A Transformada Z

Transformada Z

INTRODUÇÃO

Introdução

TRANSFORMADA DE FOURIER DISCRETA

$$X(\omega) = X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega}$$

Senóides complexas de módulo 1

- Funciona para x[n] limitada, somável
- Não permite lidar com sinais não limitados

A Transformada Z

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} \quad \text{com} \quad z = re^{j\omega}$$

- Ao invés de falar em sequencia somável falaremos em **região de convergencia** (ROC do ingles, ou RDC)

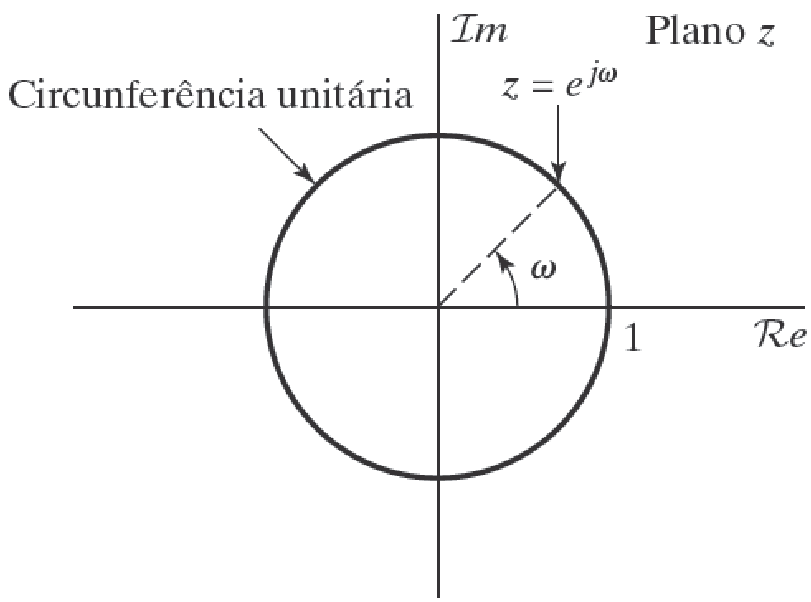
Transformada z

Oppenheim • Schafer

Processamento em tempo discreto de sinais

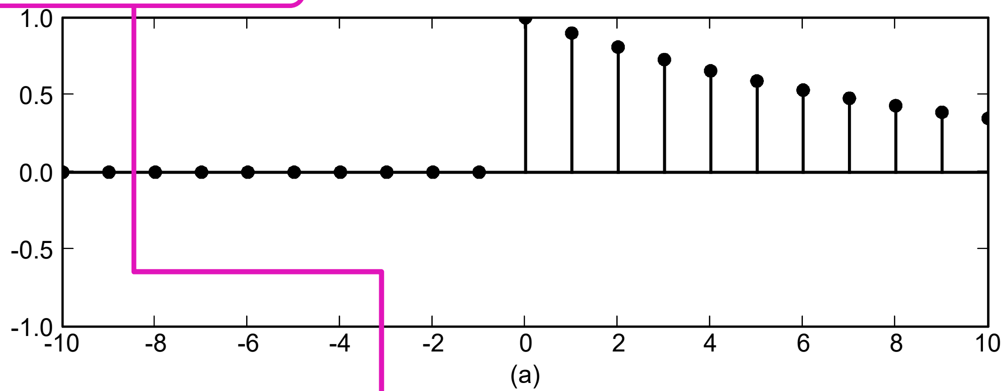
3ª edição

- Circunferência unitária no plano *z* complexo



Exemplo 1

- Seja $\boxed{x[n] = a^n u[n]}$. Calcule sua transformada Z.



$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

Exemplo 1

Transformada Z de $x[n] = a^n u[n]$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{x[n]}_{a^n u[n]} z^{-n}$$ Definição

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\overbrace{a z^{-1}}^{r})^n$$

$$u[n] = \begin{cases} 0, & n<0 \\ 1, & n \geq 0 \end{cases}$$

Série Geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + \dots + r^n = \frac{1}{1-r}$, $|r|<1$

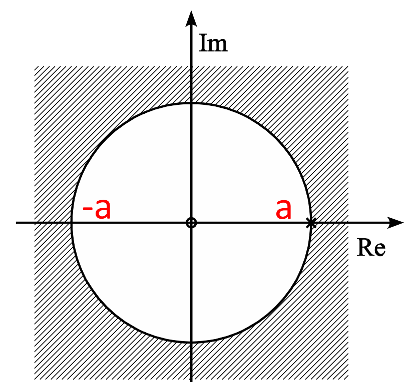
Se $|az^{-1}| < 1 \rightarrow$ utilizar série geométrica

$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{1}{1-a/z} = \frac{1}{\frac{z-a}{z}} = \frac{z}{z-a}$$ //

$$|az^{-1}|<1 \Rightarrow |a||z^{-1}|<1 \Rightarrow |a|\frac{1}{|z|}<1$$

$$\Rightarrow |a|<|z|$$

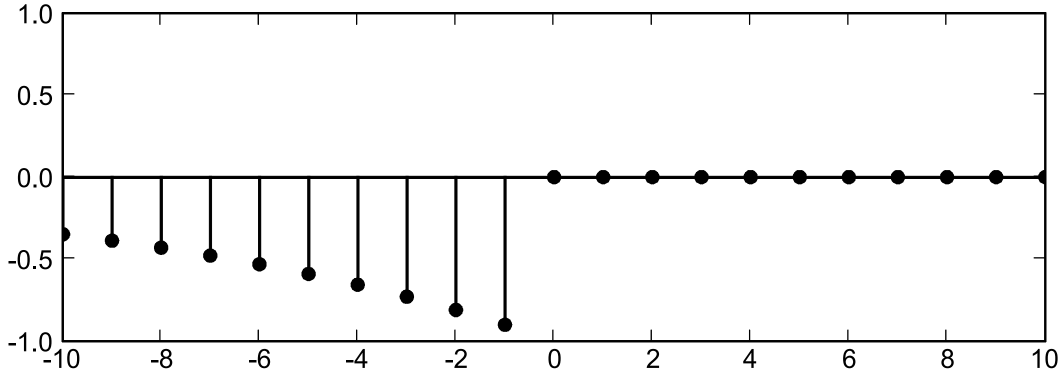
$$\therefore \boxed{X(z) = \frac{z}{z-a} = \frac{1}{1-az^{-1}}, \quad |z|>|a|}$$ //



(a)

Exemplo 2

- Seja $x[n] = -a^n u[-n-1]$. Calcule sua transformada Z.



(b)

Exemplo 2

Exemplo 2

Transformada Z de $x[n] = -a^n u[-n-1]$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$ Definição

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} -a^n u[-n-1] z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n}$$

Para usar a série geométrica precisamos inverter o somatório e começar em zero

$$X(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} z^{+n} = -\sum_{n=1}^{\infty} (a^{-1}z)^n =$$

$$= \underbrace{(a^{-1}z)^0}_{1} \underbrace{- (a^{-1}z)^0}_{-1} - \sum_{n=1}^{\infty} (a^{-1}z)^n$$

$n=0$ $$= -\sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1}z)^n$$

$$= 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1}z)^n = 1 - \frac{1}{1-a^{-1}z} \quad \text{I}$$

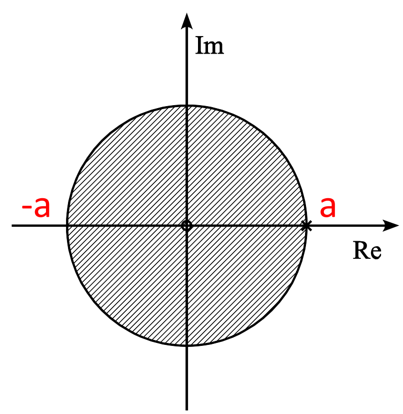
$$|a^{-1}z| < 1 \quad \text{II}$$

I $$X(z) = 1 - \frac{1}{1 - z/a} = 1 - \frac{1}{\frac{a-z}{a}} = 1 - \frac{a}{a-z} =$$

$$= \frac{a - z - a}{a-z} = \frac{-z}{a-z} = \frac{z}{z-a} = \frac{1}{1-az^{-1}}$$

II $$\frac{1}{|a|}|z| < 1 \Rightarrow |z| < |a|$$

$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}, \quad |z| < |a|$$

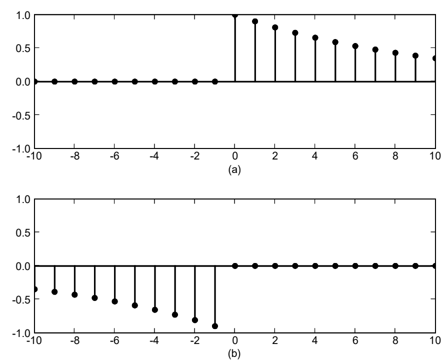


(b)

Exemplos 1 e 2

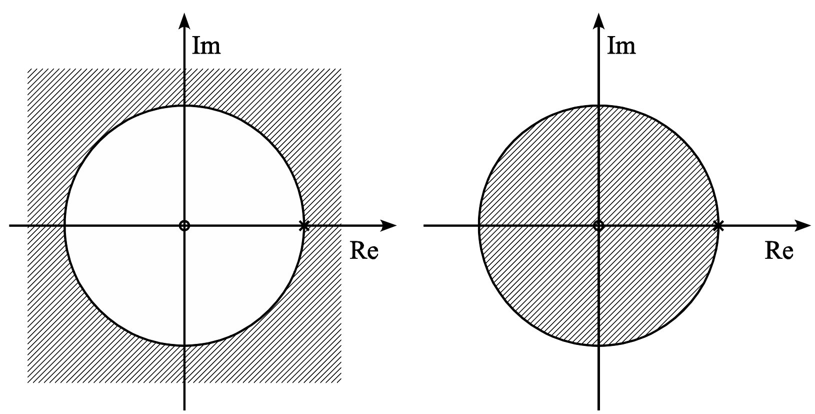
LATERAL DIREITA

$$x[n] = a^n u[n]$$



LATERAL ESQUERDA

$$x[n] = -a^n u[-n-1]$$



(a) (b)

A Transformada Z

Forma usual da transformada Z

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}}$$

OU

$$X(z) = \frac{b_0}{a_0} \frac{\prod_{k=1}^{M} \left(1 - c_k z^{-1}\right)}{\prod_{k=1}^{N} \left(1 - d_k z^{-1}\right)}$$

- Os coeficientes **c_ks são raízes do numerador**, sendo denominados **zeros de X(z)**.
- Os coeficiente **d_ks são raízes do denominador**, sendo denominados de **pólos de X(z)**.

A Transformada Z

Forma usual da transformada Z

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}}$$

OU

$$X(z) = \frac{b_0}{a_0} \frac{\prod_{k=1}^{M} \left(1 - c_k z^{-1}\right)}{\prod_{k=1}^{N} \left(1 - d_k z^{-1}\right)}$$

- Os coeficientes **c_ks são raízes do numerador**, sendo denominados **zeros de X(z)**.
- Os coeficiente **d_ks são raízes do denominador**, sendo denominados de **pólos de X(z)**.

POLINÔMIOS

x^2-5x+6

FORMA FATORADA

$(x-2)(x-3)$

raízes

Exemplo 3

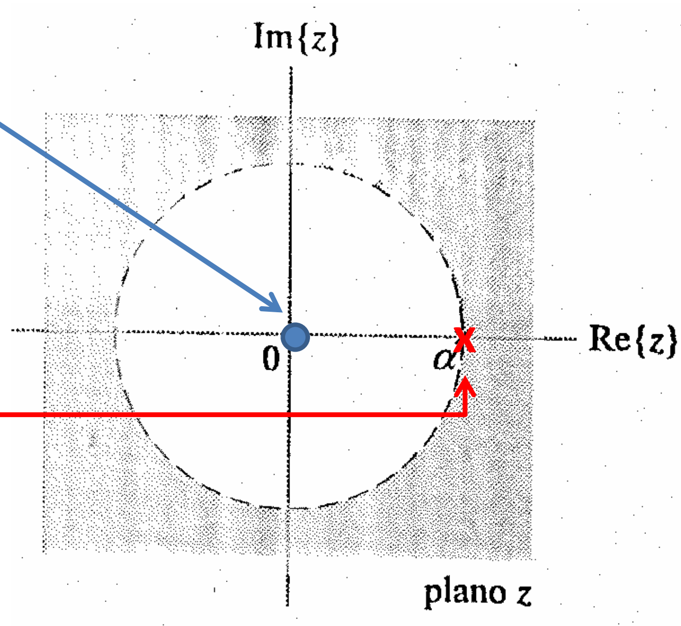
Descreva a localização dos pólos e zeros de X(z) no plano Z.

zeros

$$X(z) = \frac{z}{z-a}$$

polos

- Zeros: z=0
- Polos: z=a



Exemplo 4

- Encontre os zeros e polos de

$$X(z) = \frac{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - z^{-2}}$$

```
>> format rat
>> d=[1 -2 1];
>> roots(d)

ans =

       1
       1

>> e=[1 0 -1];
>> roots(e)

ans =

      -1
       1
```

Exemplo 4 Encontrar os polos e zeros de

$$X(z) = \frac{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - z^{-2}}$$

Fatorando

$$1 - 2z^{-1} + z^{-2} = (1 - z^{-1})^2$$

$$1 - z^{-2} = (1 - z^{-1})(1 + z^{-1})$$

$$X(z) = \frac{(1 - z^{-1})^{\cancel{2}}}{\cancel{(1 - z^{-1})}(1 + z^{-1})} = \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

$$X(z) = \frac{b_0}{a_0} \frac{\prod_{k=1}^{M} (1 - \overset{\text{zeros}}{c_k} z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N} (1 - \underset{\text{polos}}{d_k} z^{-1})}$$ → definição usando produtório

zero: $z = 1$

Polo: $z = -1$

Transformada Z

PROPRIEDADES DA ROC

Propriedades da Região de Convergência

1. *A região de convergência não deve conter nenhum pólo e tem simetria circular.*

   – Prova: Se **d é um pólo**, então **<u>|X(d)|=∞</u>**, de modo que a **transformada z não converge no pólo**.

$$X(z)=\frac{b_0}{a_0}\frac{\prod_{k=1}^{M}\left(1-c_k z^{-1}\right)}{\prod_{k=1}^{N}\left(1-d_k z^{-1}\right)}$$

Propriedades da Região de Convergência

2. *A região de convergência de um sinal de duração finita inclui o plano Z inteiro, com exceção, possivelmente, de z=0 e/ou z=∞.*

Somável

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

Exemplos 5 e 6

5. Calcule a transformada Z de $\delta[n]$

6. Calcule a transformada Z de $\delta[n-k]$

Exemplo 5

5. Calcule a transformada Z de δ[n]

Exemplo 5 Calcule a TZ de $\delta[n]$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n]\, z^{-n} = 1$$

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & \text{p/ } n = 0 \\ 0 & \text{p/ } n \neq 0 \end{cases}$$

ROC abrange todo o plano!!

↳ $\delta[n]$ é a única seq com esta característica!

Exemplos 6

6. Calcule a transformada Z de δ[n-k]

Exemplo 6 Calcule a TZ de $x[n] = \delta[n-k]$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n-k]\, z^{-n} = z^{-k}$$

$$\delta[n-k] = \begin{cases} 1 & p/\ n = k \\ 0 & p/\ n \neq k \end{cases}$$

Está definida para todo o plano, mas tem polo em 2 situações

$$X(z) = z^{-k}$$

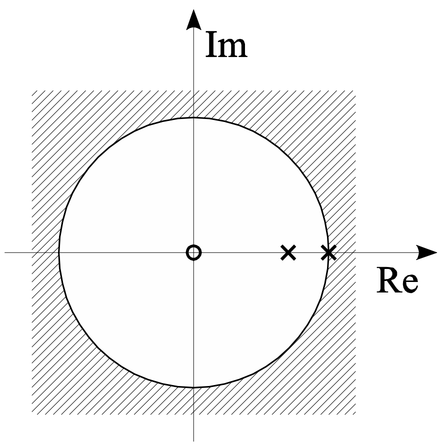
$k > 0$ $\quad X(z) = \frac{1}{z^{k}}$ polo $z=0$

$k < 0$ $\quad X(z) = z^{k}$ zero em $z=0$

Comportamento ilimitado em z=∞

Propriedades da Região de Convergência

3. *Uma seqüência lateral direita ($n \geq n_0$) tem como região de convergência o <u>complemento de um disco</u> centrado na origem, com valores de z tais que $|z|>r_0$*



(a)

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

Exemplo 7

- Calcule a transformada Z de x[n] e analise a região de convergência

$$x[n]=\frac{1}{2^n}u[n]+\frac{1}{3^n}u[n]$$

Exemplo 7

Calcule a TZ e analise a ROC para

$$x[n] = \frac{1}{2^n}u[n] + \frac{1}{3^n}u[n]$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}u[n] + \frac{1}{3^n}u[n]\right)z^{-n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2^n}u[n]z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{3^n}u[n]z^{-n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}z^{-n} =$$

$$= \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^n}_{\text{série geométrica}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}z^{-1}\right)^n}_{\text{série geométrica}}$$

$$\boxed{X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}}$$

$$\left|\frac{1}{2}z^{-1}\right| < 1 \qquad \left|\frac{1}{3}z^{-1}\right| < 1$$

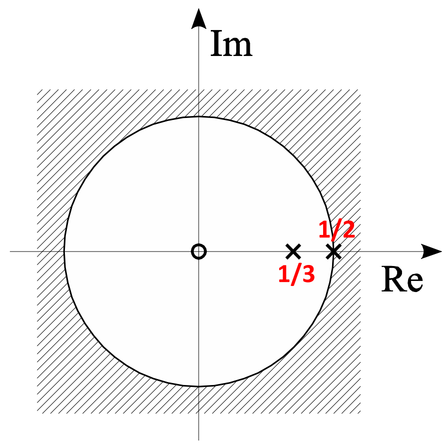
$$|1/2||z^{-1}| < 1 \qquad |1/3||z^{-1}| < 1$$

$$|1/2|\frac{1}{|z|} < 1 \qquad |1/3|\frac{1}{|z|} < 1$$

$$|z| > 1/2 \qquad |z| > 1/3$$

5. $a^n u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\| > \|a\|$
6. $-a^n u[-n-1]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\| < \|a\|$

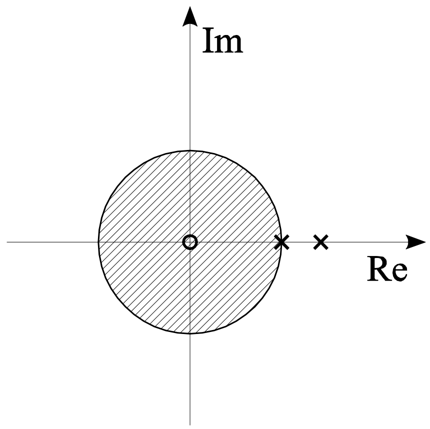
$$X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}, |z| > \frac{1}{2}$$



(a)

Propriedades da Região de Convergência

4. *Uma seqüência lateral esquerda ($n \leq n_0$) tem como região de convergência um disco centrado na origem, com valores de z tais que $|z| < r_0$*



(b)

$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{n_2} x[n] z^{-n}$$

Exemplo 8

- Calcule a transformada Z de x[n] e analise a região de convergência

$$x[n] = -\frac{1}{2^n}u[-n-1] - \frac{1}{3^n}u[-n-1]$$

Exemplo 8

Exemplo 8

Calcule a TZ e analise a ROC de

$$x[n] = -\frac{1}{2^n}u[-n-1] - \frac{1}{3^n}u[-n-1]$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(-\frac{1}{2^n}u[-n-1] - \frac{1}{3^n}u[-n-1]\right)z^{-n}$$

$$= -\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2^n}u[-n-1]z^{-n} - \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{3^n}u[-n-1]z^{-n} =$$

A estratégia para pensar já foram utilizadas no exemplo 2

$$= 1 - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{-n}}z^n + 1 - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^{-n}}z^n$$

$$= 1 - \sum_{n=0}^{\infty}(2z)^n + 1 - \sum_{n=0}^{\infty}(3z)^n$$

$$|2z| < 1 \qquad |3z| < 1$$

$$= \left[1 - \frac{1}{1-2z}\right] + \left[1 - \frac{1}{1-3z}\right] =$$

$$= \left[\frac{1-2z-1}{1-2z}\right] + \left[\frac{1-3z-1}{1-3z}\right] = \frac{-2z}{1-2z} \quad \frac{-3z}{1-3z} =$$

$$= \frac{(-2z)}{(-2z)\left(\frac{1}{-2z}+1\right)} + \frac{(-3z)}{(-3z)\left(\frac{1}{-3z}+1\right)} =$$

$$\boxed{X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}}$$

$$|2z| < 1 \qquad |3z| < 1$$

$$|2||z| < 1 \qquad |3||z| < 1$$

$$|z| < \frac{1}{2} \qquad |z| < \frac{1}{3}$$

Como a ROC não pode conter polos e zeros $|z| < 1/3$

5. $a^n u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\| > \|a\|$
6. $-a^n u[-n-1]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\| < \|a\|$

Exemplo 8

Exemplo 8

Calcule a TZ e analise a ROC de

$$x[n] = -\frac{1}{2^n}u[-n-1] - \frac{1}{3^n}u[-n-1]$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(-\frac{1}{2^n}u[-n-1] - \frac{1}{3^n}u[-n-1]\right)z^{-n}$$

$$= -\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2^n}u[-n-1]z^{-n} - \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{3^n}u[-n-1]z^{-n}$$

A estratégia para pensar já foram utilizadas no exemplo 2

$$= 1 - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{-n}}z^n + 1 - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^{-n}}z^n$$

$$= 1 - \sum_{n=0}^{\infty}(2z)^n + 1 - \sum_{n=0}^{\infty}(3z)^n$$

$|2z|<1$ $\qquad$ $|3z|<1$

$$= \left[1 - \frac{1}{1-2z}\right] + \left[1 - \frac{1}{1-3z}\right] =$$

$$= \left[\frac{1-2z-1}{1-2z}\right] + \left[\frac{1-3z-1}{1-3z}\right] = \frac{-2z}{1-2z} \quad \frac{-3z}{1-3z} =$$

$$= \frac{(-2z)}{(-2z)\left(\frac{1}{-2z}+1\right)} + \frac{(-3z)}{(-3z)\left(\frac{1}{-3z}+1\right)} =$$

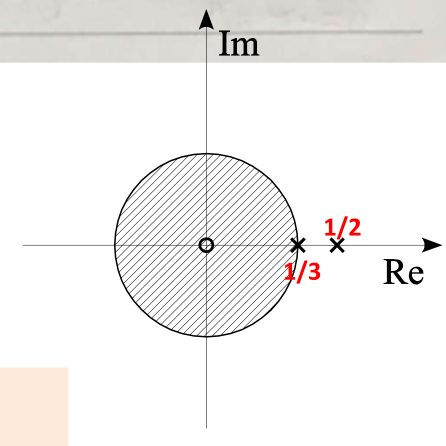
$$\boxed{X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}}$$

$|2z|<1$ $\qquad$ $|3z|<1$

$|2||z|<1$ $\qquad$ $|3||z|<1$

$|z|<\frac{1}{2}$ $\qquad$ $|z|<\frac{1}{3}$

Como a ROC não pode conter polos e zeros $|z|<1/3$

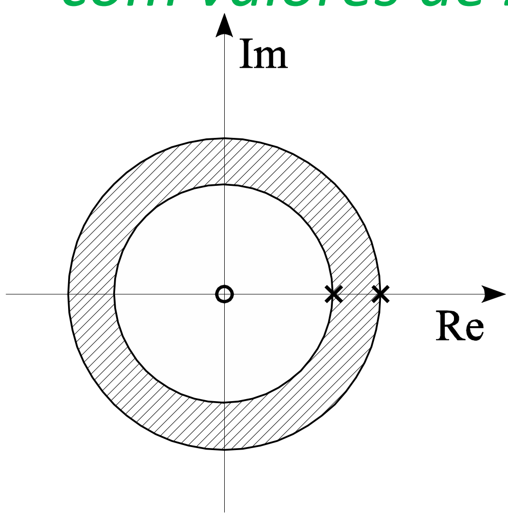


(b)

$$X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}, |z| < \frac{1}{3}$$

Propriedades da Região de Convergência

5. *Uma seqüência infinita (definida para todo o tempo discreto) tem como região de convergência um anel centrado na origem, com valores de z tais que $r_1<|z|<r_2$*



(c)

$$X(z)=\sum_{n=n_1}^{n_2} x[n]z^{-n}$$

Exemplo 9

- Calcule a transformada Z de x[n] e analise a região de convergência

$$x[n] = -\frac{1}{2^n}u[-n-1] + \frac{1}{3^n}u[n]$$

Exemplo 9

Exemplo 9 Calcule a TZ e analise a ROC de

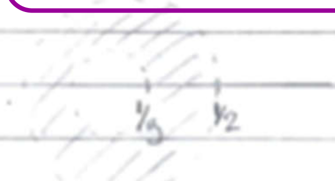
$$x[n] = -\frac{1}{2^n}u[-n-1] + \frac{1}{3^n}u[n]$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(-\frac{1}{2^n}u[-n-1] + \frac{1}{3^n}u[n]\right)z^{-n} =$$

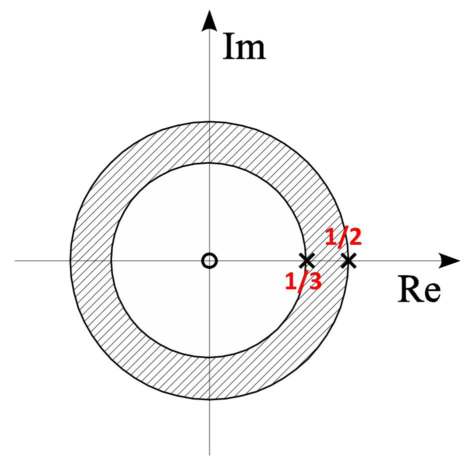
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(-\frac{1}{2^n}u[-n-1]\right)z^{n} + \sum_{n=-\infty}^{\infty}u[n]\frac{1}{3^n}z^{-n} =$$

$$= \underbrace{-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2^n}z^{n}}_{\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}} + \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{3^n}z^{-n}}_{\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}} \boxed{= \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}}$$

$|z| < 1/2$ $\qquad$ $|z| > \frac{1}{3}$



$$X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}, \frac{1}{3} < |z| < \frac{1}{2}$$



(c)

Pares de transformada Z

TABLE 3.1 SOME COMMON z-TRANSFORM PAIRS

Sequence	Transform	ROC
1. $\delta[n]$	1	All z
2. $u[n]$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\| > 1$
3. $-u[-n-1]$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\| < 1$
4. $\delta[n-m]$	z^{-m}	All z except 0 (if $m > 0$) or ∞ (if $m < 0$)
5. $a^n u[n]$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\| > \|a\|$
6. $-a^n u[-n-1]$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\| < \|a\|$
7. $na^n u[n]$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\| > \|a\|$
8. $-na^n u[-n-1]$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\| < \|a\|$
9. $[\cos\omega_0 n]u[n]$	$\dfrac{1-[\cos\omega_0]z^{-1}}{1-[2\cos\omega_0]z^{-1}+z^{-2}}$	$\|z\| > 1$
10. $[\sin\omega_0 n]u[n]$	$\dfrac{[\sin\omega_0]z^{-1}}{1-[2\cos\omega_0]z^{-1}+z^{-2}}$	$\|z\| > 1$
11. $[r^n\cos\omega_0 n]u[n]$	$\dfrac{1-[r\cos\omega_0]z^{-1}}{1-[2r\cos\omega_0]z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\|z\| > r$
12. $[r^n\sin\omega_0 n]u[n]$	$\dfrac{[r\sin\omega_0]z^{-1}}{1-[2r\cos\omega_0]z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\|z\| > r$
13. $\begin{cases} a^n, & 0 \le n \le N-1, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$	$\dfrac{1-a^N z^{-N}}{1-az^{-1}}$	$\|z\| > 0$

Transformada Z

PROPRIEDADES DA TRANSFORMADA Z

Propriedades da Transformada Z

- A **DTFT** é aplicável somente a **sistemas estáveis**, enquanto que a **TZ** se aplica a **sistemas em geral**, seja ele estável ou não.

- **Várias propriedades da DTFT se aplicam também à transformada Z**, uma vez que esta é a generalização da DTFT.

Propriedades da Transformada Z

Nas propriedades apresentadas a seguir, supomos que

$$x[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} X(z)$$ com região de convergência Rx.

e

$$y[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} Y(z)$$ com região de convergência Ry.

Propriedades da Transformada Z

Linearidade

$$ax[n]+by[n]\overset{Z}{\longleftrightarrow} aX(z)+bY(z)$$

com região de convergência igual a no mínimo $R_x \cap R_y$.

Exemplo 10

Considere a seqüência $x[n] = \boxed{\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]} - \boxed{\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]}$

$$ax[n] + by[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} aX(z) + bY(z)$$

Rx∩Ry

1

$$X_1(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

2

$$X_2(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

ROC $|z| > \frac{1}{2}$ $|z| > \frac{1}{3}$

$$|z| > \frac{1}{2} \cap |z| > \frac{1}{3} \Rightarrow |z| > \frac{1}{2}$$

A ROC não pode conter zeros e polos

Propriedades da Transformada Z

Deslocamento no tempo

$$Z\{x[n-k]\} = z^{-k} X(z)$$

com região de convergência Rx pode sofrer alguma alteração pois z^{-k} pode **acrescentar um polo** ou **cancelar um zero**

z^{-1} → **Muito usado, atraso simples em uma amostra**

Exemplos 11 e 12

11. Considere a sequencia **$x[n]=u[n-N]$**. Verifique qual é a ROC. Discuta o resultado com base na TZ de u[n].

12. Considere a sequencia **$y[n]=u[n] - u[n-N]$**. Verifique qual é a ROC.

TAREFA

Propriedades da Transformada Z

Reversão no Tempo (Reflexão)

$$x[-n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X\left(z^{-1}\right)$$

ROC igual a 1/Rx.

Se Rx tem a forma $r_1 < |z| < r_2$, então, ao fazer $z=z^{-1}$, temos que

$$r_1 < 1/|z| < r_2 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{r_2} < |z| < \frac{1}{r_1}$$

Exemplo 13

13. Calcule a TZ de **$x[n]=-u[-n-1]$** utilizando a TZ de $u[n]$ e as propriedades da TZ

Exemplo 13

Exemplo 13

Calcule a TZ de $x[n] = -u[-n-1]$

reversão no tempo — desloca mento

Reversão $TZ\{x[n]\} = X(z^{-1})$ ROC $\frac{1}{r_2} < |z| < \frac{1}{r_1}$

Desloccam. $TZ\{x[n-k]\} \; z^{-k} \; X(z)$ ROC $= R_x$

$TZ\{u[n]\} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$, $|z| > 1$

$TZ\{u[-n]\} = \frac{z^{-1}}{z^{-1}-1}$, $|z| < 1$

$TZ\{-u[-n-1]\} = TZ\{-u[-(n+1)]\}$ $-(-1)$

deslocamento

$= -z^{-(-1)} \cdot TZ\{u[-n]\} = -z \cdot \frac{z^{-1}}{z^{-1}-1} =$

$= -\frac{1}{z^{-1}-1} = \frac{1}{1-z^{-1}}$

$\therefore X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$, $|z| < 1$

inverte a ROC

mesma transformada de $u[n]$

TABLE 3.1 SOME COMMON z-TRANSFORM PAIRS

Sequence	Transform	ROC
1. $\delta[n]$	1	All z
2. $u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
3. $-u[-n-1]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert < 1$
4. $\delta[n-m]$	z^{-m}	All z except 0 (if $m>0$) or ∞ (if $m<0$)
5. $a^n u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
6. $-a^n u[-n-1]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
7. $na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
8. $-na^n u[-n-1]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
9. $[\cos\omega_0 n]u[n]$	$\frac{1-[\cos\omega_0]z^{-1}}{1-[2\cos\omega_0]z^{-1}+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
10. $[\sin\omega_0 n]u[n]$	$\frac{[\sin\omega_0]z^{-1}}{1-[2\cos\omega_0]z^{-1}+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
11. $[r^n\cos\omega_0 n]u[n]$	$\frac{1-[r\cos\omega_0]z^{-1}}{1-[2r\cos\omega_0]z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > r$
12. $[r^n\sin\omega_0 n]u[n]$	$\frac{[r\sin\omega_0]z^{-1}}{1-[2r\cos\omega_0]z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > r$
13. $\begin{cases} a^n, & 0 \le n \le N-1, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$	$\frac{1-a^N z^{-N}}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 0$

Sumário de propriedades da TZ

TABLE 3.2 SOME z-TRANSFORM PROPERTIES

Section Reference	Sequence	Transform	ROC
	$x[n]$	$X(z)$	R_x
	$x_1[n]$	$X_1(z)$	R_{x_1}
	$x_2[n]$	$X_2(z)$	R_{x_2}
3.4.1	$ax_1[n] + bx_2[n]$	$aX_1(z) + bX_2(z)$	Contains $R_{x_1} \cap R_{x_2}$
3.4.2	$x[n - n_0]$	$z^{-n_0}X(z)$	R_x, except for the possible addition or deletion of the origin or ∞
3.4.3	$z_0^n x[n]$	$X(z/z_0)$	$\|z_0\|R_x$
3.4.4	$nx[n]$	$-z\dfrac{dX(z)}{dz}$	R_x, except for the possible addition or deletion of the origin or ∞
3.4.5	$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	R_x
	$\mathcal{R}e\{x[n]\}$	$\frac{1}{2}[X(z) + X^*(z^*)]$	Contains R_x
	$\mathcal{J}m\{x[n]\}$	$\frac{1}{2j}[X(z) - X^*(z^*)]$	Contains R_x
3.4.6	$x^*[-n]$	$X^*(1/z^*)$	$1/R_x$
3.4.7	$x_1[n] * x_2[n]$	$X_1(z)X_2(z)$	Contains $R_{x_1} \cap R_{x_2}$
3.4.8	Initial-value theorem:		
	$x[n] = 0, \quad n < 0$ $\quad \lim_{z\to\infty} X(z) = x[0]$		