

Análise espectral de sinais

- É muito comum a informação estar nos senos que formam o sinal
- **Muitas coisas oscilam no universo**
- A forma dos sinais no domínio do tempo normalmente não é importante, a **informação principal está no domínio da frequência**

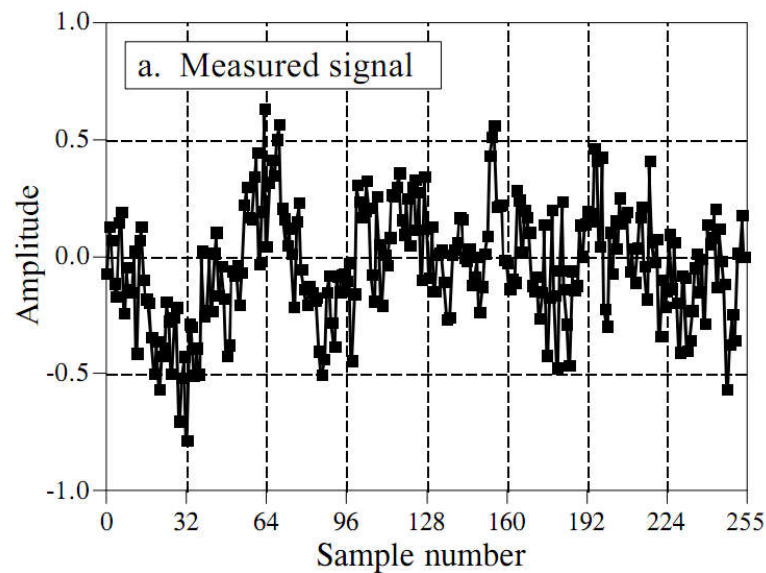
Analise espectral de sinais

Vamos analisar o som que se propaga através do oceano.

Um microfone é posicionado na água e o sinal adquirido é amplificado e logo após passa por um filtro passa-baixas de 80 Hz (logo posso amostrar com $F_s=160$ Hz).

O que fazer com todas as amostras???

Análise espectral de sinais

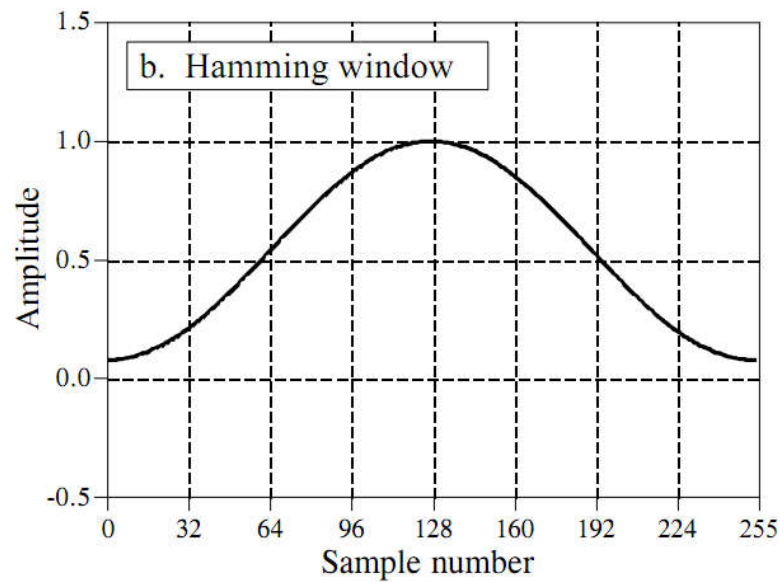


256 pontos

1º passo: OLHAR PARA OS DADOS

A forma de onda contém muito ruído e pouca informação que possa ser extraída visualmente

Análise espectral de sinais



2º passo: MULTIPLICAR POR UMA CURVA SUAVE, COMO A JANELA DE HAMMING

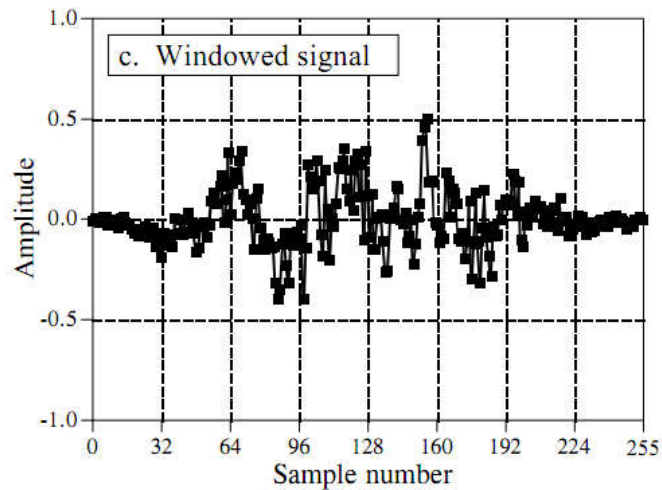
256 pontos

$$w[i] = 0,54 - 0,46 \cos\left(\frac{2\pi i}{M}\right)$$

com $0 \leq i \leq M$

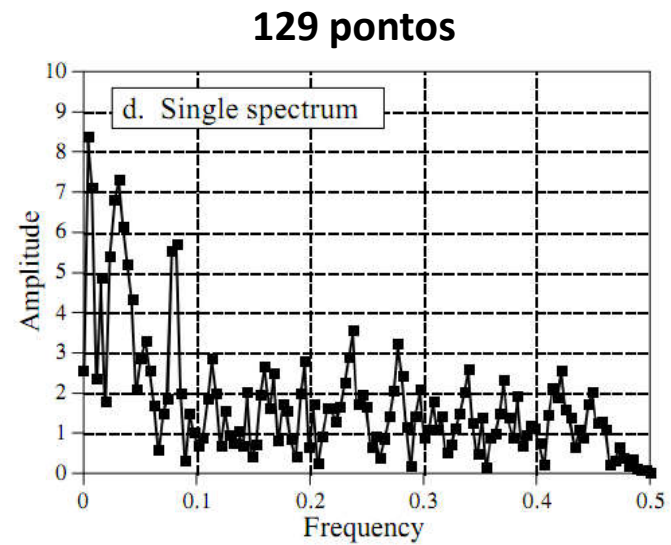
Análise espectral de sinais

O resultado será um sinal com amplitude reduzida nos extremos



256 pontos

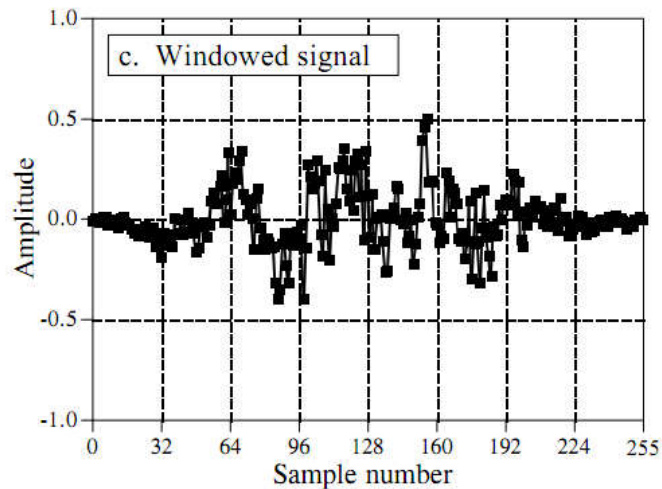
DFT



**3º passo: CALCULAR A DFT E
CONVERTER PARA NOTAÇÃO
POLAR**

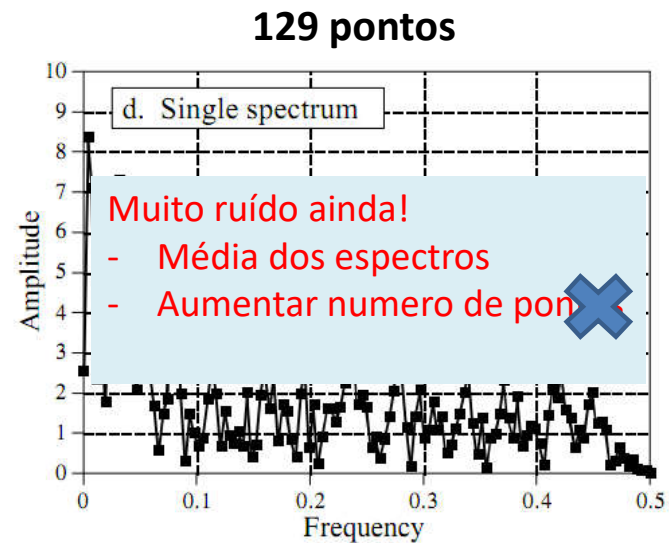
Análise espectral de sinais

O resultado será um sinal com amplitude reduzida nos extremos



256 pontos

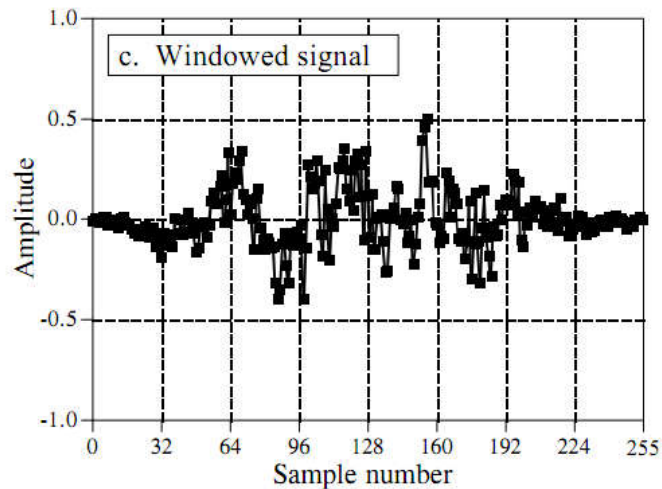
DFT



3º passo: CALCULAR A DFT E
CONVERTER PARA NOTAÇÃO
POLAR

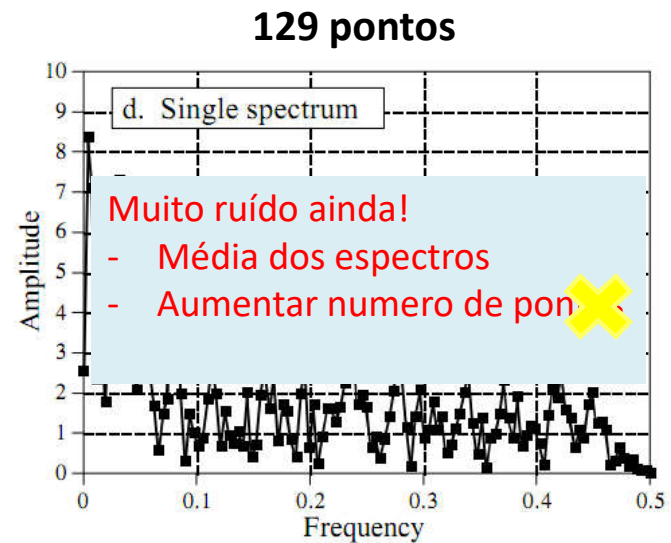
Análise espectral de sinais

O resultado será um sinal com amplitude reduzida nos extremos



256 pontos

DFT

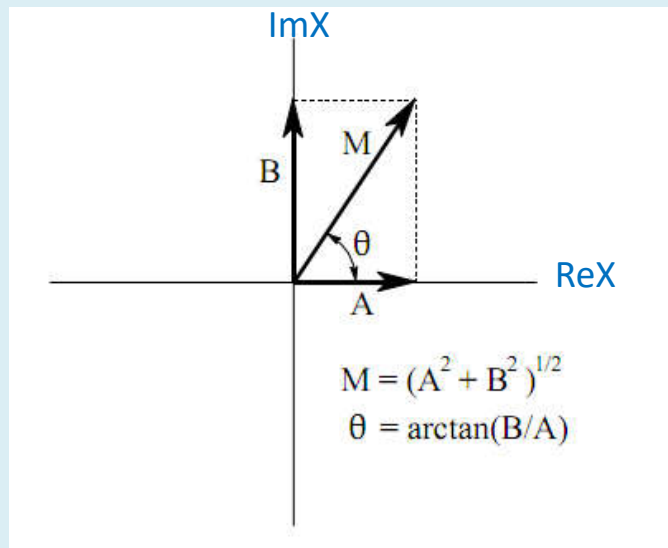


3º passo: CALCULAR A DFT E
CONVERTER PARA NOTAÇÃO
POLAR

Notação Polar

- Os sinais no domínio da frequência em notação retangular são representados por amplitudes de um grupo de senos e cossenos
- Em notação polar
 - Magnitude \rightarrow MagX
 - Fase \rightarrow PhaseX

Notação Polar



$$MagX[k] = (ReX[k]^2 + ImX[k]^2)^{1/2}$$

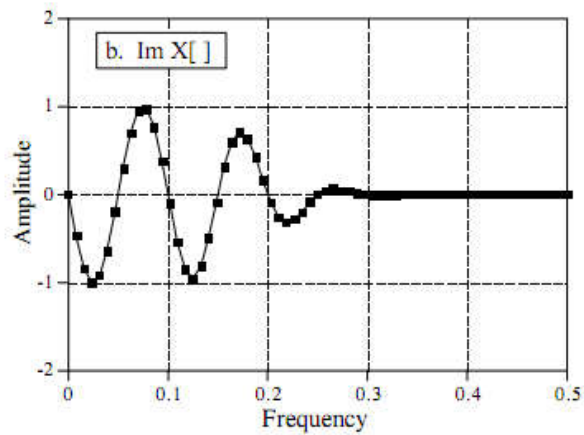
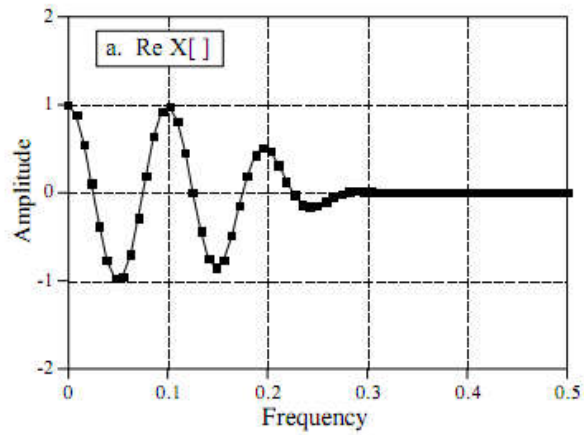
$$PhaseX[k] = \arctan\left(\frac{ImX[k]}{ReX[k]}\right)$$

$$ReX[k] = MagX[k] \cos(PhaseX[k])$$

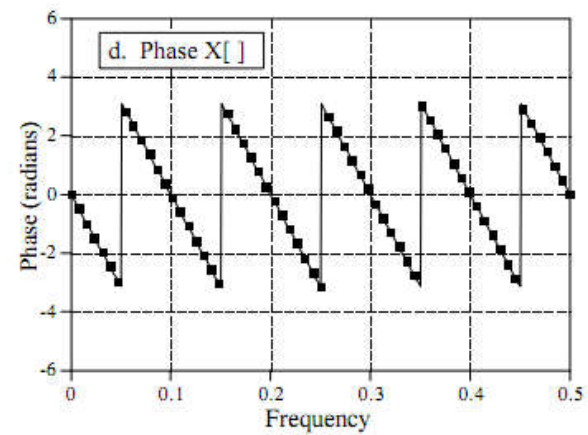
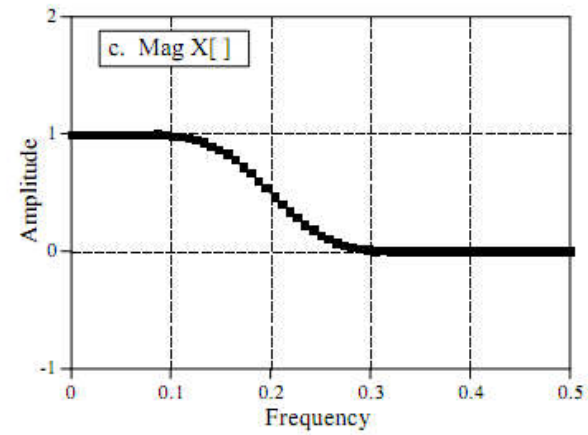
$$ImX[k] = MagX[k] \sin(PhaseX[k])$$

Notação Polar

Rectangular

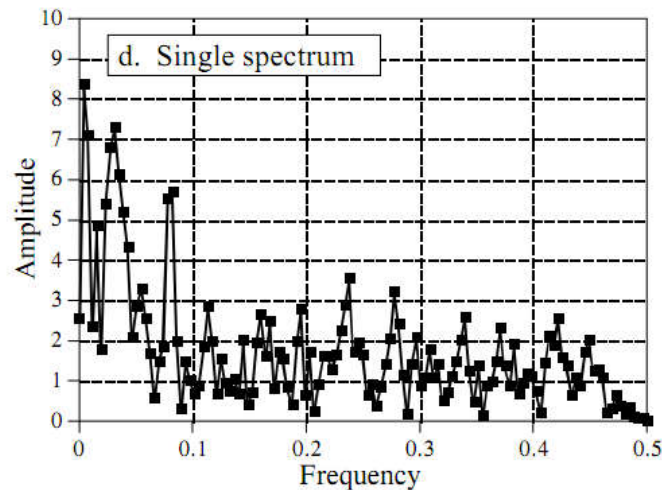


Polar



Análise espectral de sinais

Ainda tem muito ruído, e aumentar o nº de pontos da DFT não resolverá o problema!



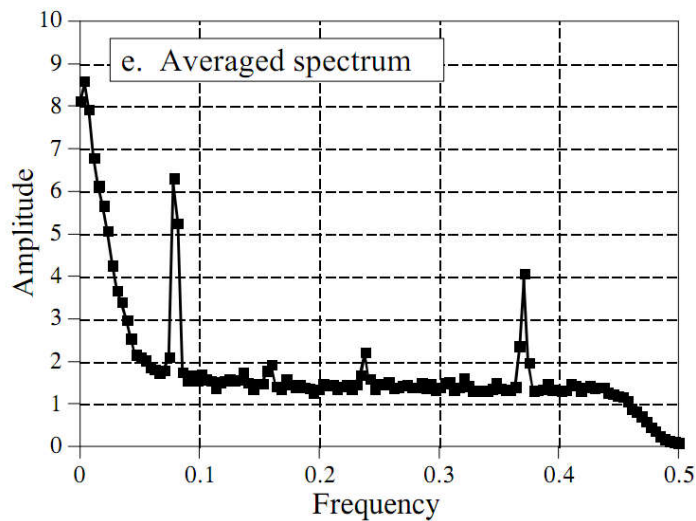
129 pontos = $N/2 + 1$

4º passo: MÉDIA DOS ESPECTROS

São pegos vários trechos com o mesmo número de pontos (256) e estes são multiplicados pela janela, o espectro é obtido e então é feita a média dos espectros

Analise espectral de sinais

O resultado é um espectro com menos ruído



129 pontos = $N/2 + 1$

2º Método

Há **outras formas de reduzir o ruído** como por exemplo, calcular uma **TDF muito longa**, o resultado terá muito ruído, aí basta utilizar um **filtro passa-baixas**

Qual método é melhor?

Análise espectral de sinais

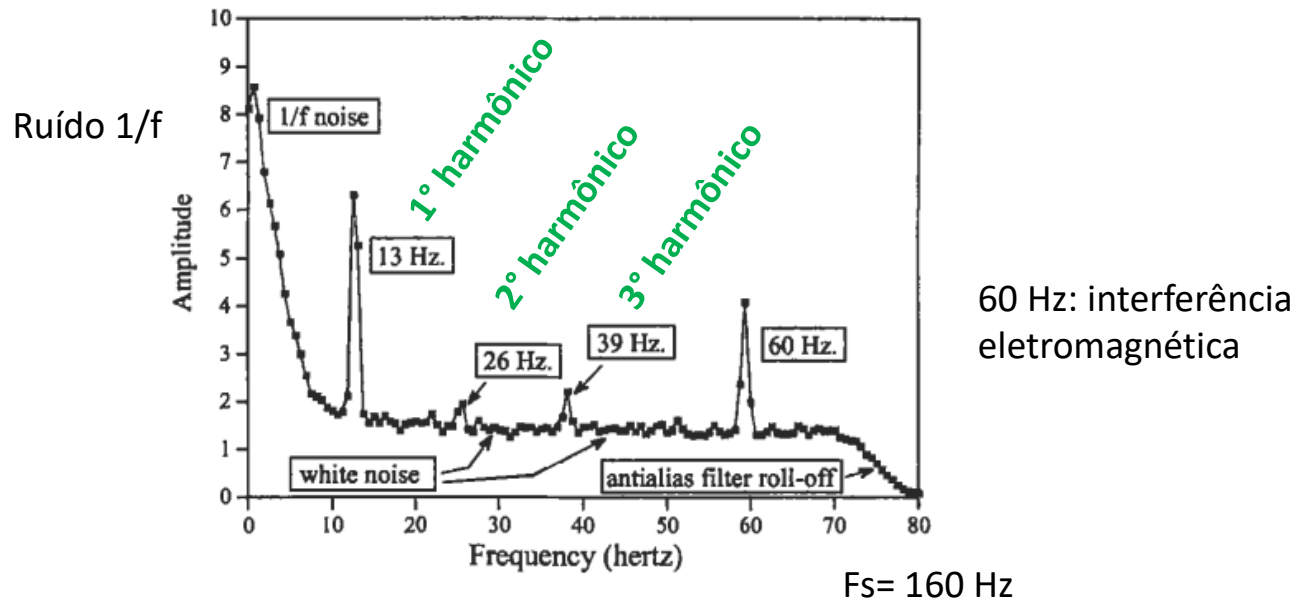
1º Método

- Mais simples porque **dispensa o uso de filtros**
- Usar sempre mais dados e trabalhar com médias dos segmentos **ajudam a reduzir o ruído**

2º Método

- Mais potencial porque o filtro pode ser usado para melhorar a performance para o **trade-off entre ruído e resolução**
- A TDF com muitos pontos **melhora a resolução**

Análise espectral de sinais



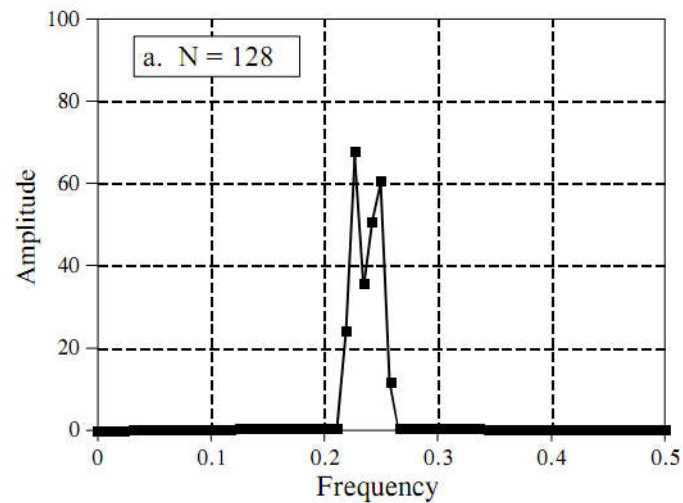
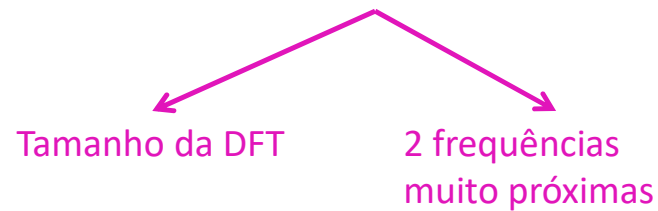
Entre 10 e 70 Hz: ruído branco

Acima de 70 Hz a amplitude do ruído decai, efeito do filtro anti-aliasing

Analise espectral de sinais

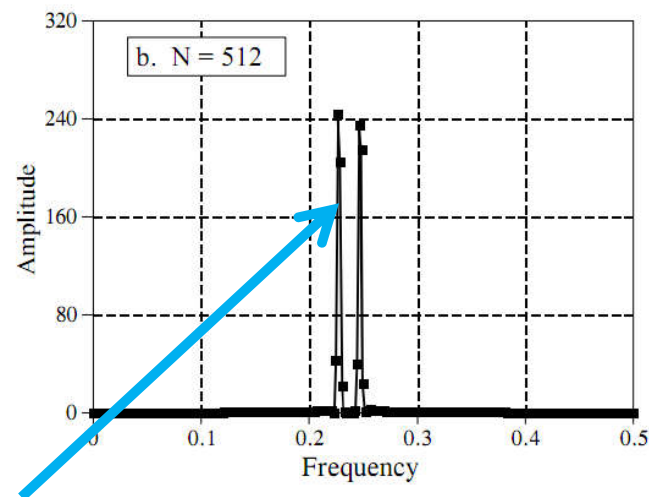
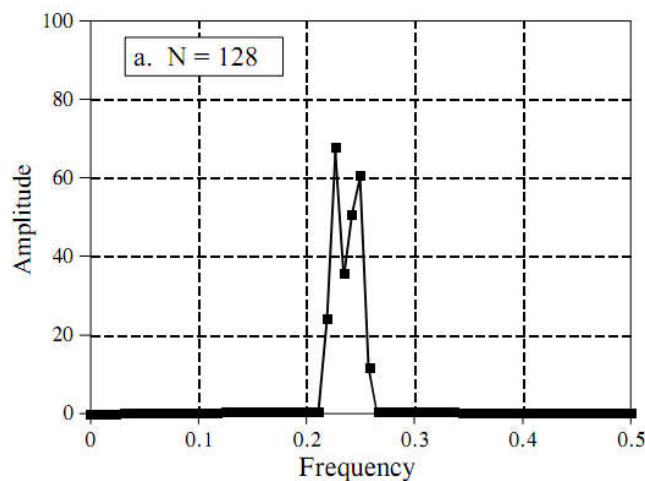
Resolução em frequência

O que fazer quando 2 picos estão muito próximos?



Analise espectral de sinais

- Para separar 2 pontos o espaçamento da DFT tem que ser menor que o espaçamento entre os 2 picos



Aumentar o numero de pontos da TDF!

TAMANHO DO SEGMENTO LIMITA A RESOLUÇÃO!!!!!!

PADDING!

Análise espectral de sinais

2 frequências muito próximas

- Quando se fala em resolução há ainda outro fator a ser considerado: Usar um **pequeno segmento** de um sinal criado por adição de **2 senos com frequências muito próximas**

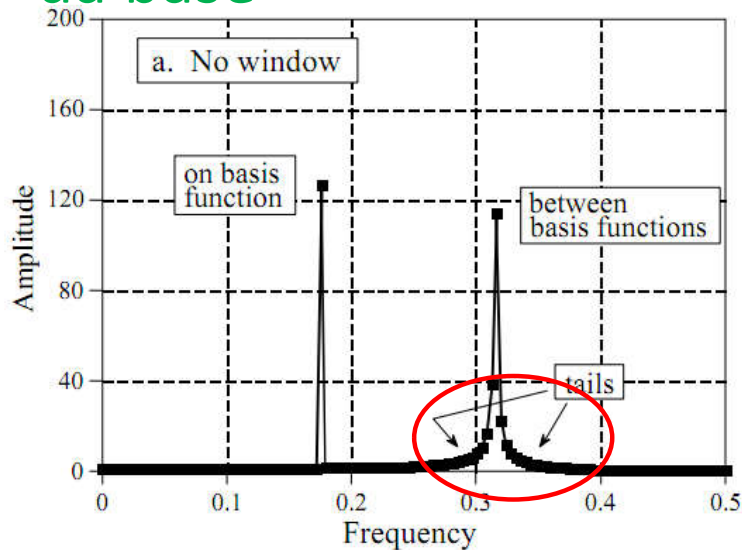
- Para separar as frequências **é preciso um segmento muito longo!**

PADDING!

TAMANHO DO SEGMENTO LIMITA A RESOLUÇÃO!!!!

Analise espectral de sinais

- Além do que já foi relatado pode-se ter outro problema, que é o sinal conter uma **freqüência intermediária entre as freqüências da base**



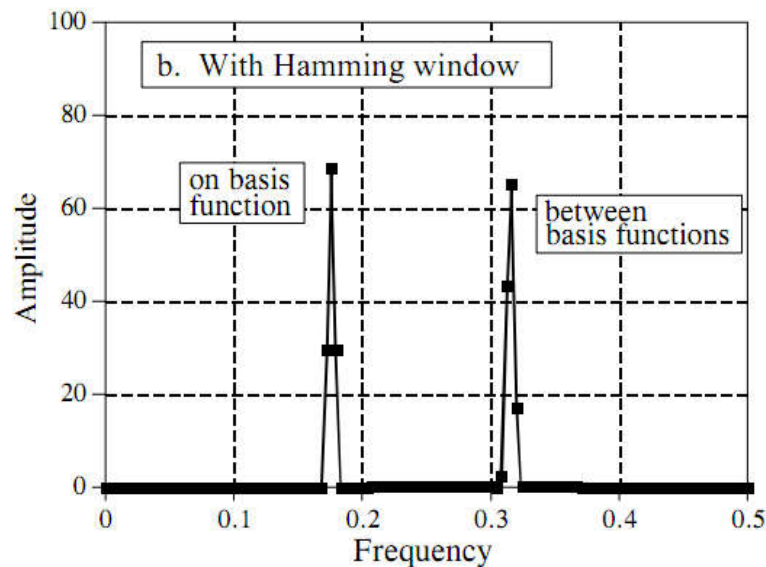
Como resolver?

Multiplicar por uma janela suave como a de Hamming

$$c_k[i] = \cos(2\pi ki/N)$$

$$s_k[i] = \sin(2\pi ki/N)$$

Analise espectral de sinais



3 coisas mudaram no espectro

- os 2 picos ficaram mais parecidos 😊
- as extremidades foram reduzidas 😊
- Perda de resolução: os picos ficaram mais largos 😞

Trade-off entre resolução e spectral leakage

Analise espectral de sinais

Como o uso de janelas pode afetar um sinal?

Exemplo

- Para compreender melhor, vamos considerar uma onda senoidal com frequência 0,1Fs
 - O espectro desta onda é um pico infinitamente estreito, com todas as outras frequências em zero
 - Este sinal **não pode ser analisado em um computador**
 - Para resolver este problema:
 - 1ª forma – Truncar
 - 2ª forma – Selecionar N pontos do sinal

$$x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega})$$

$$h[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} H(e^{j\omega}),$$

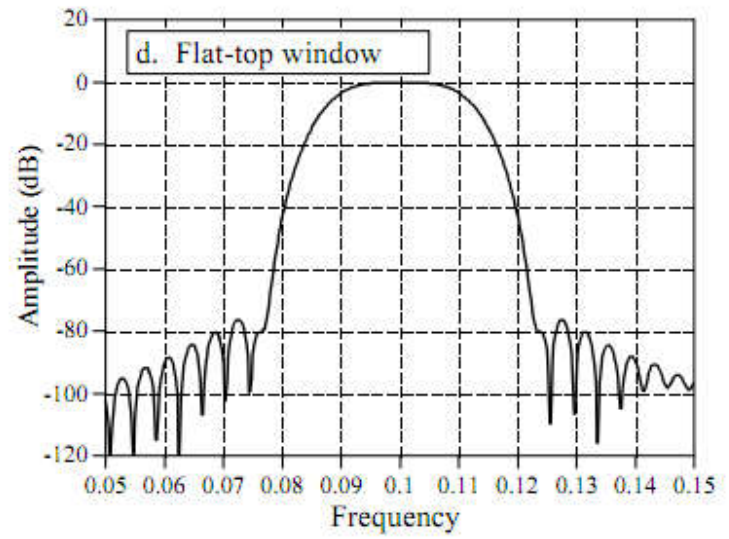
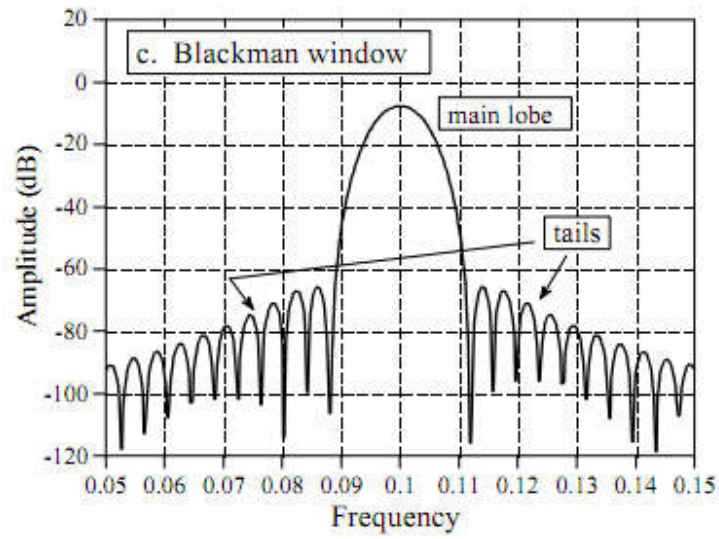
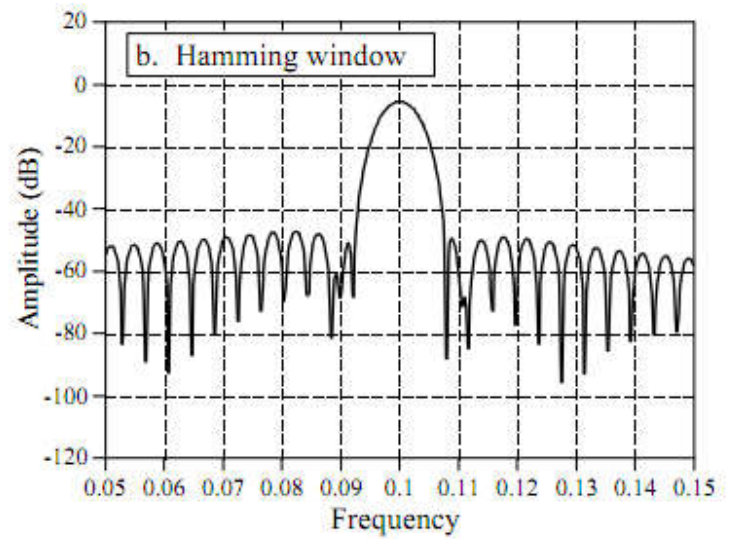
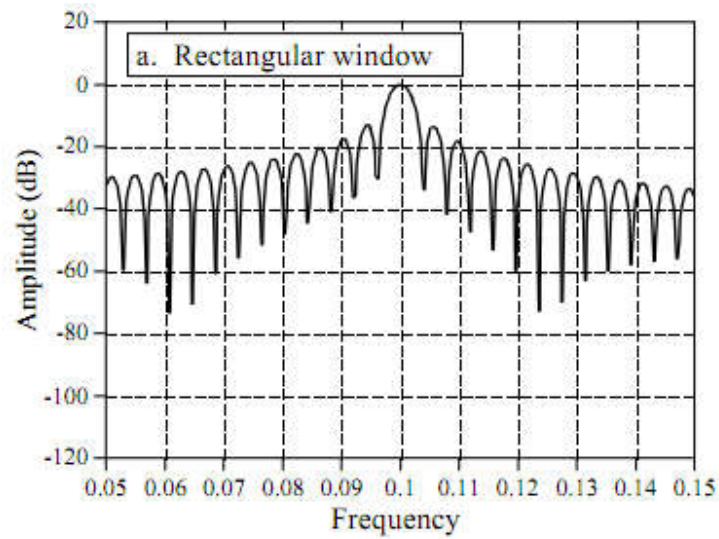
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n],$$

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}).$$

Exemplo

- **1ª forma - Truncar**, multiplicando por uma janela (256 pontos, por ex.)
 - O sinal continua infinito, mas agora tem um numero de pontos finito que é diferente de zero
 - Quando 2 sinais no **domínio do tempo são multiplicados**, as transformadas correspondentes no **domínio da freqüência são convoluídas**
 - O espectro original contem um pico infinito (função delta), **logo o espectro do sinal janelado será o espectro da janela deslocado pelo posicionamento do pico**

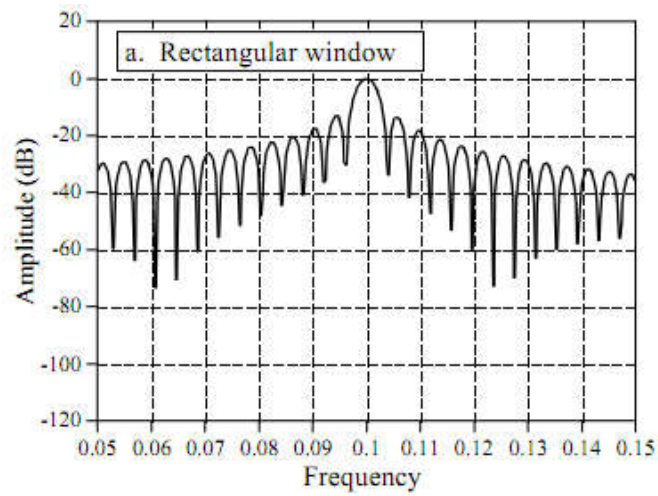
$$y[i] = \sum_{j=0}^{M-1} h[j]x[i-j]$$



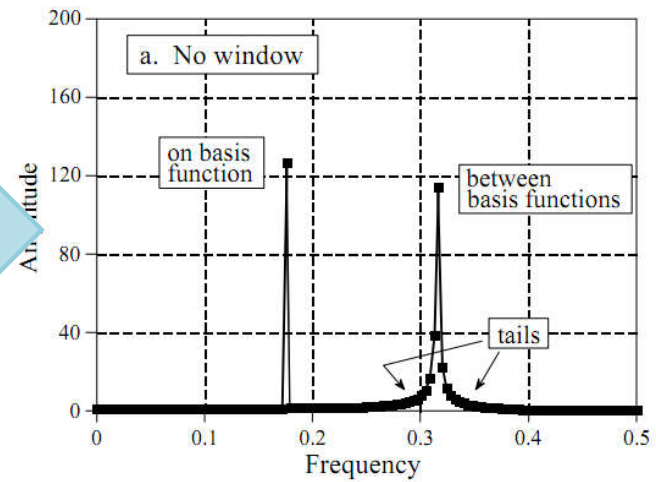
Exemplo

- **2ª forma – Selecionar N pontos do sinal**
 - Esses N pontos devem conter todas as amostras não nulas e podem conter alguns zeros. **Tem o efeito de uma amostragem do espectro em frequência**

Exemplo



Amostragem



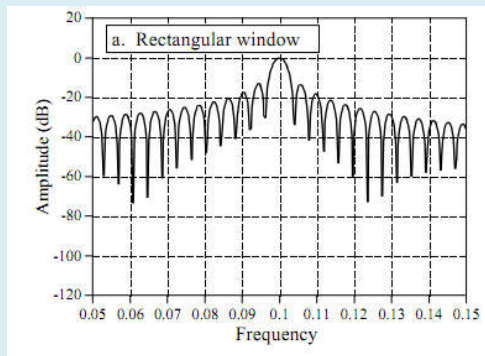
Exemplo

- Se N for 1024, o espectro terá 513 pontos
 - entre 0 e $0.5F_s$ existirão 513 amostras
 - Se $N >$ tamanho da janela
 - As **amostras estarão perto o suficiente** para **preservar picos e vales da curva** continua no novo espectro
 - Se $N =$ do tamanho da janela
 - A pouca qtd de amostras gerará um **padrão de picos e vales irregular**, introduzindo caudas no espectro

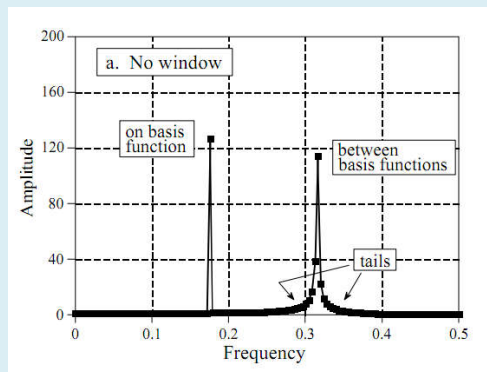
Exemplo

- Usar **JANELAS** dependendo da escolha feita pode deixar o **pico mais largo ou mais estreito**, também pode adicionar **caudas** às bordas do pico e estas **caudas podem ter amplitude maior ou menor** dependendo da escolha da janela

Exemplo



Amostras



- A presença ou ausência de caudas depende de onde as amostras são pegas. Se a onda tem exatamente a mesma frequência que uma função base, as amostragens ocorrem exatamente nos vales eliminando as caudas
- Se as ondas não tem o valor de frequência exato de uma das funções base a amostragem pode ocorrer em algum ponto qq. do pico e isso gerará caudas

Analise espectral de sinais

- **Há outro ponto a ser considerado, se o espectro é formado por amostras, o que garante que haverá uma amostra do pico?**
 - A solução é utilizar uma janela que produza um pico mais largo, isso garantirá que em algum ponto ele será amostrado



Análise no domínio da frequência

DENSIDADE ESPECTRAL DE POTENCIAS

Numericamente a determinação das frequências presentes em um sinal é feita usando-se um estimador de espectro. O método de Welch é um desses, No MATLAB ele é feito utilizando-se a função **pwelch** ou a função **spectrum.welch**

Syntax

```
pxx = pwelch(x)
pxx = pwelch(x,window)
pxx = pwelch(x,window,noverlap)
pxx = pwelch(x,window,noverlap,nfft)

[pxx,w] = pwelch(__)
[pxx,f] = pwelch(__,fs)

[pxx,w] = pwelch(x,window,noverlap,w)
[pxx,f] = pwelch(x,window,noverlap,f,fs)

[ __ ] = pwelch(x,window, __ ,freqrange)
[ __ ] = pwelch(x,window, __ ,spectrumtype)
[ __ ] = pwelch(x,window, __ ,trace)

[ __ ,pxxc] = pwelch(__,'ConfidenceLevel',probability)

pwelch(__)
```

<https://www.mathworks.com/help/signal/ref/pwelch.html>

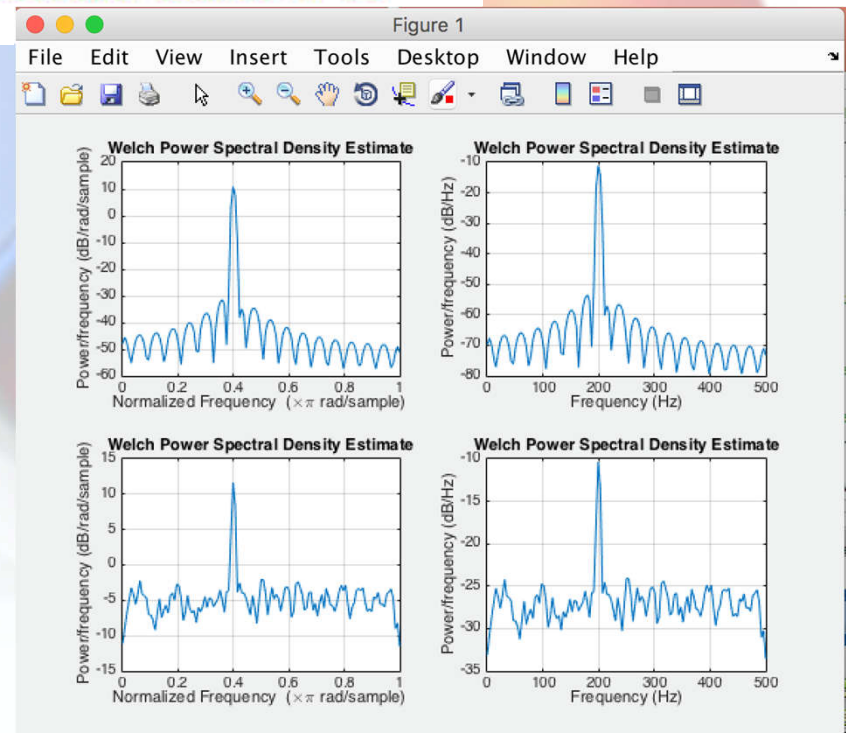
MATLAB

```

1  Fs = 1000; % Freq de amostragem
2  t = 0:1/Fs:1; % vetor de tempo
3  x1 = cos(2*pi*t*200); % sinal com uma unica frequencia
4  x2 = cos(2*pi*t*200)+randn(size(t)); % sinal anterior + ruido
5
6  subplot(2,2,1);pwelch(x1); % Calculo com valores default
7  subplot(2,2,2);pwelch(x1, [], [], [], Fs); % Calculo usando a Fs
8  subplot(2,2,3);pwelch(x2); % Calculo com valores default
9  subplot(2,2,4);pwelch(x2, [], [], [], Fs); % Calculo usando a Fs

```

pwelch



Editor - /Users/Carol/Documents/MATLAB/janelas2.m

teste.m x janelas.m x janelas2.m x +

```
1 - t=0:0.01:1;
2 - sinal=sin(2*pi*15*t);
3 - Fs=100;
4 - Hs=spectrum.welch(1,Hamming')
5 - Hpsd1=psd(Hs,sinal)
6 - Hpsd2=psd(Hs, sinal, 'Fs', Fs)
7 - subplot(2,1,1);plot(Hpsd1);
8 - subplot(2,1,2);plot(Hpsd2)
```

Command Window

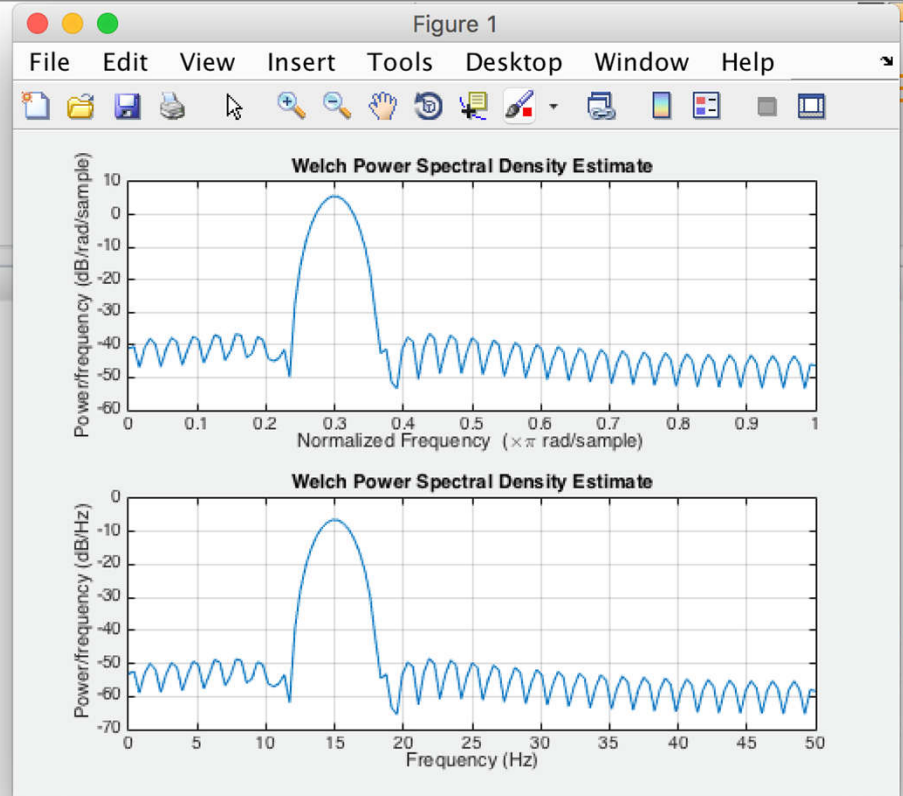
Hpsd1 =

```
Name: 'Power Spectral Density'
Data: [129x1 double]
SpectrumType: 'Onesided'
NormalizedFrequency: true
Fs: 'Normalized'
Frequencies: [129x1 double]
ConfLevel: 'Not Specified'
ConfInterval: []
```

Hpsd2 =

```
Name: 'Power Spectral Density'
Data: [129x1 double]
SpectrumType: 'Onesided'
NormalizedFrequency: false
Fs: 100
Frequencies: [129x1 double]
ConfLevel: 'Not Specified'
ConfInterval: []
```

f >>



Exercício

Calcule a densidade espectral de potências para um seno de 15 Hz utilizando diferentes janelas (Use o HELP!!!).

Utilize $F_s=100$ Hz

Exercício

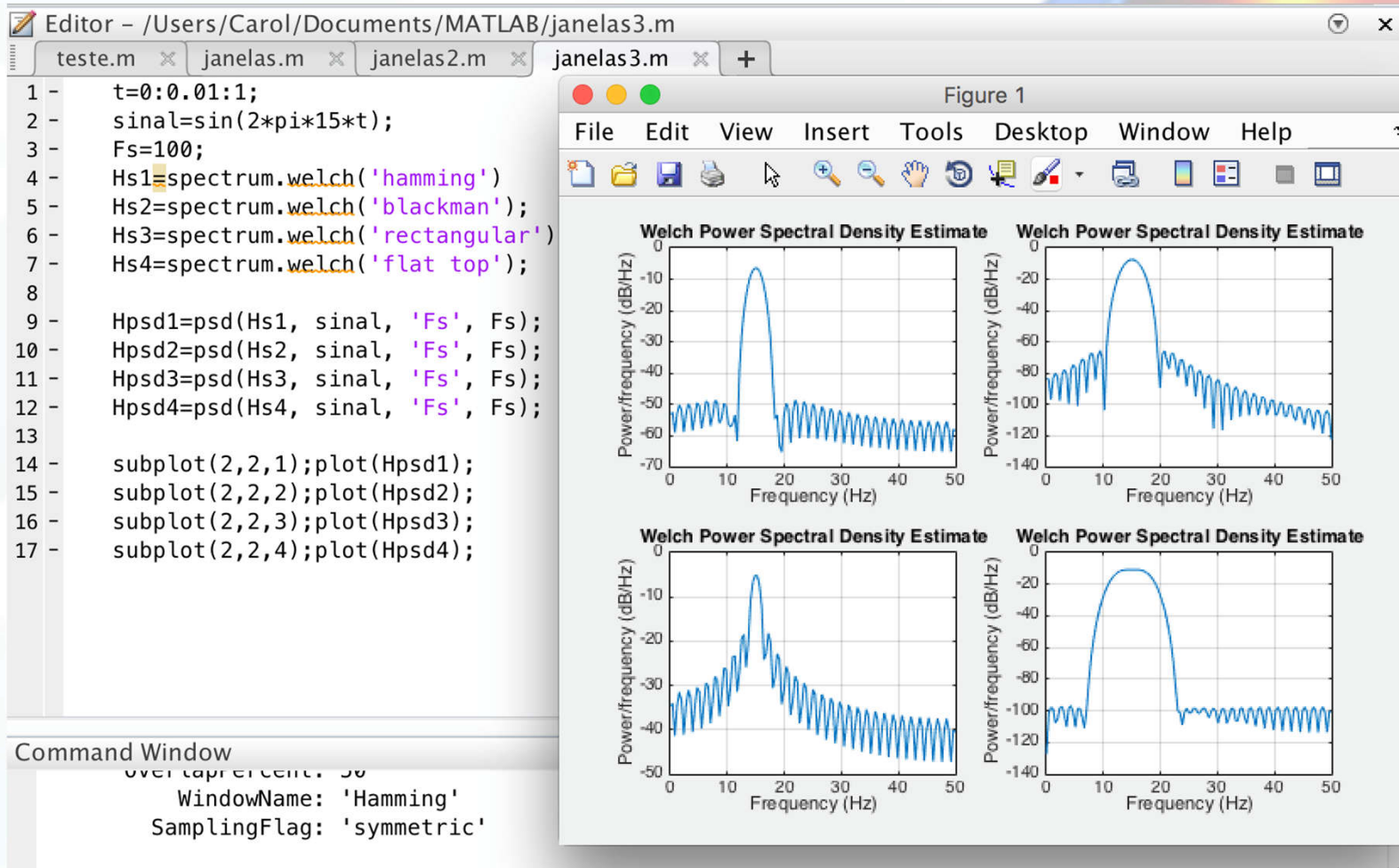
```
>> t=0:0.01:1;
>> s1=sin(2*pi*15*t);
>> Hs=spectrum.welch('hamming')

Hs =

    EstimationMethod: 'Welch'
      SegmentLength: 64
    OverlapPercent: 50
      WindowName: 'Hamming'
    SamplingFlag: 'symmetric'
```

```
>> Hs1=spectrum.welch('hamming')
>> Hs2=spectrum.welch('blackman');
>> Hs3=spectrum.welch('rectangular');
>> Hs4=spectrum.welch('flat top');
```

Exercício



Análise no domínio da frequência

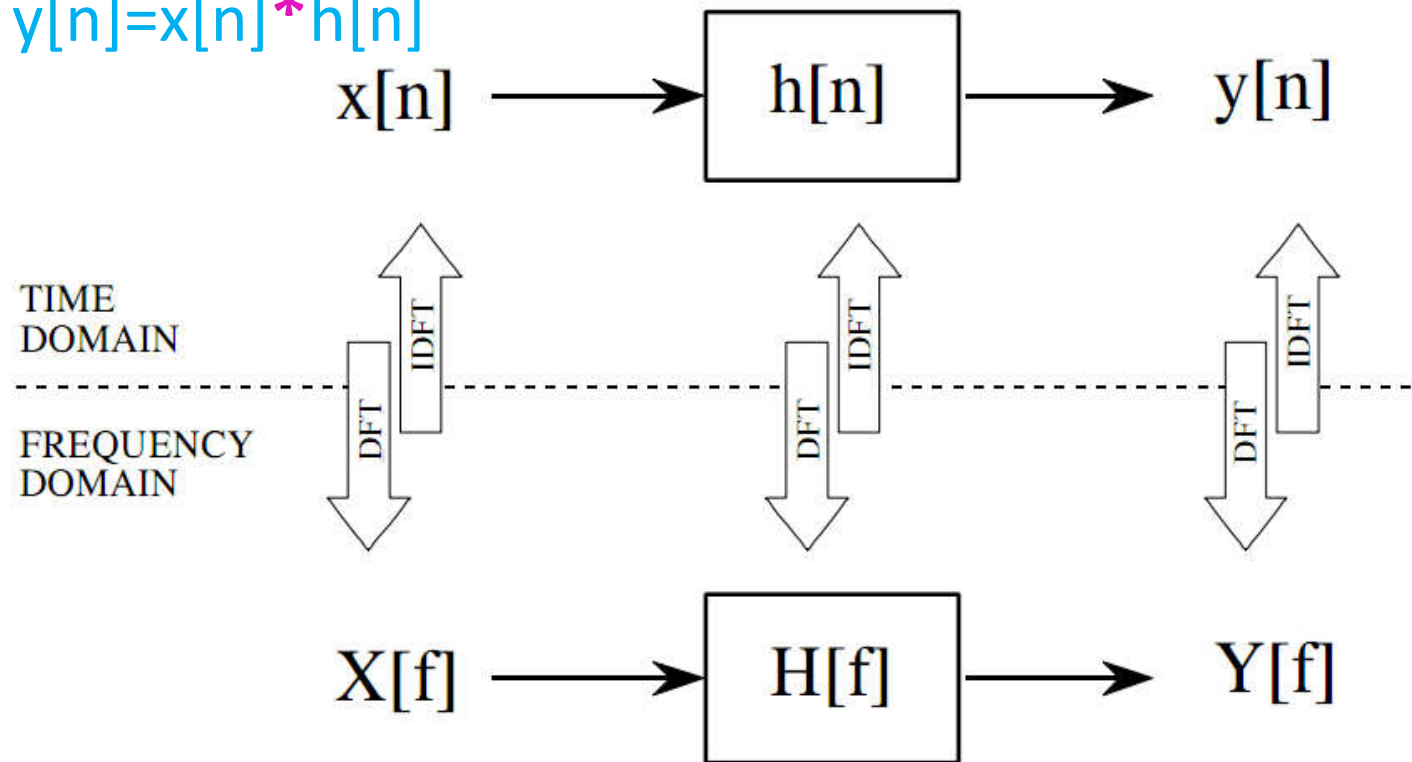
RESPOSTA EM FREQUÊNCIA DE UM SISTEMA

Resposta em frequência dos sistemas

- **RI \leftrightarrow RF???**
- Se tanto a **resposta impulsiva** quanto a **resposta em frequência** contem informação sobre o sistema, deve haver uma **correspondência entre elas**
- Dada uma é possível calcular a outra
- **A resposta em frequência de um sistema é a transformada de Fourier da sua resposta impulsiva**

Resposta em freqüência dos sistemas

$$y[n]=x[n]*h[n]$$

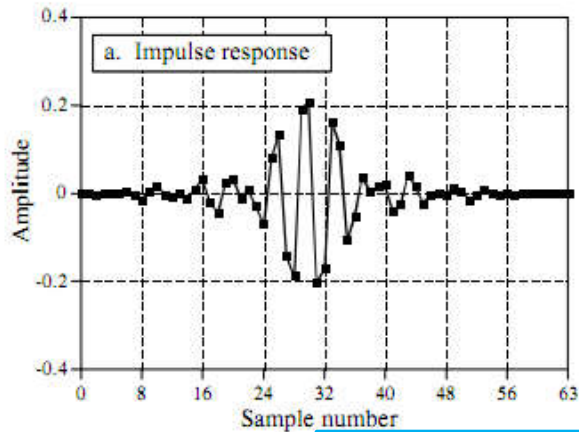


$$Y[f]=X[f]H[f]$$

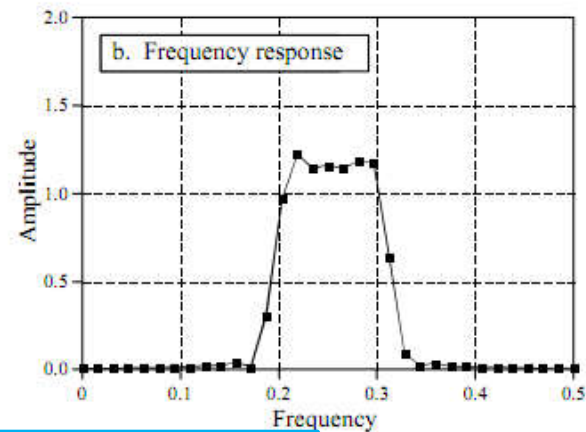
Olhando pra esse sinal é difícil saber o que o sistema faz

No domínio da frequência é possível ver que é um passa-banda entre 0,2 e 0,3

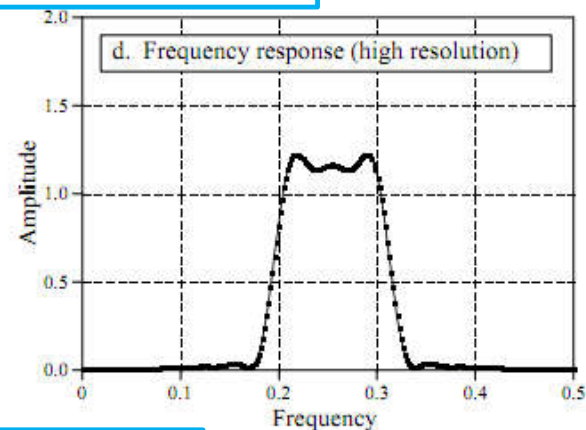
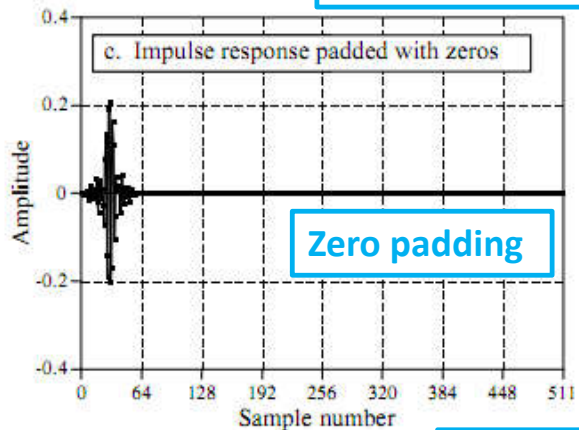
Time Domain



Frequency Domain



Aumento do n° de pontos da TDF



Aumento da Resolução

Resposta em frequência dos sistemas

- Quanto essa resolução pode ser aumentada?
 - O **zero padding** permite um aumento infinito na resolução
- Isso implica que apesar da **resposta impulsiva ser um sinal discreto a resposta em frequência correspondente será contínua**
- Uma TDF de N pontos, tem uma resposta impulsiva com $N/2 + 1$ pontos
 - Aumentar o n° de pontos da DFT aumenta a resolução

Resposta em frequência dos sistemas

- Como a resposta em frequência representa as mudanças na amplitude e na fase dos cossenos que passaram pelo sistemas e **um sinal pode conter QUALQUER frequência** entre 0 e $0,5F_s$ **a resposta em frequência deve ser continua**



Resposta em frequência dos sistemas

- Como a resposta em frequência representa as mudanças na amplitude e na fase dos cossenos que passaram pelo sistemas e **um sinal pode conter QUALQUER frequência** entre 0 e $0,5F_s$ **a resposta em frequência deve ser contínua**
- A melhor forma de entender é pensar em outra TF a DTFT

Resposta em frequência dos sistemas

- Utilizar zero padding com um numero infinito de zeros produzirá um sinal aperiódico
- Na resposta em frequência as amostras estarão infinitamente próximas, ou seja, será um sinal contínuo
- Matematicamente a resposta impulsiva é obtida através da DTFT, mas a TDF é usada para amostrar a DTFT

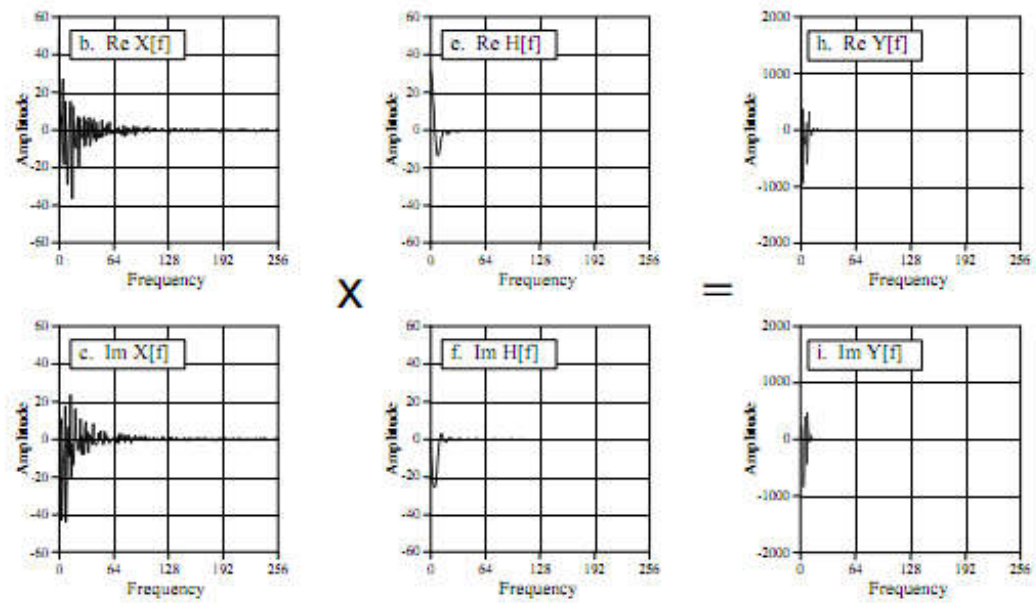
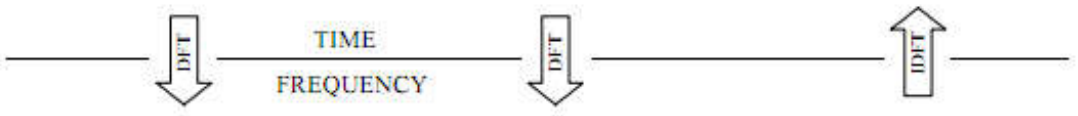
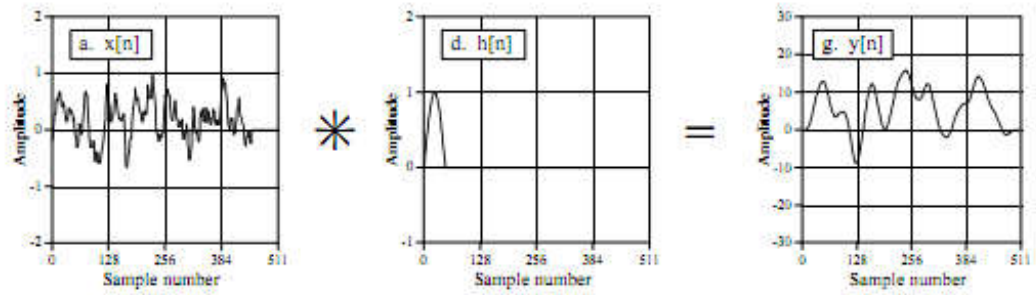
Análise no domínio da frequência

CONVOLUÇÃO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

Convolução via domínio da frequência

- O que fazer quando tem-se o sinal de entrada e a resposta impulsiva e queremos saber qual é a saída?

$$y[n]=x[n]*h[n]?????$$



Convolução via domínio da frequência

- Compensa evitar uma convolução?
 - **Matematicamente difícil de efetuar**
 - Se você tiver a saída e a resposta em frequência, a única forma de obter o sinal de entrada é através da **deconvolução**, ela é impraticável no domínio do tempo! No entanto, no domínio da frequência é uma divisão!
 - Domínio da frequência começa a parecer mais atrativo
 - **Velocidade computacional**
 - O algoritmo é lento porque precisa efetuar muitas multiplicações e divisões
 - Infelizmente o cálculo da DFT é igualmente lento, a **FFT é a solução encontrada**