Transformada Z

TRANSFORMADA Z INVERSA

Formas de se obter a transformada Z inversa

1. Aplicação direta da equação

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) z^{n-1} dz$$

Formas de se obter a transformada Z inversa

1. Aplicação direta da equação

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) z^{n-1} dz$$

2. Método de inspeção
3. Expansão de uma série de potência em z ou z^{-1}
4. Método das frações parciais

Mais simples que integral!!!!

Método de inspeção

TABLE 3.1 SOME COMMON z-TRANSFORM PAIRS

Sequence	Transform	ROC
1. $\delta[n]$	1	All z
2. $u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\| > 1$
3. $-u[-n-1]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\| < 1$
4. $\delta[n-m]$	z^{-m}	All z except 0 (if $m > 0$) or ∞ (if $m < 0$)
5. $a^n u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\| > \|a\|$
6. $-a^n u[-n-1]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\| < \|a\|$
7. $na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\| > \|a\|$
8. $-na^n u[-n-1]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\| < \|a\|$
9. $[\cos\omega_0 n]u[n]$	$\frac{1-[\cos\omega_0]z^{-1}}{1-[2\cos\omega_0]z^{-1}+z^{-2}}$	$\|z\| > 1$
10. $[\sin\omega_0 n]u[n]$	$\frac{[\sin\omega_0]z^{-1}}{1-[2\cos\omega_0]z^{-1}+z^{-2}}$	$\|z\| > 1$
11. $[r^n\cos\omega_0 n]u[n]$	$\frac{1-[r\cos\omega_0]z^{-1}}{1-[2r\cos\omega_0]z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\|z\| > r$
12. $[r^n\sin\omega_0 n]u[n]$	$\frac{[r\sin\omega_0]z^{-1}}{1-[2r\cos\omega_0]z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\|z\| > r$
13. $\begin{cases} a^n, & 0 \le n \le N-1, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$	$\frac{1-a^N z^{-N}}{1-az^{-1}}$	$\|z\| > 0$

TABLE 3.2 SOME z-TRANSFORM PROPERTIES

Section Reference	Sequence	Transform	ROC
	$x[n]$	$X(z)$	R_x
	$x_1[n]$	$X_1(z)$	R_{x_1}
	$x_2[n]$	$X_2(z)$	R_{x_2}
3.4.1	$ax_1[n]+bx_2[n]$	$aX_1(z)+bX_2(z)$	Contains $R_{x_1} \cap R_{x_2}$
3.4.2	$x[n-n_0]$	$z^{-n_0}X(z)$	R_x, except for the possible addition or deletion of the origin or ∞
3.4.3	$z_0^n x[n]$	$X(z/z_0)$	$\|z_0\|R_x$
3.4.4	$nx[n]$	$-z\frac{dX(z)}{dz}$	R_x, except for the possible addition or deletion of the origin or ∞
3.4.5	$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	R_x
	$\mathcal{R}e\{x[n]\}$	$\frac{1}{2}[X(z)+X^*(z^*)]$	Contains R_x
	$\mathcal{J}m\{x[n]\}$	$\frac{1}{2j}[X(z)-X^*(z^*)]$	Contains R_x
3.4.6	$x^*[-n]$	$X^*(1/z^*)$	$1/R_x$
3.4.7	$x_1[n]*x_2[n]$	$X_1(z)X_2(z)$	Contains $R_{x_1} \cap R_{x_2}$
3.4.8	Initial-value theorem:		
	$x[n]=0,\quad n<0 \qquad \lim_{z\to\infty} X(z) = x[0]$		

Exemplo 14

14.Calcular a transformada inversa de

$$X(z)=\frac{z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}},\quad |z|>\frac{1}{2}$$

Exemplo 14

Exemplo 14 Calcular a transformada inversa de

$$X(z) = \frac{z^{-1}}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2}$$

→ lateral direita

$$X(z) = z^{-1} \; \underbrace{\frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}}_{\frac{1}{2^n} u[n]}$$

$N = 1$

$$x[n] = \frac{1}{2^{n-1}} u[n-1]$$

testando u[n]

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} u[n-1] z^{-n}$$

$n - 1 = x \rightarrow n = x + 1$

$$= \sum_{x=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^{x}} u[x] z^{-(x+1)} =$$

$$= z^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} 1/2^{x} \, u[x] z^{-x}$$

$$= z^{-1} \cdot \frac{1}{1 - 1/2 \, z^{-1}}$$

tilibra

Exemplo 15

15.Seja X(z) a transformada inversa de:

$$X(z) = z^{-1}(1 - z^{-1})(1 - \frac{1}{2}z^{-1})$$

Obtenha x[n].

Exemplo 15

Exemplo 15 Calcule a transformada inversa de

$$X(z) = z^{-1}(1-z^{-1})\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)$$

$$X(z) = (z^{-1}-z^{-2})\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right) = z^{-1}-\frac{1}{2}z^{-2}-z^{-2}+\frac{1}{2}z^{-3}$$

$$= z^{-1}-\frac{3}{2}z^{-2}+\frac{1}{2}z^{-3}$$

São atrasos!

$$x[n] = \delta[n-1] - \frac{3}{2}\delta[n-2] + \frac{1}{2}\delta[n-3]$$

Expansão em Série de Potências

$$X(z)=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\cdots+b_Mz^{-M}}{1+a_1z^{-1}+\cdots+a_Nz^{-N}}$$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_nz^{-n}$$

$$x[n]=A_n, -\infty<n<\infty$$

- Se **ROC** for do tipo **|z|>a**, então expressamos **X(z)** como uma série de potências em z^{-1}. Se a região de convergência for do tipo **|z|<a**, então expressamos X(z) como uma série de potências em **z**.

Transformada Z Inversa

Expansão em Série de Potências

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n z^{-n} \quad \Rightarrow \quad x[n] = A_n, -\infty < n < \infty$$

- Ferramentas de séries complexas
  - Série de Laurent

Expansão em Série de Potências

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}}$$

$$x[0] = \frac{1}{a_0} b_0$$

$$x[1] = \frac{1}{a_0}(b_1 - a_1 x[0])$$

$$x[2] = \frac{1}{a_0}(b_2 - a_2 x[0] - a_1 x[1])$$

$$\vdots$$

$$x[n] = \frac{1}{a_0}\left(b_n - \sum_{k=1}^{N} a_k x[n-k]\right)$$

Exemplo 16

16. Seja X(z) com ROC |z|>1/2 a TZ de x[n]. Obtenha x[n] usando decomposição em séries de potência.

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}}$$

$$x[0] = \frac{1}{a_0} b_0$$

$$x[1] = \frac{1}{a_0}(b_1 - a_1 x[0])$$

$$x[2] = \frac{1}{a_0}(b_2 - a_2 x[0] - a_1 x[1])$$

$$\vdots$$

$$x[n] = \frac{1}{a_0}\left(b_n - \sum_{k=1}^{N} a_k x[n-k]\right)$$

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}$$

$b_0 = 1$ $\quad m = 0$

$a_0 = 1$ $\quad N = 1$

$a_1 = -1/2$

demais coeficientes nulos

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + b_N z^{-N}}$$

$x[0] = \frac{b_0}{a_0} = \frac{1}{1} = 1$

$x[1] = \frac{1}{a_0}\left(b_1 - a_1 x[0]\right) = +\frac{1}{2}$

$x[2] = \frac{1}{a_0}\left(b_2 - a_2 x[0] - a_1 x[1]\right) = 1/4$

$x[3] = \frac{1}{a_0}\left(b_3 - \sum_{k=1}^{1} a_k x[n-k]\right) = \frac{1}{a_0}\left(b_3 - a_1 x[3-1]\right) = \frac{1}{8}$

$\vdots$

$$x[n] = \underset{1}{x[0]} + \underset{\frac{1}{2}}{x[1]} + \underset{\frac{1}{4}}{x[2]} + \underset{\frac{1}{8}}{x[3]} + \dots$$

$$x[n] = \frac{1}{2^n} u[n]$$

$|z| > 1/2$

lateral direita

$$x[0] = \frac{1}{a_0} b_0$$

$$x[1] = \frac{1}{a_0}\left(b_1 - a_1 x[0]\right)$$

$$x[2] = \frac{1}{a_0}\left(b_2 - a_2 x[0] - a_1 x[1]\right)$$

$\vdots$

$$x[n] = \frac{1}{a_0}\left(b_n - \sum_{k=1}^{N} a_k x[n-k]\right)$$

Expansão em Frações Parciais

- Aplica-se a sinais unilaterais e bilaterais ROC Anel

ROC
Complemento disco → Lateral Direita
ou
ROC Disco → Lateral Esquerda

zeros

$$X(z) = \frac{b_0}{a_0} \frac{\prod_{k=1}^{M} \left(1 - c_k z^{-1}\right)}{\prod_{k=1}^{N} \left(1 - d_k z^{-1}\right)}$$

polos

$$\frac{p(s)}{(s-a_1)(s-a_2)\ldots(s-a_n)} = \frac{A_1}{s-a_1} + \frac{A_2}{s-a_2} + \ldots + \frac{A_n}{s-a_n}$$

Expansão em Frações Parciais

Ordem numerador

$$X(z) = \frac{b_0}{a_0} \frac{\prod_{k=1}^{M} \left(1 - c_k z^{-1}\right)}{\prod_{k=1}^{N} \left(1 - d_k z^{-1}\right)}$$

Ordem denominador

Se **M<N** e **polos** tiverem todos **ordem 1**

$$X(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}} = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k z}{z - d_k}$$

Ctes que dependem das amostras de x[n]

$$\frac{p(s)}{(s-a_1)(s-a_2)\ldots(s-a_n)} = \frac{A_1}{s-a_1} + \frac{A_2}{s-a_2} + \ldots + \frac{A_n}{s-a_n}$$

Polo de ordem 1 → raiz com multiplicidade 1

Expansão em Frações Parciais

Ordem numerador

$$X(z)=\frac{b_0}{a_0}\frac{\prod_{k=1}^{M}\left(1-c_k z^{-1}\right)}{\prod_{k=1}^{N}\left(1-d_k z^{-1}\right)}$$

Ordem denominador

Se **M>N**

$$X(z)=\sum_{r=0}^{M-N}B_r z^{-r}+\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{1-d_k z^{-1}}=\sum_{r=0}^{M-N}B_r z^{-r}+\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k z}{z-d_k}$$

Somatório finito → convertido diretamente em uma seq

Igual ao anterior

Expansão em Frações Parciais

Como obter os coeficientes A_k?

Frações Parciais – Método de Heavside

$$R(x) = \frac{x^2 + 3x - 4}{(x+3)(x+2)(x-2)} \qquad R(x) = \frac{A}{(x+3)} + \frac{B}{(x+2)} + \frac{C}{(x-2)}$$

$$A = \lim_{x \to -3} (x+3)\,R(x) = \lim_{x \to -3} (x+3)\frac{x^2 + 3x - 4}{(x+3)(x+2)(x-2)} = \lim_{x \to -3} \frac{x^2 + 3x - 4}{(x+2)(x-2)} = \frac{(-3)^2 + 3(-3) - 4}{(-3+2)(-3-2)} = -\frac{4}{5}$$

$$B = \lim_{x \to -2} (x+2)\,R(x) = \lim_{x \to -2} (x+2)\frac{x^2 + 3x - 4}{(x+3)(x+2)(x-2)} = \lim_{x \to -2} \frac{x^2 + 3x - 4}{(x+3)(x-2)} = \frac{(-2)^2 + 3(-2) - 4}{(-2+2)(-2-2)} = \frac{3}{10}$$

$$C = \lim_{x \to 2} (x-2)\,R(x) = \lim_{x \to 2} (x-2)\frac{x^2 + 3x - 4}{(x+3)(x+2)(x-2)} = \lim_{x \to -2} \frac{x^2 + 3x - 4}{(x+3)(x+2)} = \frac{(2)^2 + 3(2) - 4}{(2+2)(2+2)} = \frac{3}{2}$$

$$R(x) = -\frac{4}{5(x+3)} + \frac{3}{10(x+2)} + \frac{3}{2(x-2)}$$

Expansão em Frações Parciais

Como obter os coeficientes A_k?

$$(1-d_k z^{-1}) \times X(z)=\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{1-d_k z^{-1}}$$

Avaliar em $z=d_k$

$$A_k = \lim_{z\to d_k}\left[(1-d_k z^{-1})\sum_{l=1}^{N}\frac{A_l}{1-d_l z^{-1}}\right]$$

0

Sempre que **$z=d_k$** os termos do somatório se anulam

$$A_k = (1-d_k z^{-1})X(z)\Big|_{z=d_k}$$

Transformada Z Inversa

- **Expansão em Frações Parciais**

$$X(z) = \sum_{r=0}^{M-N} B_r \delta[n-r] + \sum_{k=1}^{N} A_k d_k^n u[n]$$

Se x[n] **CAUSAL**

$$X(z) = \sum_{r=0}^{M-N} B_r \delta[n-r] - \sum_{k=1}^{N} A_k d_k^n u[-n-1]$$

Se x[n] **NÃO CAUSAL**

Como obter os coeficientes A_k?

Exemplo 17

- Obtenha x[n] por meio de frações parciais para X(z) abaixo

$$X(z) = \frac{1}{(1 - z^{-1})(1 - \frac{1}{2} z^{-1})(1 - \frac{1}{3} z^{-1})} \qquad |z| > 1$$

M<N e **polos** todos com **ordem 1**

$$X(z) = \frac{b_0}{a_0} \frac{\prod_{k=1}^{M} (1 - c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N} (1 - d_k z^{-1})}$$

$$X(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}} = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k z}{z - d_k}$$

$$A_k = (1 - d_k z^{-1}) X(z)\big|_{z = d_k}$$

Exemplo 17 Obtenha $x[n]$ para

$$X(z) = \frac{1^{\,M}}{(1-z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})^{N}} \quad \boxed{|z|>1} \text{ lateral direita}$$

↳ Polos: $d_1 = 1 \quad d_2 = \frac{1}{2} \quad d_3 = \frac{1}{3}$

Este formato já fatorado é muito conveniente para utilizarmos frações parciais

$M<N \rightarrow A_k = (1-d_k z^{-1})X(z)\Big|_{z=d_k} \leftarrow X(z) = \frac{b_0 \prod_{k=1}^{M}(1-c_k z^{-1})}{a_0 \prod_{k=1}^{N}(1-d_k z^{-1})}$

$$X(z) = \frac{A_1}{(1-z^{-1})} + \frac{A_2}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})} + \frac{A_3}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})}$$

$A_1 = (1-d_1 z^{-1})X(z)\Big|_{z=d_1} =$

$= (1-1z^{-1})\dfrac{1}{(1-z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})}\Big|_{z=1} =$

$= \dfrac{1}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})}\Big|_{z=1} = \dfrac{1}{[1-\frac{1}{2}(1)^{-1}][1-\frac{1}{3}(1)^{-1}]} =$

$= \dfrac{1}{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})} = \dfrac{1}{1/3} = 3 = A_1$

$(1-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, $(1-\frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$ → $1/3$

$A_2 = (1-d_2 z^{-1})\dfrac{1}{(1-z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})}\Big|_{z=d_2} =$

$= (1-\frac{1}{2}z^{-1})\dfrac{1}{(1-z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})}\Big|_{z=1/2} =$

$= \dfrac{1}{(1-z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})}\Big|_{z=1/2} = \dfrac{1}{[1-(\frac{1}{2})^{-1}][1-\frac{1}{3}(\frac{1}{2})^{-1}]}$

$1-2 = -1 \quad 1-\frac{1}{3}2$

$= \dfrac{1}{-1/3} = -3 = A_2$

$A_3 = (1-d_3 z^{-1})\dfrac{1}{(1-z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})}\Big|_{z=d}$

$= \dfrac{1}{(1-z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})}\Big|_{z=1/3} = \dfrac{1}{[1-(1/3)^{-1}][1-\ldots}$

$1-3 \quad 1-$

$[-2] \; [-$

1

$= 1 = A_3$

$A_1 = 3 \quad A_2 = -3 \quad A_3 = 1$

$$X(z) = 3\frac{1}{1-z^{-1}} - 3\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

Como a ROC é $|z|>1$ a seq é lateral direita $a^n u[n]$

$$x[n] = 3\frac{1}{1^n u[n]} - 3\frac{1}{2^n}u[n] + \frac{1}{3^n}u[n]$$

$$x[n] = 3u[n] - \frac{3}{2^n}u[n] + \frac{1}{3^n}u[n]$$

ou

$$x[n] = \left(3 - \frac{3}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right)u[n]$$

Exercício

- Resolva o exemplo 17 modificando a ROC para

$$\frac{1}{3} < |z| < \frac{1}{2}$$

TAREFA

Transformada Z

TRANSFORMADA Z INVERSA

residuez – Função utilizada para determinar frações parciais

Syntax

```
[r,p,k] = residuez(b,a)
[b,a] = residuez(r,p,k)
```

Description

`residuez` converts a discrete time system, expressed as the ratio of two polynomials, to partial fraction expansion, or residue, form. It also converts the partial fraction expansion back to the original polynomial coefficients.

> **Note:** Numerically, the partial fraction expansion of a ratio of polynomials is an ill-posed problem. If the denominator polynomial is near a polynomial with multiple roots, then small changes in the data, including roundoff errors, can cause arbitrarily large changes in the resulting poles and residues. You should use state-space (or pole-zero representations instead.

`[r,p,k] = residuez(b,a)` finds the residues, poles, and direct terms of a partial fraction expansion of the ratio of two polynomials, *b*(*z*) and *a*(*z*). Vectors `b` and `a` specify the coefficients of the polynomials of the discrete-time system *b*(*z*)/*a*(*z*) in descending powers of *z*.

$$B(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_m z^{-m}$$

$$A(z) = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_n z^{-n}$$

If there are no multiple roots and `a` > `n-1`,

$$\frac{B(z)}{A(z)} = \frac{r(1)}{1-p(1)z^{-1}} + \cdots + \frac{r(n)}{1-p(n)z^{-1}} + k(1) + k(2)z^{-1} + \cdots + k(m-n+1)z^{-(m-n)}$$

residuez – **Função utilizada para determinar frações parciais**

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

$$X(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{R_k}{1 - p_k z^{-1}} + \sum_{k=0}^{M-N} C_k z^{-k}$$

$$X(z) = \frac{z}{3z^2-4z+1} = \frac{0+z^{-1}}{3-4z^{-1}+z^{-2}}$$

x z^{-2}

$$X(z) = \frac{1/2}{1 - z^{-1}} + \frac{1/2}{1 - \frac{1}{3} z^{-1}}$$

residuez – Função utilizada para determinar frações parciais

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

Se **M>N**

$$X(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{R_k}{1 - p_k z^{-1}} + \sum_{k=0}^{M-N} C_k z^{-k}$$

Se **M<N**

$$X(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{R_k}{1 - p_k z^{-1}} + \sum_{k=0}^{M-N} C_k z^{-k}$$

$$X(z) = \sum_{r=0}^{M-N} B_r z^{-r} + \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}}$$

R_k (A_k), C_k (B_r), p_k (d_k)

Syntax

```
[r,p,k] = residuez(b,a)
[b,a] = residuez(r,p,k)
```

EXEMPLO - residuez

$$X(z) = \frac{z \quad \times z^{-2}}{3z^2 - 4z + 1 \quad \times z^{-2}}$$

1) Escrever em potencias crescentes de z^{-1}

$$X(z) = \frac{0+z^{-1}}{3-4z^{-1}+z^{-2}}$$

2) b=[0,1]
a=[3,-4,1]

```
>> format rat
>> b=[0,1]
b =
     0           1
>> a=[3,-4,1]
a =
     3          -4           1
>> [R,p,C]=residuez(b,a)
R =
     1/2
    -1/2
p =
     1
     1/3
C =
    []
```

$$X(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{R_k}{1 - p_k z^{-1}} + \sum_{k=0}^{M-N} C_k z^{-k}$$

$$X(z) = \frac{1/2}{1 - z^{-1}} + \frac{-1/2}{1 - \frac{1}{3} z^{-1}}$$

R

p

Observação
Conhecida a região de convergência é possível utilizar essa função para o cálculo da transformada inversa.

EXEMPLO - residuez

Obtenha os polos e zeros da seguinte transformada.
Utilize o MATLAB.

$$X(z) = \frac{z}{3z^2 - 4z + 1} \quad \text{x } z^{-2}$$

1) Escrever em potencias crescentes de z^{-1}

$$X(z) = \frac{0 + z^{-1}}{3 - 4z^{-1} + z^{-2}}$$

2) b=[0,1]
a=[3,-4,1]

```
>> format rat
>> b=[0,1]
b =
      0           1
>> a=[3,-4,1]
a =
      3          -4           1
>> [R,p,C]=residuez(b,a)
R =
      1/2
     -1/2
p =
      1
      1/3
C =
     []
```

$$X(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{R_k}{1 - p_k z^{-1}} + \sum_{k=0}^{M-N} C_k z^{-k}$$

$$X(z) = \frac{1/2}{1 - z^{-1}} + \frac{1/2}{1 - \frac{1}{3} z^{-1}}$$

R

p

Observação
Conhecida a região de convergência é possível utilizar essa função para o cálculo da transformada inversa.

EXEMPLO - residuez

É possível fazer o inverso também, ou seja descobrir que polinômios geraram as frações parciais

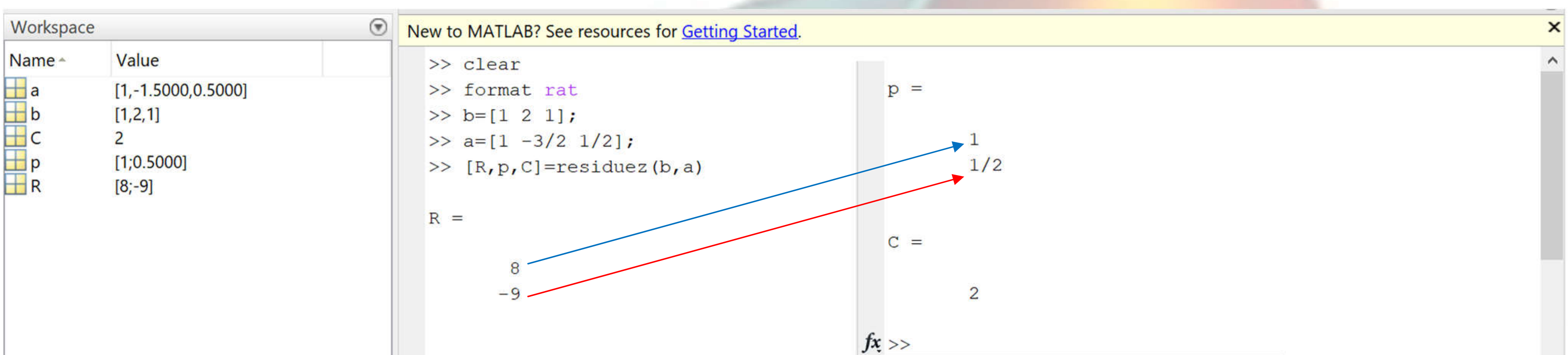
```
>> R=[1/2 -1/2]; p=[1 1/3]; C=[];
>> [b,a]=residuez(R,p,C)

b =
     0          1/3

a =

     1          -4/3          1/3
```

$$X(z) = \frac{0+z^{-1}}{3-4z^{-1}+z^{-2}}$$

$$X(z) = \frac{z}{3z^2 - 4z + 1}$$

EXEMPLO - residuez

Calcule a TZ inversa de $X(z) = \frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1-\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}$, $|z|>1$ Lateral direita



$$X(z) = 2 + \frac{8}{1 - 1z^{-1}} - \frac{9}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$x[n] = 2\delta[n] + 8u[n] - 9\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

Pt
Ex 3.10 pag 73-74

Eng
Ex 3.9 pag 115-116

Oppenheim • Schafer

Processamento

TAREFA

Example 3.9 Inverse by Partial Fractions

To illustrate the case in which the partial fraction expansion has the form of Eq. (3.43), consider a sequence $x[n]$ with z-transform

$$X(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}} = \frac{(1 + z^{-1})^2}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)(1 - z^{-1})}, \quad |z| > 1. \tag{3.46}$$

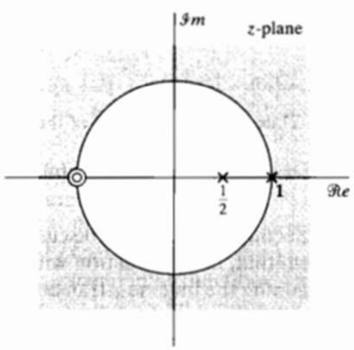


Figure 3.13 Pole–zero plot for the z-transform in Example 3.9.

The pole–zero plot for $X(z)$ is shown in Figure 3.13. From the region of convergence and property 5, Section 3.2, it is clear that $x[n]$ is a right-sided sequence. Since $M = N = 2$ and the poles are all first order, $X(z)$ can be represented as

$$X(z) = B_0 + \frac{A_1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - z^{-1}}.$$

The constant B_0 can be found by long division:

$$\begin{array}{r} 2 \\ \frac{1}{2}z^{-2} - \frac{3}{2}z^{-1} + 1 \;\big)\; z^{-2} + 2z^{-1} + 1 \\ \underline{z^{-2} - 3z^{-1} + 2} \\ 5z^{-1} - 1 \end{array}$$

Since the remainder after one step of long division is of degree 1 in the variable z^{-1}, it is not necessary to continue to divide. Thus, $X(z)$ can be expressed as

$$X(z) = 2 + \frac{-1 + 5z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)(1 - z^{-1})}. \tag{3.47}$$

Now the coefficients A_1 and A_2 can be found by applying Eq. (3.41) to Eq. (3.46) or, equivalently, Eq. (3.47). Using Eq. (3.47), we obtain

$$A_1 = \left[\left(2 + \frac{-1 + 5z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)(1 - z^{-1})}\right)\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\right]_{z=1/2} = -9,$$

$$A_2 = \left[\left(2 + \frac{-1 + 5z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)(1 - z^{-1})}\right)(1 - z^{-1})\right]_{z=1} = 8.$$

Therefore,

$$X(z) = 2 - \frac{9}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{8}{1 - z^{-1}}. \tag{3.48}$$

From Table 3.1, we see that since the ROC is $|z| > 1$,

$$2 \overset{z}{\longleftrightarrow} 2\delta[n],$$

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \overset{z}{\longleftrightarrow} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n],$$

$$\frac{1}{1 - z^{-1}} \overset{z}{\longleftrightarrow} u[n].$$

Thus, from the linearity of the z-transform,

$$x[n] = 2\delta[n] - 9\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 8u[n].$$

TAREFA

Considere a seguinte transformada Z

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-2}}$$
$$R_X\colon |z| > 1$$

a) Calcule a transformada Z inversa por meio de frações parcias
b) Calcule a transformada Z inversa por meio de expansão em série de potencias
c) Calcule a transformada Z inversa utilizando o MATLAB

OBSERVAÇÃO: Salve o item c em um script