

Isolando $a_0 y[n]$

$$y[n] = \underbrace{\frac{1}{a_0}\left(\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]\right.}_{x[n]} - \underbrace{\left.\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]\right)}_{\text{Amostras passadas } y[n]}$$

x[n]

Amostras passadas y[n]

Solução da equação de diferenças

- Importante lembrar que as equações de diferenças descrevem OS SISTEMAS e não o sinal

Dependendo do sinal $x[n]$ a saída $y[n]$ será diferente

Para **sinais realimentados** amostras iniciais influem na resposta – CONDIÇÕES INICIAIS

CI + eq. de diferenças = analogia com equações diferenciais

Solução da equação de diferenças

- Em sistemas realimentados podemos falar de:
  - **Resposta natural**

    Parcela da resposta devido às condições iniciais

    Resposta do sistema a uma entrada nula

  - **Resposta Particular (forçada)**

    Parcela da resposta devido ao sinal de entrada x[n]

$$y[n] = y_h[n] + y_p[n]$$

Solução da equação de diferenças

Resposta Natural

$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left(\cancelto{0}{\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]} - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]\right)$$

$$y[n] = -\frac{1}{a_0}\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = 0$$

Depende apenas de valores iniciais

Solução da equação de diferenças

Resposta Natural

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = 0$$

Podemos relacionar a eq. com um polinômio em z, chamado polinomio caracteristico

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} = 0 \Rightarrow$$ N raízes

Solução da equação de diferenças

Resposta Natural

- Podemos relacionar a eq. com um polinômio em z, chamado polinômio caracteristico

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{N raízes} \quad \Rightarrow \quad y_h[n] = \sum_{k=1}^{N} A_k z_k^n$$

- As constantes A_k são calculadas a partir das condições iniciais
    - N eq e N incognitas

Exemplo 5

Dada a eq. de diferenças homogênea abaixo com condição inicial y[-1]=1. Obtenha y[n].

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = 0$$

Exemplo 5 Dada a eq de ≠s homogênea com CIs $y[-1]=1$ Obtenha $y[n]$

$$\underset{N=0}{y[n]} - \frac{1}{2}\underset{N=1}{y[n-1]} = 0 \quad (1)$$

1º Passo: polinômio característico em z $\boxed{\sum_{K=0}^{N} a_K z^{-K} = 0}$

$$\sum_{K=0}^{1} a_K z^{K} = a_0 z^0 + a_1 z^{1} = a_0 + a_1 z^{-1} = 0 \quad (2)$$

Comparando 1 e 2 $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = -1/2 \end{cases}$

$$1 - \frac{1}{2} z^{-1} = 0 \rightarrow 1 = \frac{1}{2z} \rightarrow z = \frac{1}{2}$$ → obtenho as raízes

2º passo: Obter os coeficientes A_K usando as CIs

$$\boxed{y[n] = \sum_{K=1}^{N=1} A_K z_K^{n}} = A_1 z_1^{n} = A_1 (z_1)^{n}$$

$$\boxed{y[-1] = 1} = A_1 \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$$

$$1 = 2A_1 \rightarrow \boxed{A_1 = \frac{1}{2}}$$

3º Passo: Escrever $y[n]$ e obter o termo geral

$$y[n] = \sum_{K=1}^{N=1} A_K z_K^{n} = A_1 z_1^{n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n} = \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$\boxed{y[n] = \frac{1}{2^{n+1}}}$$

tilibra

$$y[n] = \frac{1}{2^{n+1}}u[n]$$

Exemplo 6

Dada a eq. de diferenças homogênea abaixo com condição inicial y[-1]=-1 e y[-2]=1. Obtenha y[n].

$$y[n] - y[n-2] = 0$$

Exemplo 6: Obtenha y[n] para a eq de ≠s homog a seguir com CIs y[-1]=-1 y[-2]=1

$$\underset{N=0}{y[n]} - \underset{N=2}{y[n-2]} = 0$$

1º Passo: Raízes do polinômio característico

$$\sum_{k=0}^{N=2} a_k z^{-k} = 0 \qquad a_0 z^0 + \cancel{a_1 z^{-1}} \; a_2 z^{-2} = 0$$

$$a_0 + a_2 z^{-2} = 0$$

Comparando: $a_0 = 1$ $a_2 = -1$ $\rightarrow 1 - z^{-2} = 0$

$$1 - \frac{1}{z^2} = 0 \rightarrow z^2 = 1$$

$$z = \pm 1$$

$$\boxed{z_1 = 1 \quad z_2 = -1}$$

2º Passo: Obter coef A_k usando as CIs

$$y[n] = \sum_{k=1}^{N} A_k \underbrace{z_k^n}_{\text{raiz } k} \qquad N = 2, \; 2 \text{ raízes}$$

$$y[n] = A_1 z_1^n + A_2 z_2^n = A_1 (1)^n + A_2 (-1)^n$$

$$y[n] = A_1 + A_2 (-1)^n$$

usando as CIs

$y[-1] = -1 = A_1 + A_2(-1)^{-1} = A_1 - A_2 = -1$

$y[-2] = 1 = A_1 + A_2(-1)^{-2} = A_1 + A_2 = 1$ $\quad \boxed{A_2 = 1}$

$$2A_1 = 0$$

$$\boxed{A_1 = 0}$$

3º Passo: Escrever y[n] usando os coef A_k

$$y[n] = \sum_{k=1}^{N} A_k z_k^n \rightarrow y[n] = \underset{0}{A_1} + \underset{1}{A_2}(-1)^n = (-1)^n$$

$$\boxed{y[n] = (-1)^n}$$

$$y[n] = (-1)^n u[n]$$

Solução da equação de diferenças

Resposta Forçada

- Obtida quando a sequencia de entrada é diferente de zero e as condições iniciais são todas nulas
  - **Sem realimentação**

$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left(\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \cancel{\sum \cdots - k]}\right)$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

É uma convolução

Solução da equação de diferenças

$$y[n = \frac{1}{a_0}\left(\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]\right)$$

$$y[n] = y_p[n] + y_h[n]$$

Depende das CI
Relacionada aos polos do sistema

Depende do sinal de entrada
Relacionada aos polos da entrada

Exemplo

Considere o sistema descrito pela seguinte equação de diferenças

$$\boldsymbol{y[n] - y[n-1] + 0.9y[n-2] = x[n]}$$

Determine

a) A RI h[n] e faça seu gráfico para n=[-20:100]

b) A resposta ao degrau, s[n], para n=[-20:100]

a) h[n]

```
>> b = [1]; a = [1, -1, 0.9];  n = [-20:120];
>> h = impz(b,a,n);
>> subplot(2,1,1); stem(n,h);
>> title('Impulse Response'); xlabel('n'); ylabel('h(n)')
```

b) s[n]

```
>> x = stepseq(0,-20,120);   s = filter(b,a,x);
>> subplot(2,1,2); stem(n,s)
>> title('Step Response'); xlabel('n'); ylabel('s(n)')
```

Description

`y = filter(b,a,x)` filters the input data, `x`, using a rational transfer function defined by the numerator and denominator coefficients `b` and `a`, respectively.

Exemplo

Considere o sistema descrito pela seguinte equação de diferenças

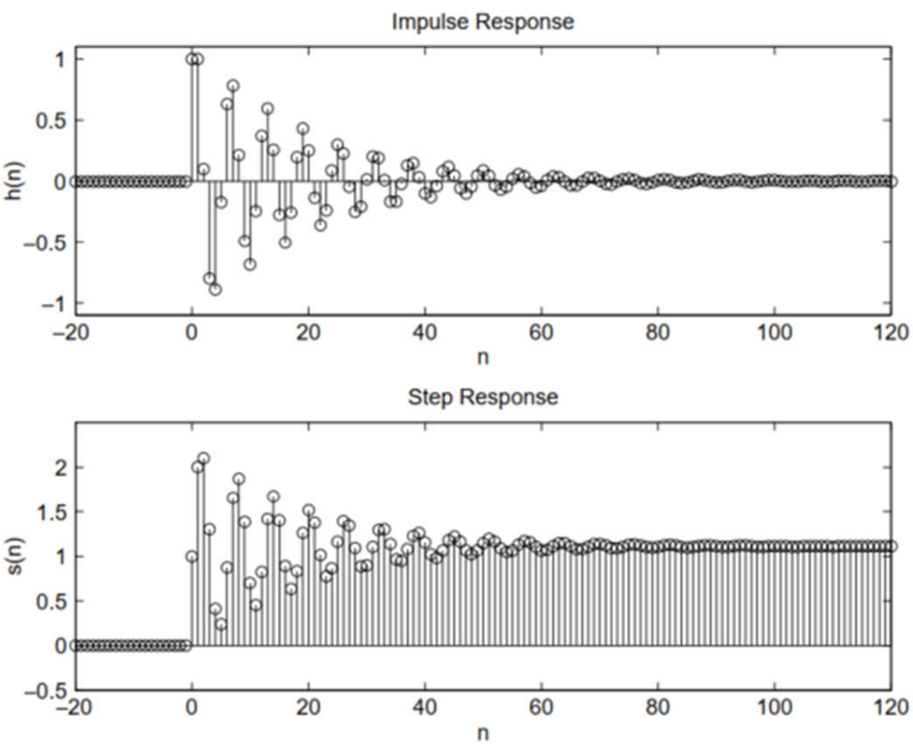
$y[n] - y[n-1] + 0.9y[n-2]$

a) h[n]

```
>> b = [1]; a = [1, -1, 0.9];  n = [-20:120];
>> h = impz(b,a,n);
>> subplot(2,1,1); stem(n,h);
>> title('Impulse Response'); xlabel('n'); ylabel('h(n)')
```

b) s[n]

```
x = stepseq(0,-20,120);   s = filter(b,a,x);
subplot(2,1,2); stem(n,s)
title('Step Response'); xlabel('n'); ylabel('s(n)')
```



function defined by the numerator and

Análise no domínio transformado de sistemas LIT

SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE DIFERENÇAS

TZ unilateral

A Transformada Z Unilateral

Pode ser **utilizada na representação de equações de diferenças**.

Aplica-se a sinais de sistemas causais

É definida como $$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

As transformadas Z Unilateral e Bilateral são equivalentes para sistemas causais.

A transformadas Z Unilateral satisfaz as mesmas propriedades da Transformada Z Bilateral, **com exceção da propriedade de deslocamento no tempo.**

A Transformada Z Unilateral

Deslocamento no Tempo

Admitamos que $w[n] = x[n-1]$, onde $X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$

é a transformada Z unilateral de x[n].

A transformadas Z Unilateral de w[n] é definida de maneira semelhante, isto é

$$W(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w[n]z^{-n}$$

A Transformada Z Unilateral

Deslocamento no Tempo

Expressamos W(z) como uma função de X(z) com segue:

$$
\begin{aligned}
W(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} x[n-1]z^{-n} \\
&= x[-1] + \sum_{n=1}^{\infty} x[n-1]z^{-n} \\
&= x[-1] + \sum_{m=0}^{\infty} x[m]z^{-(m+1)} \\
&= x[-1] + z^{-1}\sum_{m=0}^{\infty} x[m]z^{-m} \\
&= x[-1] + z^{-1}X(z)
\end{aligned}
$$

A Transformada Z Unilateral

Deslocamento no Tempo

Para um retardo k, isto é $x[n-k]$, temos que

$$X(z) = x[-k] + x[-k+1]z^{-1} + \cdots + x[-1]z^{-k+1} + z^{-k}X(z), \quad k > 0$$

Para um adiamento k, isto é $x[n+k]$, temos que

$$X(z) = -x[0] - x[1]z^{k-1} - \cdots - x[k-1]z + z^{k}X(z), \quad k > 0$$

Exemplo 14

Considere o sistema descrito pela equação de diferenças

$$y[n] - 0{,}9y[n-1] = x[n]$$

Encontre a saída se a entrada for $x[n] = u[n]$ e se a condição inicial for $y[-1] = 2$

Sist não depende de amostras futuras de $x[n]$

↳ Causal

↳ Vamos tomar a TZ unilateral de ambos os lados

$$Y(z) - 0{,}9\left[y[-1] + z^{-1}Y(z)\right] = X(z)$$

$$Y(z) - 0{,}9\,y[-1] - 0{,}9\,z^{-1}Y(z) = X(z)$$

$$Y(z)\left(1 - 0{,}9z^{-1}\right) = X(z) + 0{,}9\,y[\overset{2}{\cancel{-1}}]$$

$$Y(z) = X(z)\cdot\frac{1}{1-0{,}9z^{-1}} + 1{,}8\,\underbrace{\frac{1}{1-0{,}9z^{-1}}}_{(0{,}9)^n u[n]}$$

$$= \left[\frac{1}{1-z^{-1}}\cdot\frac{1}{1-0{,}9z^{-1}}\right] + 1{,}8\,\frac{1}{1-0{,}9z^{-1}}$$

$$= \underbrace{\left[\frac{A_1}{1-z^{-1}} + \frac{A_2}{1-0{,}9z^{-1}}\right]}_{\text{MATLAB}} + 1{,}8\,\underbrace{\frac{1}{1-0{,}9z^{-1}}}_{1{,}8\,(0{,}9)^n u[n]}$$

Exemplo

Considere o sistema descrito pela equação de diferenças

$$y[n] - 0{,}9y[n-1] = x[n]$$

Encontre a saída se a entrada for $x[n] = u[n]$e se a condição inicial for$y[-1] = 2$

Sist não depende de amostras futuras de x[n]
↳ Causal
↳ Vamos tomar a TZ unilateral de ambos os lados

$$Y(z) - 0{,}9\left[y[-1] + z^{-1}Y(z)\right] = X(z)$$

$$Y(z) - 0{,}9\,y[-1] - 0{,}9z^{-1}Y(z) = X(z)$$

$$Y(z)(1 - 0{,}9z^{-1}) = X(z) + 0{,}9\,y[\overset{2}{\cancel{-1}}]$$

$$Y(z) = \boxed{X(z)}\,\boxed{\frac{1}{1-0{,}9z^{-1}}} + \boxed{1{,}8}\,\boxed{\underbrace{\frac{1}{1-0{,}9z^{-1}}}_{(0{,}9)^n u[n]}}$$

H(z)

$$= \boxed{\left[\frac{1}{1-z^{-1}}\right.}\,\boxed{\left.\frac{1}{1-0{,}9z^{-1}}\right]} + \boxed{1{,}8}\,\boxed{\frac{1}{1-0{,}9z^{-1}}}$$

Depende da entrada

Depende das condições iniciais

$$= \underbrace{\left[\frac{A_1}{1-z^{-1}} + \frac{A_2}{1-0{,}9z^{-1}}\right]}_{\text{MATLAB}} + \underbrace{1{,}8\,\frac{1}{1-0{,}9z^{-1}}}_{1{,}8\,(0{,}9)^n u[n]}$$

Exemplo 14

Considere o sistema descrito pela equação de diferenças

$$y[n] - 0{,}9y[n-1] = x[n]$$

Encontre a saída se a entrada for $x[n] = u[n]$e se a condição inicial for$y[-1] = 2$

Usando o MATLAB

$$(1-z^{-1})(1-0{,}9z^{-1}) = 1 - 0{,}9z^{-1} - z^{-1} + 0{,}9z^{-2} = 1 - 1{,}9z^{-1} + 0{,}9z^{-2}$$

$$\therefore S(z) = \frac{1}{1 - 1{,}9z^{-1} + 0{,}9z^{-2}} \Rightarrow \begin{cases} b = [1] \\ a = [1 \quad -1.9 \quad 0.9] \end{cases}$$

polos

$$[A, d, C] = \text{residuez}(b, a) \Rightarrow \begin{cases} A = 10 \\ \quad\;\; -9 \\ d = 1 \\ \quad\;\; 0.9 \\ C = [\ ] \end{cases}$$

A_1, A_2; d_1, d_2; $C \to [\ ]$

$$S(z) = \frac{A_1}{1 - 1z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - 0{,}9z^{-1}} = 10\,\frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{9}{1 - 0{,}9z^{-1}}$$

logo

$$Y(z) = 10 \cdot \frac{1}{1 - z^{-1}} - 9\,\frac{1}{1 - 0{,}9z^{-1}} + 1{,}8\,\frac{1}{1 - 0{,}9z^{-1}} =$$

$$= 10\,\frac{1}{1 - z^{-1}} - 7{,}2\,\frac{1}{1 - 0{,}9z^{-1}}$$

Sistema é causal → lateral direita

$$\therefore y[n] = 10\,u[n] - 7{,}2\,(0{,}9)^n\,u[n] = (10 - 7{,}2(0{,}9)^n)\,u[n]$$

Exemplo

Considere o sistema descrito pela equação de diferenças

$$y[n] - 0{,}9y[n-1] = x[n]$$

Encontre a saída se a entrada for $x[n] = u[n]$e se a condição inicial for$y[-1] = 2$

`y = filter(b,a,x,zi)` uses initial conditions `zi` for the filter delays. The length of `zi` must equal `max(length(a),length(b))-1`.

Syntax

```
z = filtic(b,a,y,x)
z = filtic(b,a,y)
```

Description

`z = filtic(b,a,y,x)` finds the initial conditions, `z`, for the delays in the transposed direct-form II filter implementation given past outputs `y` and inputs `x`. The vectors `b` and represent the numerator and denominator coefficients, respectively, of the filter's transfer function.

`z = filtic(b,a,y)` assumes that the input `x` is 0 in the past..

Exemplo

```
b=[1];a=[1,-.9];Y=[2];
xic=filtic(b,a,Y);%determina as condições iniciais para x a partir das condições iniciais de y
n=[0:10];xn=stepseq(0,0,10);
yn=filter(b,a,xn,xic);% gera a saída levando em consideração as condições iniciais
subplot(2,1,1);stem(n,xn);
xlabel('n');ylabel('x[n]');title('Entrada - x[n]');
subplot(2,1,2);stem(n,yn);
xlabel('n');ylabel('y[n]');title('Saída - y[n]');
```

for $x[n] = u[n]$e se a condição inicial for$y[-1] = 2$

`y = filter(b,a,x,zi)` uses initial conditions `zi` for the filter delays. The length of `zi` must equal `max(length(a),length(b))-1`.

Syntax

```
z = filtic(b,a,y,x)
z = filtic(b,a,y)
```

Description

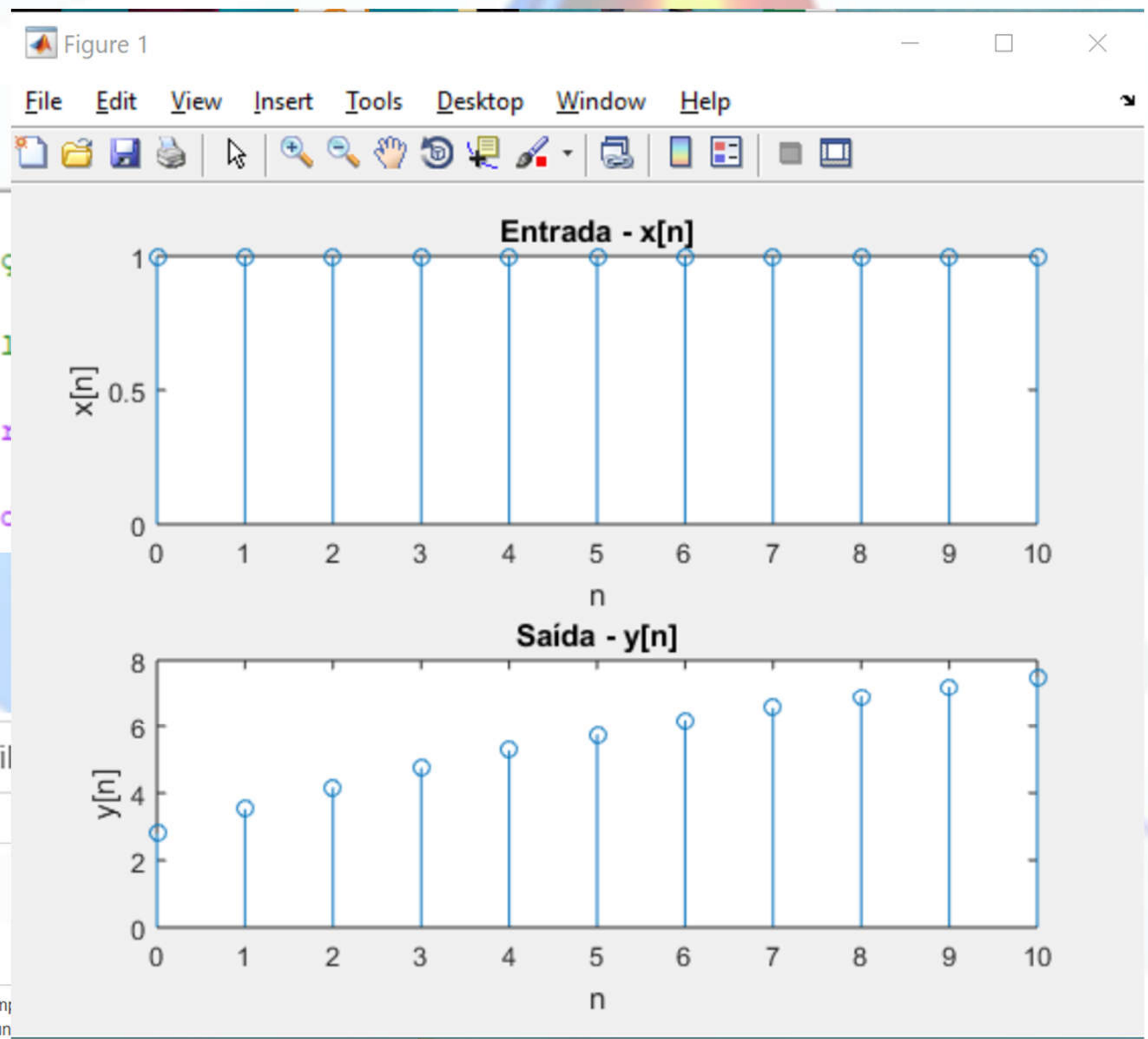
`z = filtic(b,a,y,x)` finds the initial conditions, `z`, for the delays in the transposed direct-form II filter implementation given past outputs `y` and inputs `x`. The vectors `b` and represent the numerator and denominator coefficients, respectively, of the filter's transfer function.

`z = filtic(b,a,y)` assumes that the input `x` is 0 in the past..

Exemplo

```
b=[1];a=[1,-.9];Y=[2];
xic=filtic(b,a,Y);%determina as condiç
n=[0:10];xn=stepseq(0,0,10);
yn=filter(b,a,xn,xic);% gera a saída l
subplot(2,1,1);stem(n,xn);
xlabel('n');ylabel('x[n]');title('Entr
subplot(2,1,2);stem(n,yn);
xlabel('n');ylabel('y[n]');title('Saíc
```

for $x[n] = u[n]$e se a condição inicial for$y[-1] = 2$



`y = filter(b,a,x,zi)` uses initial conditions `zi` for the fil

Syntax

```
z = filtic(b,a,y,x)
z = filtic(b,a,y)
```

Description

`z = filtic(b,a,y,x)` finds the initial conditions, `z`, for the delays in the transposed direct-form II filter im vectors `b` and represent the numerator and denominator coefficients, respectively, of the filter's transfer fun

`z = filtic(b,a,y)` assumes that the input `x` is 0 in the past.

Exemplo

Resolva

$$y[n] - \frac{3}{2}y[n-1] + \frac{1}{2}y[n-2] = x[n], n \geq 0$$

Com $x[n] = (\frac{1}{4})^n u[n]$ e
$y[-1] = 4$ e $y[-2] = 10$.

Aplicar a TZ unilateral nos dois lados da igualdade

$$Y^+(z) - \frac{3}{2}[y(-1) + z^{-1}Y^+(z)] + \frac{1}{2}[y(-2) + z^{-1}y(-1) + z^{-2}Y^+(z)] = \frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$$

Substituindo as CI e reorganizando

$$Y^+(z)\left[1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}\right] = \frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} + (1 - 2z^{-1})$$

$$Y^+(z) = \frac{\overbrace{\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}}^{X(z)}}{1-\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}} + \frac{\overbrace{1-2z^{-1}}^{X_{CI}}}{\underbrace{1-\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}_{H(z)}}$$

$$Y^+(z) = \frac{2 - \frac{9}{4}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-z^{-1})(1-\frac{1}{4}z^{-1})}$$

Exemplo

Resolva

$$y[n] - \frac{3}{2}y[n-1] + \frac{1}{2}y[n-2]$$
$$= x[n], n \geq 0$$

Com $x[n] = (\frac{1}{4})^n u[n]$ e
$y[-1] = 4$ e $y[-2] = 10$.

Usando expansão em frações parciais

$$Y^+(z) = \frac{2 - \frac{9}{4}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - z^{-1})(1 - \frac{1}{4}z^{-1})}$$

$$Y^+(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{\frac{2}{3}}{1 - z^{-1}} + \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}$$

Fazendo a transformada inversa

$$y(n) = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n\right] u(n)$$

Exemplo

Resolva

$$y[n] - \frac{3}{2}y[n-1] + \frac{1}{2}y[n-2] = x[n], n \geq 0$$

Com $x[n] = (\frac{1}{4})^n u[n]$ e $y[-1] = 4$ e $y[-2] = 1$

No MATLAB

$$Y_{ZI}(z) = H(z)X_{IC}(z)$$

X(z)

X_{CI}

H(z)

$$Y^+(z) = \frac{\boxed{\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}}}{\boxed{1-\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}} + \frac{\boxed{1-2z^{-1}}}{\boxed{1-\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}}$$

X_{CI}

b=[1]; a=[1,-3/2,1/2];

```
>>  n = [0:7]; x = (1/4).^n; xic = [1, -2];
>> format long;  y1 = filter(b,a,x,xic)
y1 =
  Columns 1 through 4
   2.00000000000000   1.25000000000000   0.93750000000000   0.79687500000000
  Columns 5 through 8
   0.73046875000000   0.69824218750000   0.68237304687500   0.67449951171875
>> y2 = (1/3)*(1/4).^n+(1/2).^n+(2/3)*ones(1,8) % MATLAB Check
y2 =
  Columns 1 through 4
   2.00000000000000   1.25000000000000   0.93750000000000   0.79687500000000
  Columns 5 through 8
   0.73046875000000   0.69824218750000   0.68237304687500   0.67449951171875
```

$$y(n) = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]u(n)$$

Formas da solução

Solução homogênea e solução particular

$$y(n) = \underbrace{\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{3}\right] u(n)}_{\text{Homogeneous part}} + \underbrace{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)}_{\text{Particular part}}$$

$x[n] = 0$ $\quad$ $x[n] \neq 0$

Polos relativos ao sistema

Polos relativos à entrada

Resposta transiente e resposta estacionária

$$y(n) = \underbrace{\left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] u(n)}_{\text{Transient response}} + \underbrace{\frac{2}{3}u(n)}_{\text{Steady-state response}}$$

Polos dentro do circulo unitário

Polos no circulo unitário

Formas da solução

Respostas Zero-state (CI nulas) **e Zero-input** (x[n] nula)

$$\boxed{Y_{ZS}(z) = H(z)X(z)} \qquad \boxed{Y_{ZI}(z) = H(z)X_{IC}(z)}$$

$$Y^+(z) = \boxed{\frac{\dfrac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}}{1-\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}} + \boxed{\frac{1-2z^{-1}}{1-\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}}$$

$X_{IC}(z)$ equivale a uma entrada referente às CI

$X_{ic}[n]=[1,-2]$

Calcular a TZ inversa de cada uma dessas partes

$$y(n) = \underbrace{\left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{8}{3}\right]u(n)}_{\text{Zero-state response}} + \underbrace{\left[3\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\right]u(n)}_{\text{Zero-input response}}$$