Sinais e Sistemas de Tempo Discreto

REPRESENTAÇÃO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA DE SINAIS E SISTEMAS DE TEMPO DISCRETO

Lineares

$$T\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = aT\{x_1[n]\} + bT\{x_2[n]\}$$

Invariantes no tempo

$$x_1[n] = x[n - n_0] \rightarrow y_1[n] = y[n - n_0].$$

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k].$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k].$$

$$\boxed{y[n] = x[n] * h[n].}$$

Existem outras sequencias que podem ser utilizadas para representar um sinal de tempo discreto?

Sinais e Sistemas de Tempo Discreto

REPRESENTAÇÃO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA DE SINAIS E SISTEMAS DE TEMPO DISCRETO

Quais características essas sequencias devem possuir?

- Funcionar para uma grande quantidade de sinais

- A resposta do sistema à essa sequencia deve ter uma estrutura simples

Senóides

Quais características essas sequencias devem possuir?

- Funcionar para uma grande quantidade de sinais
- A resposta do sistema à essa sequencia deve ter uma estrutura simples

RI de uma senóide é uma senóide

Senóides

Autofunções dos sistemas LTI

Autofunções

Autovalores e autovetores

$$T\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

$$y = \lambda\vec{x}$$

Autofunções

Autovalores e autovetores

$$T\vec{x} = \lambda\vec{x}$$
$$y = \lambda\vec{x}$$

Caso continuo

$x(t) = e^{st}$ $\quad h(t)$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau =$$
$$= e^{st}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau = s^{st}H(s)$$

autofunção

autovalor

Autofunções

Autovalores e autovetores

$$T\vec{x} = \lambda\vec{x}$$
$$y = \lambda\vec{x}$$

Caso contínuo

$$x(t) = e^{st} \qquad h(t)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau =$$

autofunção

$$= e^{st}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau = s^{st}H(s)$$

autovalor

Caso discreto

$$x[n] = z^n \qquad h[n]$$

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] =$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{n-k} = z^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k} =$$

$$y[n] = H(z)z^n$$

Autofunções para sistemas lineares invariantes no tempo

- Especificamente, com entrada $\boldsymbol{x[n] = e^{j\omega n}}$ para $\boldsymbol{-\infty < n < \infty}$, pode-se mostrar facilmente que a saída correspondente de um sistema LIT com resposta ao impulso $h[n]$ é

$$\boxed{y[n] = H(e^{j\omega})e^{j\omega n}}$$

© 2013 Pearson. Todos os direitos reservados.

Autofunções para sistemas lineares invariantes no tempo

Oppenheim • Schafer

Processamento

dição

- Especificamente, com entrada ***x*[*n*]** = **−∞ < *n* < ∞**, pode-se mostrar facilmente correspondente de um sistema LIT com impulso *h*[*n*] é $y[n] = H\,(e^{j\omega})e^{j\omega n}$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{j\omega(n-k)}$$

$$= e^{j\omega n}\underbrace{\boxed{\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}\right)}}_{H(e^{j\omega})}.$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k},$$

$$y[n] = \underbrace{\boxed{H(e^{j\omega})}}_{\text{autovalor}}\underbrace{\boxed{e^{j\omega n}}}_{\text{autofunção}}.$$

...ervados.

Autofunções para sistemas lineares invariantes no tempo

- Especificamente, com entrada $x[n] = e^{j\omega n}$ para $-\infty < n < \infty$, pode-se mostrar facilmente que a saída correspondente de um sistema LIT com resposta ao impulso $h[n]$ é

$$\boxed{y[n] = H(e^{j\omega})e^{j\omega n}}$$

- em que

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}$$

- Em geral,

$$H(e^{j\omega}) = H_R(e^{j\omega}) + jH_I(e^{j\omega})$$

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\angle H(e^{j\omega})}.$$

© 2013 Pearson. Todos os direitos reservados.

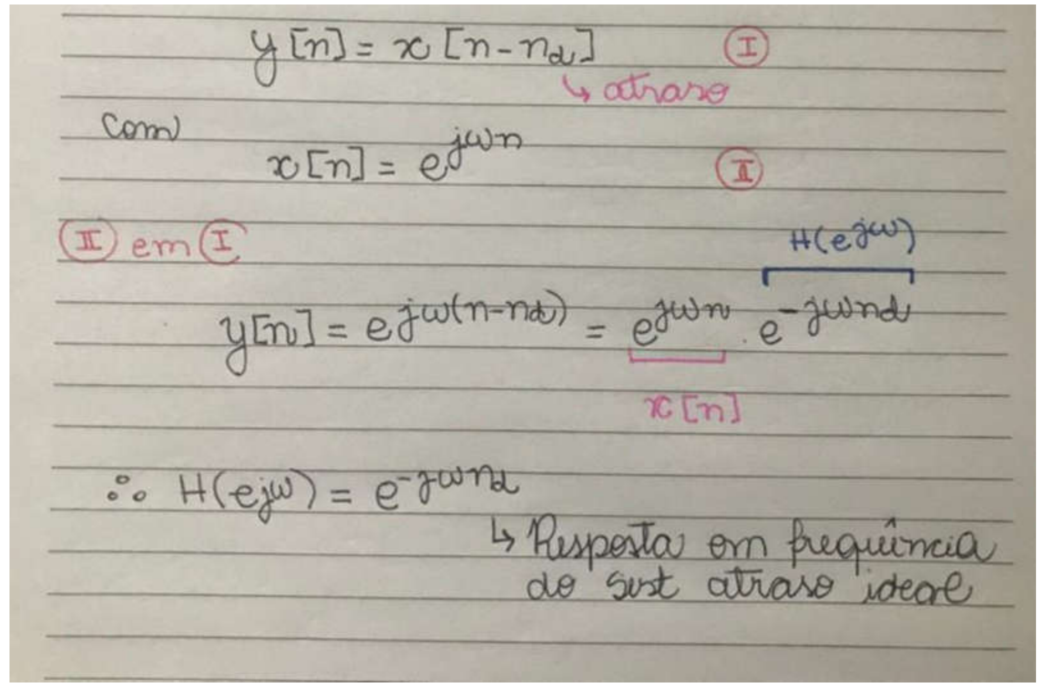
Exemplo

- Qual é a resposta em frequência do sistema atraso ideal

$$y[n] = x[n - n_d]$$

para

$$x[n] = e^{j\omega n}$$



$$y[n] = x[n - n_d] \quad \mathrm{I}$$

↳ atraso

com

$$x[n] = e^{j\omega n} \quad \mathrm{II}$$

II em I

$$y[n] = e^{j\omega(n-n_d)} = \underbrace{e^{j\omega n}}_{x[n]} \cdot \overbrace{e^{-j\omega n_d}}^{H(e^{j\omega})}$$

$$\therefore H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_d}$$

↳ Resposta em frequência do sist atraso ideal

Autofunções para sistemas lineares invariantes no tempo

- Há uma ampla classe de sinais que podem ser representados como uma combinação linear de exponenciais complexas

$$x[n] = \sum_{k} \alpha_k e^{j\omega_k n}$$

- Considerando o principio de superposição e $y[n] = H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$

$$y[n] = \sum_{k} \alpha_k H(e^{j\omega_k}) e^{j\omega_k n}$$

Autofunções para sistemas lineares invariantes no tempo

- O conceito da resposta em frequência dos sistemas LIT é essencialmente o mesmo para sistemas de tempo contínuo e tempo discreto.

- Porém, surge uma distinção importante, porque a resposta em frequência dos sistemas LIT de tempo discreto é sempre uma função periódica da variável de frequência ω com período 2π.

$$H\left(e^{j(\omega+2\pi r)}\right) = H\left(e^{j\omega}\right), \quad \text{para } r \text{ inteiro.}$$

© 2013 Pearson. Todos os direitos reservados.

Autofunções para sistemas lineares invariantes no tempo

Oppenheim • Schafer

- O conceito da resposta em frequência dos sistemas LIT é essencialmente o mesmo para sistemas de tempo contínuo e tempo discreto.

- Porém, surge uma distinção importante, porque a resposta em frequência dos sistemas LIT de tempo discreto é sempre uma função periódica da variável de frequência ω com período 2π.

$$H\left(e^{j(\omega+2\pi r)}\right) = H\left(e^{j\omega}\right), \quad \text{para } r \text{ inteiro.}$$

$$\omega = \omega + 2\pi$$

É impossível distinguir entre essas duas frequências, logo basta especificar

$$H(e^{j\omega})$$

Em um intervalo de 2π

$$0 \le \omega \le 2\pi$$
$$-\pi \le \omega \le \pi$$

© 2013 Pearson. Todos os direitos reservados.

Autofunções para sistemas lineares invariantes no tempo

- Uma classe importante de sistemas LIT inclui aqueles sistemas para os quais a resposta em frequência é unitária em uma certa faixa de frequências e é nula nas frequências restantes, correspondendo aos filtros ideais seletivos em frequência.

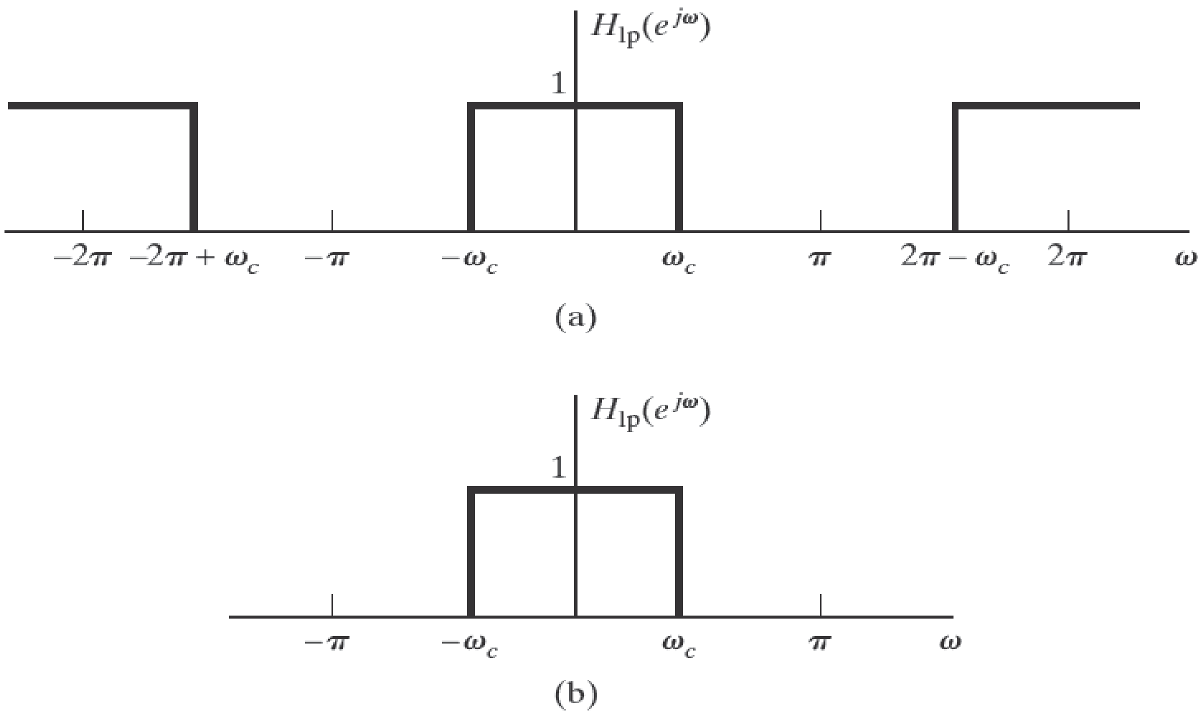
© 2013 Pearson. Todos os direitos reservados.

Autofunções para sistemas lineares invariantes no tempo

Oppenheim • Schafer

Processamento em tempo discreto de sinais

3ª edição

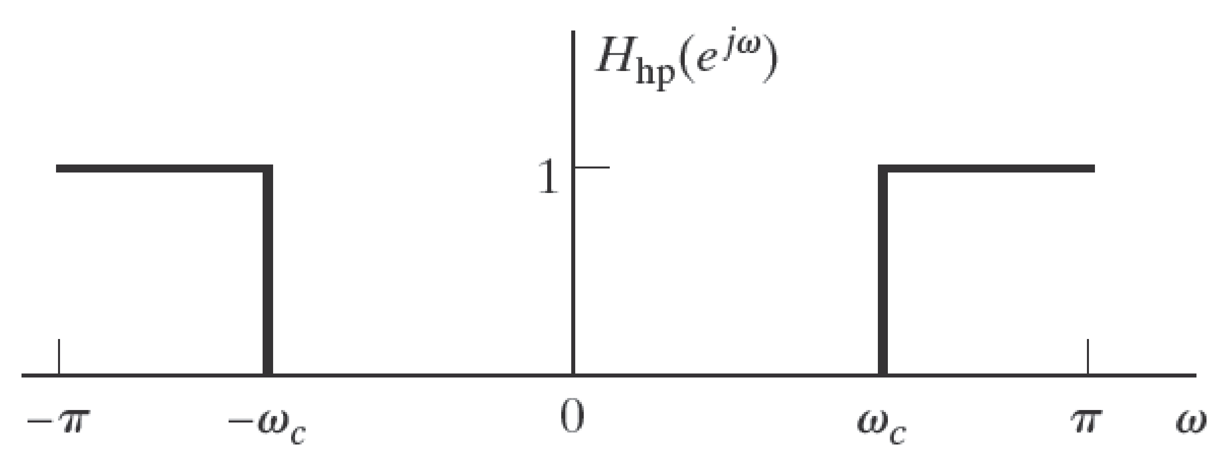


A filtro passa-baixas ideal mostrando (a) periodicidade da resposta em frequência e (b) um período da resposta em frequência periódica.

© 2013 Pearson. Todos os direitos reservados.

Autofunções para sistemas lineares invariantes no tempo

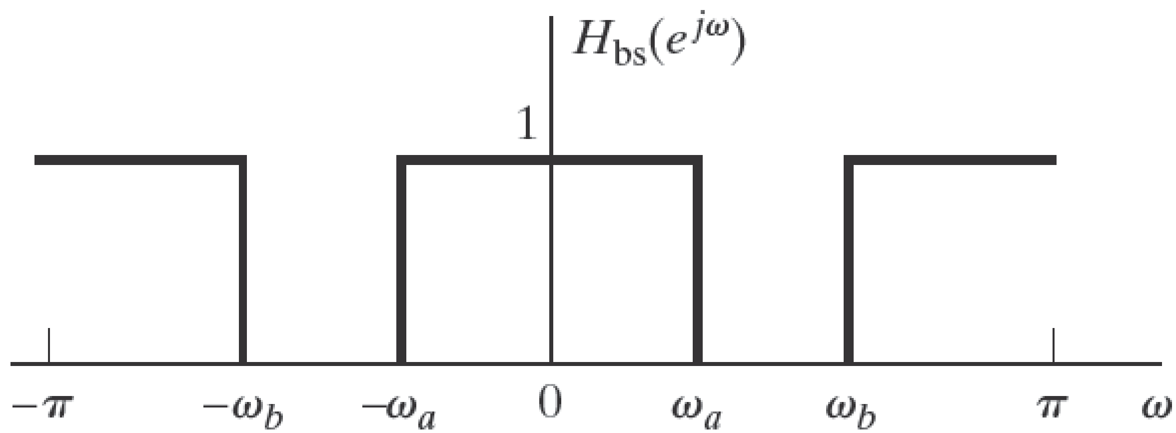
- Filtros seletivos em frequência ideais. Filtro passa-altas.



© 2013 Pearson. Todos os direitos reservados.

Autofunções para sistemas lineares invariantes no tempo

- Filtros seletivos em frequência ideais. Filtro rejeita-faixa.

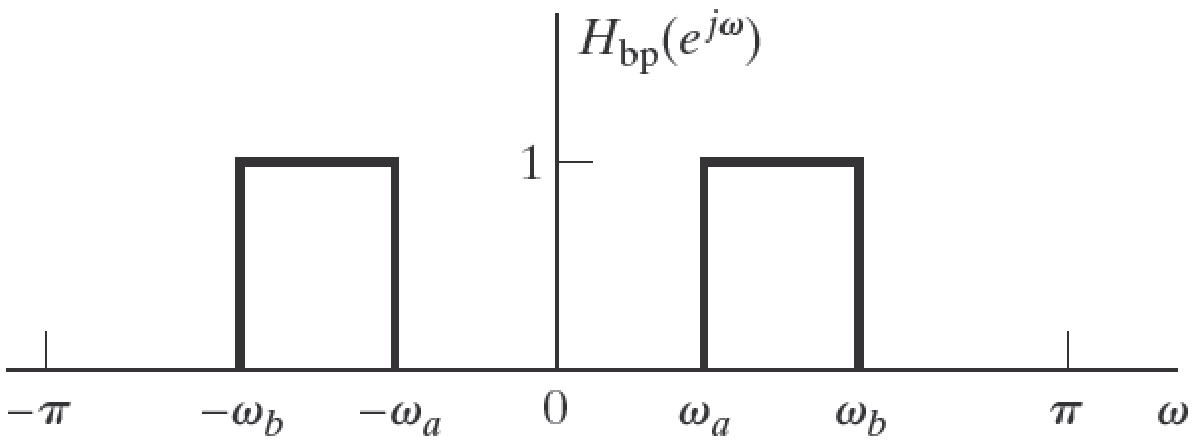


© 2013 Pearson. Todos os direitos reservados.

Autofunções para sistemas lineares invariantes no tempo

Oppenheim • Schafer
Processamento em tempo discreto de sinais
3ª edição

- Filtros seletivos em frequência ideais. Filtro passa-banda.



© 2013 Pearson. Todos os direitos reservados.

Autofunções para sistemas lineares invariantes no tempo

- Há uma ampla classe de sinais que podem ser representados como uma combinação linear de exponenciais complexas

$$x[n] = \sum_{k} \alpha_k e^{j\omega_k n}$$

Como fazemos isso para x[n] qualquer?

- Considerando o principio de superposição e $y[n] = H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$

$$y[n] = \sum_{k} \alpha_k H(e^{j\omega_k}) e^{j\omega_k n}$$

Representação de sequências por transformadas de Fourier

- Muitas sequências podem ser representadas por uma integral de Fourier na forma

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}\,d\omega$$

- em que $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$

© 2013 Pearson. Todos os direitos reservados.

Representação de sequências por transformadas de Fourier

Oppenheim • Schafer
Processamento em tempo discreto de sinais
3ª edição

- Muitas sequências podem ser representadas por uma integral de Fourier na forma

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}\,d\omega$$

- em que $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$

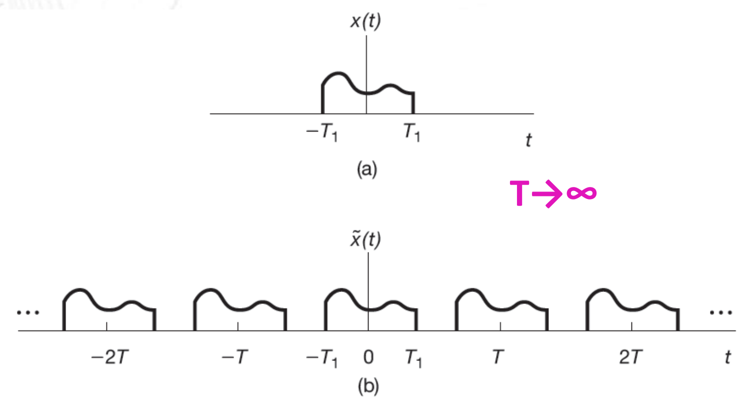
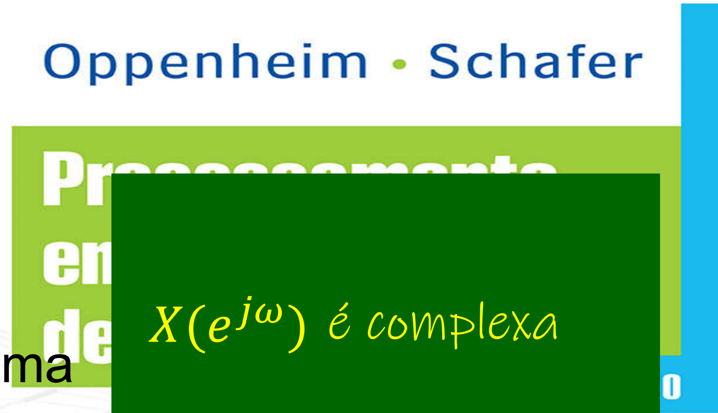


Figura 4.3 (a) Sinal aperiódico $x(t)$; (b) sinal periódico $\tilde{x}(t)$, construído para ser igual a $x(t)$ em um período.

© 2013 Pearson. Todos os direitos reservados.

Representação de sequências por transformadas de Fourier



$X(e^{j\omega})$ é complexa

- Muitas sequências podem ser representadas por uma integral de Fourier na forma

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}\,d\omega$$ SÍNTESE

- em que

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$ ANÁLISE

© 2013 Pearson. Todos os direitos reservados.

Representação de sequências por transformadas de Fourier

Oppenheim · Schafer

- Assim como ocorre com a resposta em frequência, podemos expressar $X(e^{j\omega})$ na **forma retangular**, como

$$X(e^{j\omega}) = X_R\,(e^{j\omega}) + jX_I\,(e^{j\omega})$$

- ou na **forma polar**, como

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|e^{j\,\angle\, X(e^{j\omega})}$$

$X(e^{j\omega})$ é complexa

© 2013 Pearson. Todos os direitos reservados.

Representação de sequências por transformadas de Fourier

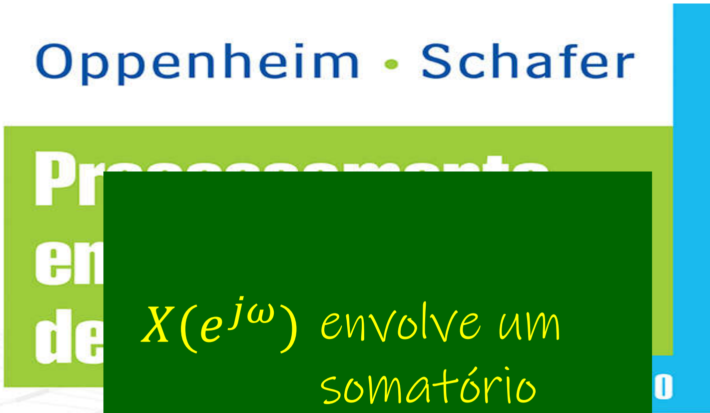
- A resposta ao impulso pode ser obtida a partir da resposta em frequência aplicando a integral da transformada de Fourier inversa; isto é,

$$h[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})e^{j\omega n}\,d\omega$$

Quais sinais admitem TF?

© 2013 Pearson. Todos os direitos reservados.

Representação de sequências por transformadas de Fourier



$X(e^{j\omega})$ envolve um somatório infinito

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

- A resposta ao impulso pode ser obtida a partir da resposta em frequência aplicando a integral da transformada de Fourier inversa; isto é,

$$h[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})e^{j\omega n}\,d\omega$$

Quais sinais admitem TF?

© 2013 Pearson. Todos os direitos reservados.

Representação de sequências por transformadas de Fourier

Oppenheim • Schafer

- A resposta ao impulso pode ser obtida a partir da resposta em frequência aplicando a integral da transformada de Fourier inversa; isto é,

$$h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n}\, d\omega$$

- A somabilidade em valor absoluto é uma condição suficiente para a existência de uma representação por transformada de Fourier.

$X(e^{j\omega})$ envolve um somatório infinito

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

$$|X(e^{j\omega})| < \infty$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$$

© 2013 Pearson. Todos os direitos reservados.

Representação de sequências por transformadas de Fourier

Oppenheim • Schafer

- A resposta ao impulso pode ser obtida a partir da resposta em frequência aplicando a integral da transformada de Fourier inversa; isto é,

$$h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} \, d\omega$$

- A somabilidade em valor absoluto é uma condição suficiente para a existência de uma representação por transformada de Fourier.

Todas as sequencias estáveis tem TF

$X(e^{j\omega})$ envolve um somatório infinito

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

$$|X(e^{j\omega})| < \infty$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$$

© 2013 Pearson. Todos os direitos reservados.

Exemplo

- Somabilidade em valor absoluto para uma exponencial abruptamente aplicada

$$x[n] = a^n u[n]$$

$x[n] = a^n u[n]$ $\quad$ $TF\{x[n]\}$?

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\omega n}$$

$$u[n] = \begin{cases} 0, & n<0 \\ 1, & n \geq 0 \end{cases}$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n]\, e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (a e^{-j\omega})^n$$

Como somar ?

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a|^n = \frac{1}{1-|a|}$$

se $|a| < 1$

Logo

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - a e^{-j\omega}}$$

e

$$|a e^{-j\omega}| < 1$$

$$|a| \underbrace{|e^{-j\omega}|}_{1} < 1$$

$$|a| < 1$$

$$\therefore \; X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - a e^{-j\omega}} \quad \text{com } |a| < 1$$

condição de existência da TF

Também garante convergência uniforme

Somabilidade em valor absoluto para uma exponencial abruptamente aplicada

- A somabilidade em valor absoluto é uma condição *suficiente* para a existência de uma representação por transformada de Fourier, e também garante a convergência uniforme.

- Algumas sequências não são somáveis em valor absoluto, mas são quadraticamente somáveis,ou seja,

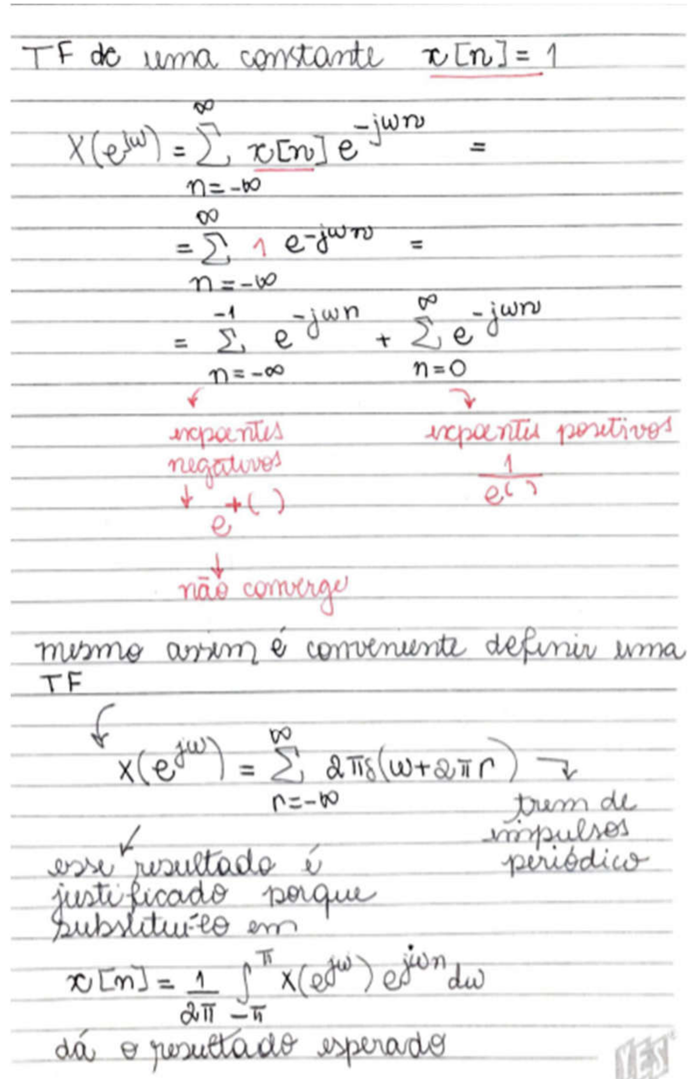
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty$$

© 2013 Pearson. Todos os direitos reservados.

Exemplo

- TF de uma constante

  $x[n] = 1$



TF de uma constante $x[n] = 1$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\omega n} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} 1\, e^{-j\omega n} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{-1} e^{-j\omega n} + \sum_{n=0}^{\infty} e^{-j\omega n}$$

expoentes negativos

$e^{+(\ )}$

não converge

expoentes positivos

$\frac{1}{e^{(\ )}}$

mesmo assim é conveniente definir uma TF

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega + 2\pi r)$$

trem de impulsos periódico

esse resultado é justificado porque substituí-lo em

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\, e^{j\omega n}\, d\omega$$

dá o resultado esperado

Propriedades de simetria da transformada de Fourier

Parte Real e Parte Imaginária

$$x[n] = \boxed{x_R[n]} + j\boxed{x_I[n]}$$

Re{x[n]} Im{x[n]}

Como obter cada uma dessas partes em uma sequência ?

$$x^*[n] = x_R[n] - jx_I[n]$$

É o complexo conjugado

$$x^*[n] = x_R[n] - jx_I[n]$$

\+ −

$$x[n] = x_R[n] + jx_I[n]$$

Propriedades de simetria da transformada de Fourier

Parte Real e Parte Imaginária

$$x_R[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x^*[n])$$

$$x_I[n] = \frac{1}{2j}(x[n] - x^*[n])$$

Parte real **real(x)**
Parte imaginária **imag(x)**

Propriedades de simetria da transformada de Fourier

- Qualquer sequência $x[n]$ pode ser expressa como a soma de uma sequência simétrica conjugada e de uma sequência antissimétrica conjugada. Especificamente,

$$x[n] = x_e[n] + x_o[n]$$

Simétrica conjugada

$$x_e\,[n] = x_e^* x[-n]$$

Antissimétrica conjugada

$$x_o\,[n] = -x_o^* x[-n]$$

© 2013 Pearson. Todos os direitos reservados.

Propriedades de simetria da transformada de Fourier

- Qualquer sequência $x[n]$ pode ser expressa como a soma de uma sequência simétrica conjugada e de uma sequência antissimétrica conjugada. Especificamente,

$$x[n] = x_e[n] + x_o[n]$$

Par $x[n] = x[-n]$

Ímpar $x[n] = -x[-n]$

Exemplo

$x[n]=n^2$ é par,
pois $x[-n]= (-n)^2 = n^2 = x[n]$

$x[n]=n^3$ é impar,
pois $x[-n]= (-n)^3 = -n^3 = -x[n]$

© 2013 Pearson. Todos os direitos reservados.

Propriedades de simetria da transformada de Fourier

Oppenheim • Schafer

Processamento em tempo discreto de sinais

3ª edição

- Qualquer sequência $x[n]$ pode ser expressa como a soma de uma sequência simétrica conjugada e de uma sequência antissimétrica conjugada. Especificamente,

$$x[n] = x_e[n] + x_o[n]$$

- sendo

$$x_e[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x^*[-n]) = x_e^*[-n]$$

- e

$$x_o[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x^*[-n]) = -x_o^*[-n]$$

© 2013 Pearson. Todos os direitos reservados.

Propriedades de simetria da transformada de Fourier

Oppenheim • Schafer

- Qualquer sequência *x*[*n*] pode ser expressa como a soma de uma sequência simétrica conjugada e de uma sequência antissimétrica conjugada. Especificamente,

$$x[n] = x_e[n] + x_o[n]$$

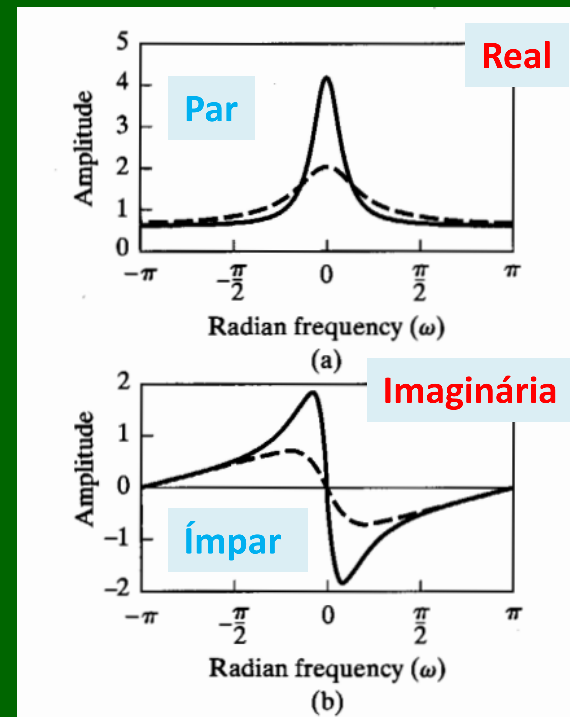
- sendo

$$x_e[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x^*[-n]) = x_e^*[-n]$$

- e

$$x_o[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x^*[-n]) = -x_o^*[-n]$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \quad \text{if } |a| < 1.$$



© 2013 Pearson. Todos os direitos reservados.

Propriedades de simetria da transformada de Fourier

Sequencias reais

$$x[n] = x_e[n] + x_o[n] \qquad x[-n] = \underbrace{x_e[-n]}_{\text{Par}} + \underbrace{x_o[-n]}_{\text{Ímpar}}$$

Par $x[n] = x[-n]$

Ímpar $x[n] = -x[-n]$

$$\Downarrow$$

$$x[-n] = x_e[n] - x_o[n]$$

Propriedades de simetria da transformada de Fourier

$$x[n] = x_e[n] + x_o[n]$$

$$+$$

$$x[-n] = x_e[n] - x_o[n]$$

$$x_e[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x[-n])$$

$$x[n] = x_e[n] + x_o[n]$$

$$-$$

$$x[-n] = x_e[n] - x_o[n]$$

$$x_o[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x[-n])$$

Propriedades de simetria da transformada de Fourier

Oppenheim • Schafer

Processamento em tempo discreto de sinais

3ª edição

- Qualquer sequência $x[n]$ pode ser expressa como a soma de uma sequência simétrica conjugada e de uma sequência antissimétrica conjugada. Especificamente,
$$x[n] = x_e[n] + x_o[n]$$
- sendo
$$x_e[n] = \tfrac{1}{2}(x[n] + x^*[-n]) = x_e^*[-n]$$
- e
$$x_o[n] = \tfrac{1}{2}(x[n] - x^*[-n]) = -x_o^*[-n]$$

$$x_e[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x[-n])$$

$$x_o[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x[-n])$$

© 2013 Pearson. Todos os direitos reservados.

Propriedades de simetria da transformada de Fourier

Oppenheim • Schafer
Processamento em tempo discreto de sinais
3ª edição

- Uma transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$ pode ser decomposta em uma soma de uma função simétrica conjugada e uma função antissimétrica conjugada como

$$X(e^{j\omega}) = X_e(e^{j\omega}) + X_o(e^{j\omega})$$

- em que $X_e(e^{j\omega}) = ½\,[X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})]$

- e $X_o(e^{j\omega}) = ½\,[X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega})]$

© 2013 Pearson. Todos os direitos reservados.

Exemplo

- Decomponha a sequencia **x[n]=n+1** em suas partes impar e par

Par

$$x_e[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x[-n])$$

$$x_e[n] = \frac{1}{2}(n + 1 + (-n) + 1) = \frac{1}{2}(1 + 1) = 1$$

Ímpar

$$x_o[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x[-n])$$

$$x_o[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x[-n]) = \frac{1}{2}(n + 1 - (-n + 1)) =$$

$$= \frac{1}{2}(n + 1 + n - 1) = \frac{1}{2}(2n) = n$$

Propriedades de simetria da transformada de Fourier

Oppenheim · Schafer
Processamento em tempo discreto de sinais
3ª edição

Sequência $x[n]$	Transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$
1. $x^*[n]$	$X^*(e^{-j\omega})$
2. $x^*[-n]$	$X^*(e^{j\omega})$
3. $\mathcal{R}e\{x[n]\}$	$X_e(e^{j\omega})$ (componente simétrica conjugada de $X(e^{j\omega})$)
4. $j\,\mathcal{I}m\{x[n]\}$	$X_o(e^{j\omega})$ (componente antissimétrica conjugada de $X(e^{j\omega})$)
5. $x_e[n]$ (componente simétrica conjugada de $x[n]$)	$X_R(e^{j\omega}) = \mathcal{R}e\{X(e^{j\omega})\}$
6. $x_o[n]$ (componente antissimétrica conjugada de $x[n]$)	$jX_I(e^{j\omega}) = j\,\mathcal{I}m\{X(e^{j\omega})\}$
As propriedades a seguir se aplicam somente quando $x[n]$ é real:	
7. Qualquer $x[n]$ real	$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$ (a transformada de Fourier é simétrica conjugada)
8. Qualquer $x[n]$ real	$X_R(e^{j\omega}) = X_R(e^{-j\omega})$ (a parte real é par)
9. Qualquer $x[n]$ real	$X_I(e^{j\omega}) = -X_I(e^{-j\omega})$ (a parte imaginária é ímpar)
10. Qualquer $x[n]$ real	$\lvert X(e^{j\omega})\rvert = \lvert X(e^{-j\omega})\rvert$ (a magnitude é par)
11. Qualquer $x[n]$ real	$\angle X(e^{j\omega}) = -\angle X(e^{-j\omega})$ (a fase é ímpar)
12. $x_e[n]$ (componente par de $x[n]$)	$X_R(e^{j\omega})$
13. $x_o[n]$ (componente ímpar de $x[n]$)	$jX_I(e^{j\omega})$

© 2013 Pearson. Todos os direitos reservados.

Exemplo

- Decompor

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}, |a| < 1$$

Em parte real e parte imaginária

Exemplo

- Dec

$X(e^{j}$

Em pa

imagir

	Sequência $x[n]$	Transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$
1.	$x^*[n]$	$X^*(e^{-j\omega})$
2.	$x^*[-n]$	$X^*(e^{j\omega})$
3.	$\mathcal{R}e\{x[n]\}$	$X_e(e^{j\omega})$ (componente simétrica conjugada de $X(e^{j\omega})$)
4.	$j\,\mathcal{I}m\{x[n]\}$	$X_o(e^{j\omega})$ (componente antissimétrica conjugada de $X(e^{j\omega})$)
5.	$x_e[n]$ (componente simétrica conjugada de $x[n]$)	$X_R(e^{j\omega}) = \mathcal{R}e\{X(e^{j\omega})\}$
6.	$x_o[n]$ (componente antissimétrica conjugada de $x[n]$)	$jX_I(e^{j\omega}) = j\,\mathcal{I}m\{X(e^{j\omega})\}$
	As propriedades a seguir se aplicam somente quando $x[n]$ é real:	
7.	Qualquer $x[n]$ real	$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$ (a transformada de Fourier é simétrica conjugada)
8.	Qualquer $x[n]$ real	$X_R(e^{j\omega}) = X_R(e^{-j\omega})$ (a parte real é par)
9.	Qualquer $x[n]$ real	$X_I(e^{j\omega}) = -X_I(e^{-j\omega})$ (a parte imaginária é ímpar)
10.	Qualquer $x[n]$ real	$\lvert X(e^{j\omega})\rvert = \lvert X(e^{-j\omega})\rvert$ (a magnitude é par)
11.	Qualquer $x[n]$ real	$\angle X(e^{j\omega}) = -\angle X(e^{-j\omega})$ (a fase é ímpar)
12.	$x_e[n]$ (componente par de $x[n]$)	$X_R(e^{j\omega})$
13.	$x_o[n]$ (componente ímpar de $x[n]$)	$jX_I(e^{j\omega})$

Exemplo

- Decompor

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}, |a| < 1$$

Ímpar

$$\boxed{X_o(e^{j\omega}) = ½\,[X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega})]}$$

Em parte real e parte imaginária

Par

$$\boxed{X_e(e^{j\omega}) = ½\,[X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})]}$$

Exemplo

- Decompor

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}, |a| < 1$$

Em parte real e parte imaginária

Decompor $X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}, |a|<1$ em

parte real e parte imaginária

par ímpar

$$X_e(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}\left[X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})\right]$$

trocar o sinal

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} \qquad X^*(e^{-j\omega}) = \frac{1}{1-ae^{j\omega}}$$

$$X_R(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-ae^{-j\omega}} + \frac{1}{1-ae^{j\omega}}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1-ae^{j\omega}+1-ae^{-j\omega}}{(1-ae^{-j\omega})(1-ae^{j\omega})}\right] =$$

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2-ae^{j\omega}-ae^{-j\omega}}{1-ae^{j\omega}-ae^{-j\omega}+a^2e^{-j\omega}e^{j\omega}}\right] =$$

$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2-a(\cos\omega+i\,\text{sen}\,\omega)-a(\cos\omega-i\,\text{sen}\,\omega)}{1-a(\cos\omega+i\,\text{sen}\,\omega)-a(\cos(\omega)-i\,\text{sen}\,\omega)+a^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2-a\cos\omega-\cancel{ia\,\text{sen}\,\omega}-a\cos\omega+\cancel{ia\,\text{sen}\,\omega}}{1-a\cos\omega-\cancel{ia\,\text{sen}\,\omega}-a\cos\omega+\cancel{ia\,\text{sen}\,\omega}+a^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2-2a\cos\omega}{1+a^2-2a\cos\omega}\right] = X_R(e^{j\omega}) \quad //$$

Exemplo

- Decompor

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}, |a| < 1$$

Em parte real e parte imaginária

$$X_I = \frac{1}{2}\left[X(e^{jw}) - X^*(e^{-jw})\right]$$

$$X_I(e^{jw}) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-ae^{-jw}} - \frac{1}{1-ae^{jw}}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\cancel{1} - ae^{jw} - \cancel{1} + ae^{-jw}}{1 + a^2 - 2a\cos w}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[-a(\cos w + i\,\mathrm{sen}\,w) + a(\cos w - i\,\mathrm{sen}\,w)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-a\cancel{\cos w} - a\,i\,\mathrm{sen}\,w + a\cancel{\cos w} - a\,i\,\mathrm{sen}\,w\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[-2a\,i\,\mathrm{sen}\,w\right] =$$

$$= \left[\frac{-ia\,\mathrm{sen}\,w}{1 + a^2 - 2a\cos w}\right] = X_I(e^{jw})$$

Teoremas da transformada de Fourier

Oppenheim • Schafer

Processamento em tempo discreto de sinais

3ª edição

Sequência $x[n]$ $y[n]$	Transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$ $Y(e^{j\omega})$	
1. $ax[n] + by[n]$	$aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega})$	Linearidade
2. $x[n - n_d]$ (n_d um inteiro)	$e^{-j\omega n_d} X(e^{j\omega})$	Deslocamento no tempo
3. $e^{j\omega_0 n} x[n]$	$X(e^{j(\omega-\omega_0)})$	Deslocamento em frequência
4. $x[-n]$	$X(e^{-j\omega})$ $X^*(e^{j\omega})$ se $x[n]$ real.	Inversor no tempo
5. $nx[n]$	$j\dfrac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$	Diferenciação em frequência
6. $x[n] * y[n]$	$X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$	Teorema da Convolução
7. $x[n]y[n]$	$\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$	Teorema da modulação (janelamento)

Teorema de Parseval:

8. $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$ **Densidade de Energia do Espectro**

9. $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})d\omega$

© 2013 Pearson. Todos os direitos reservados.

Teoremas da transformada de Fourier

Sequência	Transformada de Fourier
1. $\delta[n]$	1
2. $\delta[n-n_0]$	$e^{-j\omega n_0}$
3. $1 \quad (-\infty < n < \infty)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega+2\pi k)$
4. $a^n u[n] \quad (\lvert a\rvert < 1)$	$\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$
5. $u[n]$	$\frac{1}{1-e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega+2\pi k)$
6. $(n+1)a^n u[n] \quad (\lvert a\rvert < 1)$	$\frac{1}{(1-ae^{-j\omega})^2}$
7. $\frac{r^n \operatorname{sen} \omega_p(n+1)}{\operatorname{sen} \omega_p} u[n] \quad (\lvert r\rvert < 1)$	$\frac{1}{1-2r\cos\omega_p e^{-j\omega} + r^2 e^{-j2\omega}}$
8. $\frac{\operatorname{sen} \omega_c n}{\pi n}$	$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \lvert\omega\rvert < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < \lvert\omega\rvert \le \pi \end{cases}$
9. $x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le M \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$	$\frac{\operatorname{sen}[\omega(M+1)/2]}{\operatorname{sen}(\omega/2)} e^{-j\omega M/2}$
10. $e^{j\omega_0 n}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega-\omega_0+2\pi k)$
11. $\cos(\omega_0 n+\phi)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} [\pi e^{j\phi}\delta(\omega-\omega_0+2\pi k) + \pi e^{-j\phi}\delta(\omega+\omega_0+2\pi k)]$

Oppenheim • Schafer

Processamento em tempo discreto de sinais

3ª edição

Pares transformados de Fourier.

© 2013 Pearson. Todos os direitos reservados.

Teoremas da transformada de Fourier

Sequência	Transformada de Fourier
1. $\delta[n]$	1
2. $\delta[n-n_0]$	$e^{-j\omega n_0}$
3. $1 \quad (-\infty < n < \infty)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega+2\pi k)$
4. $a^n u[n] \quad (\|a\| < 1)$	$\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$
5. $u[n]$	$\frac{1}{1-e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega+2\pi k)$
6. $(n+1)a^n u[n] \quad (\|a\| < 1)$	$\frac{1}{(1-ae^{-j\omega})^2}$
7. $\frac{r^n \operatorname{sen} \omega_p(n+1)}{\operatorname{sen} \omega_p} u[n] \quad (\|r\| < 1)$	$\frac{1}{1-2r\cos\omega_p e^{-j\omega} + r^2 e^{-j2\omega}}$
8. $\frac{\operatorname{sen} \omega_c n}{\pi n}$	$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \|\omega\| < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < \|\omega\| \leq \pi \end{cases}$
9. $x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$	$\frac{\operatorname{sen}[\omega(M+1)/2]}{\operatorname{sen}(\omega/2)} e^{-j\omega M/2}$
10. $e^{j\omega_0 n}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega-\omega_0+2\pi k)$
11. $\cos(\omega_0 n + \phi)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} [\pi e^{j\phi}\delta(\omega-\omega_0+2\pi k) + \pi e^{-j\phi}\delta(\omega+\omega_0+2\pi k)]$

Pares transformados de Fourier.

Oppenheim • Schafer

Definição da Transformada de Fourier.

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}\, d\omega$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

+

Teoremas da transformada de Fourier.

© 2013 Pearson. Todos os direitos reservados.

Exemplo

- Calcule a TF de δ[n]

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$ ANÁLISE

$$F\{x[n]\} = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta[n] e^{-j\omega n} = 1 e^{-j\omega 0} = 1$$

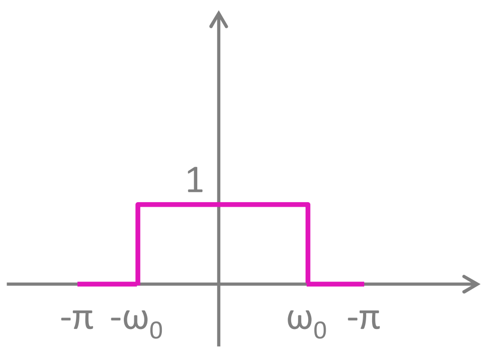
δ[n]=1 para n=0

Resultado importante: a TF do impulso é uma constante (amplitude do impulso). Como é possivel decompor sinais em um somatório de impulsos esse resultado é bastante útil

Exemplo

- Seja a representação em frequencia de uma sequencia x[n] dada por

$$H(\omega) = \begin{cases} 1, & se \ |\omega| < \omega_0 \\ 0, & se \ \omega_0 < |\omega| < \pi \end{cases}$$



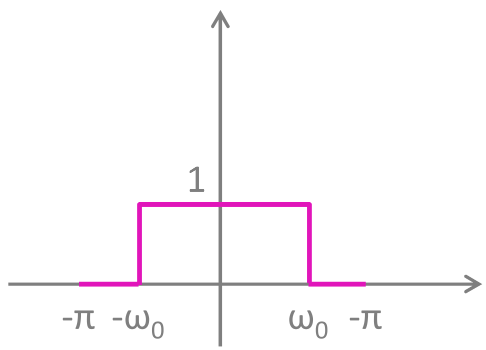
obtenha x[n]

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$ SÍNTESE

Exemplo

- Seja a representação em frequencia de uma sequencia x[n] dada por

$$H(\omega) = \begin{cases} 1, & se \ |\omega| < \omega_0 \\ 0, & se \ \omega_0 < |\omega| < \pi \end{cases}$$



obtenha x[n]

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(\omega) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0}^{\omega_0} 1 e^{j\omega n} d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{jn} e^{j\omega n}\Big|_{-\omega_0}^{-\omega_0} = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{jn}\left(e^{j\omega_0 n} - e^{-j\omega_0 n}\right) = \frac{sen\omega_0 n}{\pi n}$$

RESUMO

- Representação domínio de origem

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

- Representação domínio transformado

$$x[n] = \sum_{k} \alpha_k e^{j\omega_k n}$$

$$y[n] = \sum_{k} \alpha_k H(e^{j\omega_k}) e^{j\omega_k n}$$