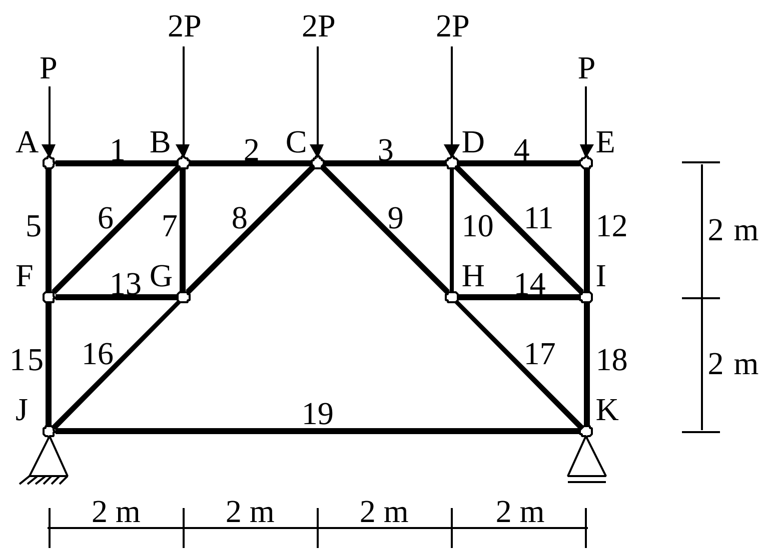
Treliças

2ª QUESTÃO - 2ª PROVA DE 1995 - (3,0)

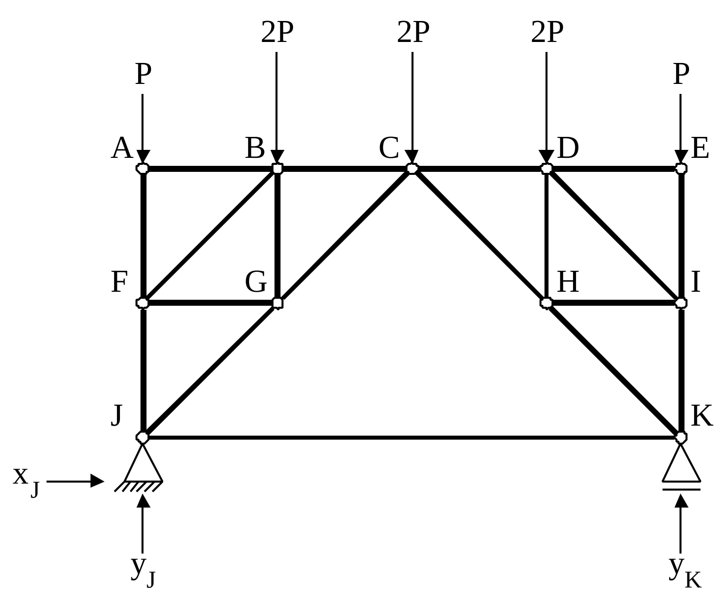
Considere-se a treliça da figura abaixo. Sabe-se que para que ela trabalhe com segurança, as forças de compressão em suas barras não podem ser superiores a 20 kN e as forças de tração superiores a 30 kN.

Que valores de P tornam esta treliça insegura?



Resolução:

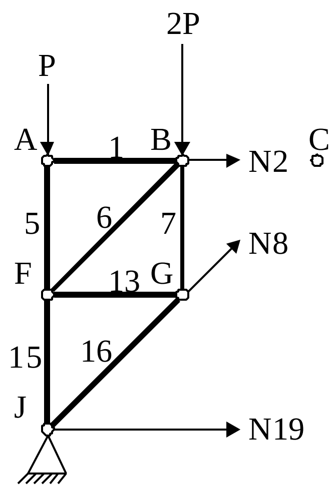
Reações de apoio:



åFx = 0 ==> x_J = 0
*åFy = 0 ==> y_J + y_K - 8*P = 0*
*(åM)$_A$ = 0 ==> 2*P*2 + 2*P*4 + 2*P*6 + P*8 - y_K*8 = 0 ==> y_K = 4P*
y_J = 4P

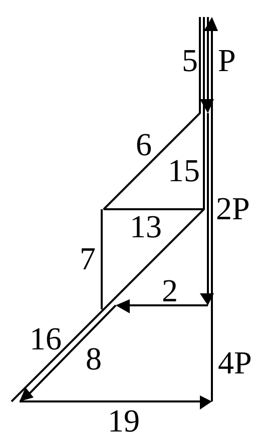
Como a estrutura é geometricamente simétrica e como os esforços externos de ação e reação também são simétricos, as forças normais em suas barras são simétricas. Desta forma basta resolver metade da treliça.

Através de Ritter, cortamos as barras 2, 8 e 19:



åFx = 0 ==> N2 + N8$\sqrt{2}$/2 + N19 = 0*
åFy = 0 ==> N8$\sqrt{2}$/2 + 4*P - P - 2*P = 0 ==> N8 = N9 = - P*$\sqrt{2}$*
*(åM)$_C$ = 0 ==> 4*P*4 - P*4 - 2*P*2 - N19*4 = 0 ==> N19 = 2P*
N2 = N3 = - P

Aplicando-se Cremona:



N1 = N4 = 0 *N5 = N12 = - P*
N6 = N11 = - P$\sqrt{2}$* *N7 = N10 = - P*

N13 = N14 = P *N15 = N18 = - 2*P*

*N16 = N17 = - 2*P**$\sqrt{2}$

A máxima compressão ocorre nas barras 16 e 17. Estas barras se rompem quando:

$$2*P*\sqrt{2} = 20\ kN$$
$$P = 5*\sqrt{2}\ kN$$

A máxima tração ocorre na barra 19. Esta barra se rompe quando:

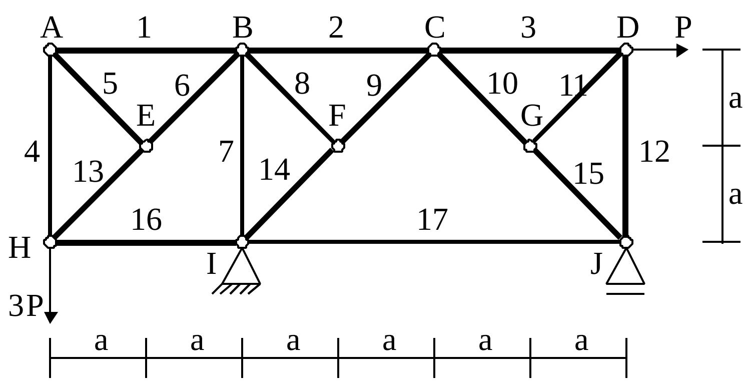
$$2*P = 30\ kN$$
$$P = 15\ kN$$

*Portanto, os valores de P que tornam a treliça insegura são os valores acima de 5**$\sqrt{2}$ *kN.*

1ª QUESTÃO - 2ª PROVA DE 1994 - (3,5)

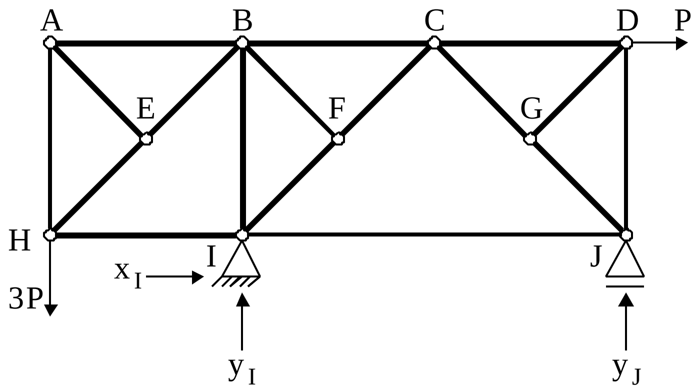
a) Determinar as forças normais nas barras da treliça da figura.

b) Sabendo que as barras desta treliça se rompem para forças de compressão de 100 kN e para forças de tração de 200 kN, determinar o valor de P que leva esta treliça à ruptura.



Resolução:

a) *Reações de apoio:*



$\sum Fx = 0 ==> x_I + P = 0 ==> x_I = - P$

$\sum Fy = 0 ==> y_I + y_J - 3*P = 0 ==> y_I = 4*P$

$(\sum M)_I = 0 ==> 3*P*2*a - P*2*a + y_J*4*a = 0 ==> \quad y_J = - P$

Para resolução da treliça, utilizaremos o método do equilíbrio dos nós:

- Nó E: $N_5 = 0$
  $N_6 = N_{13}$

- Nó F: $N_8 = 0$
  $N_9 = N_{14}$

- Nó G: $N_{11} = 0$
  $N_{10} = N_{15}$

- Nó A: $N_1 = 0$
  $N_4 = 0$

- Nó D: $N_3 = P$
  $N_{12} = 0$

- Nó H: $N_{13}*\sqrt{2}/2 = 3*P ==> \quad N_{13} = 3\sqrt{2}P$
  $N_6 = N_{13} = 3\sqrt{2}P$
  $N_{13}*\sqrt{2}/2 + N_{16} = 0 ==> N_{16} = - 3P$

- Nó B: $- 3*\sqrt{2}*P*\sqrt{2}/2 + N_2 = 0 ==> \quad N_2 = 3P$
  $3*\sqrt{2}*P*\sqrt{2}/2 + N_7 = 0 ==> \quad N_7 = - 3P$

- Nó I: $4*P - 3*P + N_{14}*\sqrt{2}/2 = 0 ==> \quad N_{14} = - \sqrt{2}P$
  $N_9 = N_{14} = - \sqrt{2}P$
  $3*P + N_{14}*\sqrt{2}/2 - P + N_{17} = 0 ==> N_{17} = - P$
- Nó J: $- N_{15}*\sqrt{2}/2 + P = 0 ==> \quad N_{15} = P\sqrt{2}$

$$N_{10} = N_{15} = P\sqrt{2}$$

b) *As barras mais comprimidas são as barras 7 e 16, com uma força de compressão 3P. Estas barras se rompem quando:*

$$3*P = 100\ kN$$
$$P = 33{,}33\ kN$$

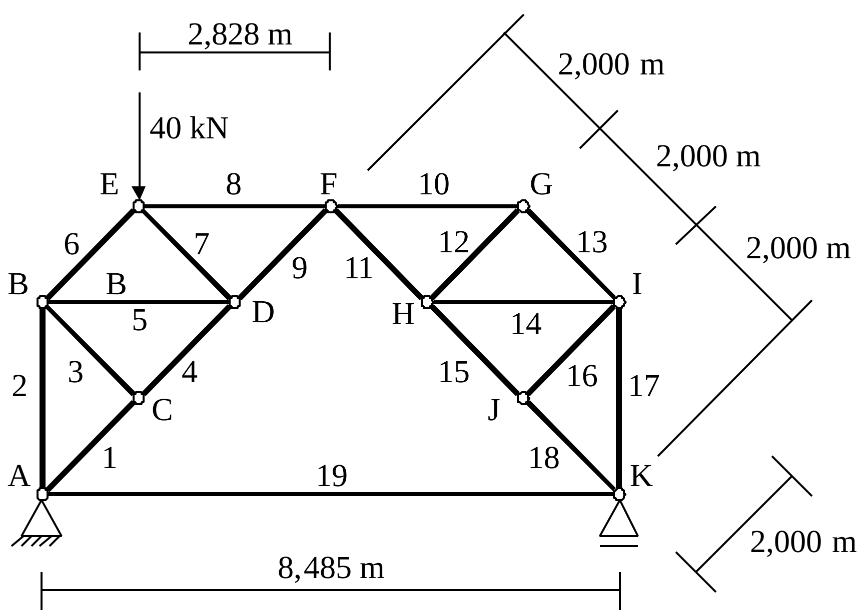
As barras mais tracionadas são as barras 6 e 13, com uma força de tração $3*\sqrt{2}*P$. Estas barras se rompem quando:

$$3*\sqrt{2}*P = 200\ kN$$
$$P = 47{,}14\ kN$$

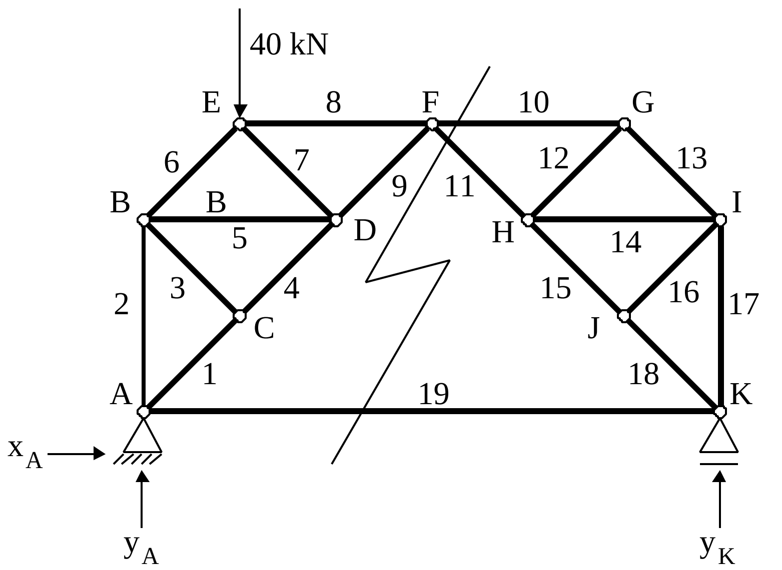
Portanto a treliça se rompe para P = 33,33 kN.

2ª QUESTÃO - 2ª PROVA DE 1993 - (3,5)

Determinar as forças nas barras 1 a 9.



Resolução:



Reações de apoio:

$\Sigma Fx = 0$ ==> $x_A = 0$

$\Sigma Fy = 0$ ==> $y_A + y_K - 40 = 0$

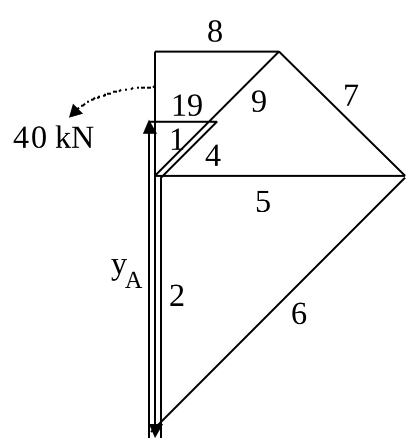
$(\Sigma M)_A = 0$ ==> $y_K*8{,}485 - 40*1{,}415 = 0$ ==> $y_K = 6{,}67\ kN$

$y_A = 33{,}33\ kN$

Determinação de F_{19} por Ritter (corte indicado):

$(\Sigma M)_F = 0$ ==> $y_A*4{,}243 - 40*2{,}828 - F_{19}*4{,}243 = 0$ ==> $F_{19} = 6{,}67\ kN$ *(tração)*

Determinação das forças nas barras por Cremona:

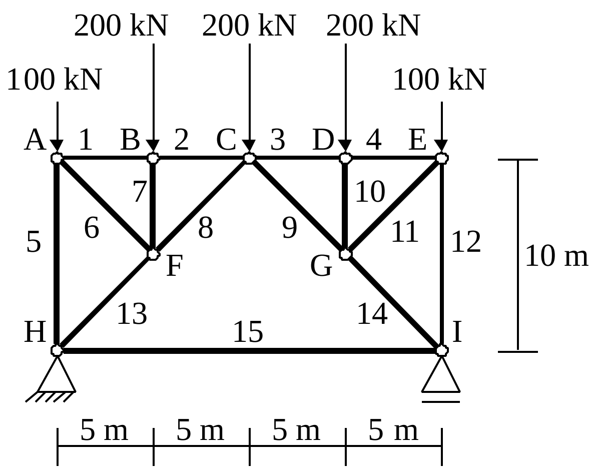


$F_1 = - 9{,}43\ kN$ $F_4 = - 9{,}43\ kN$ $F_7 = - 18{,}51\ kN$

F_2 = - 26,66 kN *F_5 = 26,66 kN* *F_8 = - 13,09 kN*
F_3 = 0 *F_6 = - 37,71 kN* *F_9 = 9,43 kN*

2ª QUESTÃO - 2ª PROVA DE 1992 - (5,0)

a)Determinar as forças normais que atuam nas barras da treliça da figura abaixo. Resolver utilizando apenas os métodos de Ritter e de Cremona.

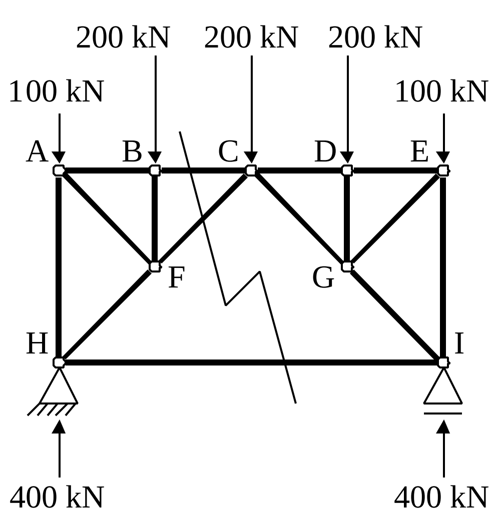


Resolução:

Como a estrutura é geometricamente simétrica e como os esforços externos - ativos e reativos - que nela atuam também são simétricos, as forças normais em suas barras são simétricas. Por esta razão, basta resolver metade da treliça.

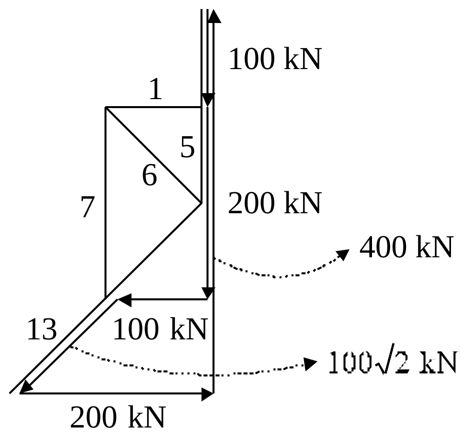
A treliça é do tipo composta, formada por duas treliças simples ligadas por um nó comum (nó C) e por uma barra (barra 15).

Utilizando-se o método de Ritter, separa-se a treliça em duas partes, cortando as barras 2, 8 e 15.



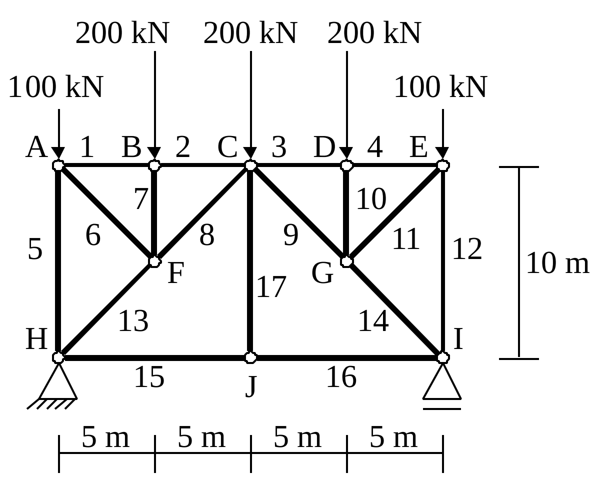
$åFx = 0 ==> N_2 + N_8 * \sqrt{2}/2 + N_{15} = 0$
$åFy = 0 ==> 400 - 100 - 200 + N_8 * \sqrt{2}/2 = 0 ==> N_8 = - 100\sqrt{2}\ kN$
$(åM)_C = 0 ==> - 200*5 - N_2*10 = 0 ==> \quad N_2 = - 100\ kN$
$N_{15} = 200\ kN$

Tendo determinado as forças normais nas barras 2, 8 e 15, pode-se agora utilizar o método de Cremona para determinar as demais forças normais nas barras à esquerda do corte.



$N_1 = N_4 = - 100\ kN$	$N_7 = N_{10} = -200\ kN$
$N_2 = N_3 = - 100\ kN$	$N_8 = N_9 = -100\sqrt{2}\ kN$
$N_5 = N_{12} = - 200\ kN$	$N_{13} = N_{14} = -200\sqrt{2}\ kN$
$N_6 = N_{11} = 100\sqrt{2}\ kN$	$N_{15} = 200\ kN$

b)Determinar as forças normais nas barras da figura abaixo, derivada da treliça do ítem anterior. Utilizar qualquer método de resolução.



<u>Resolução</u>:

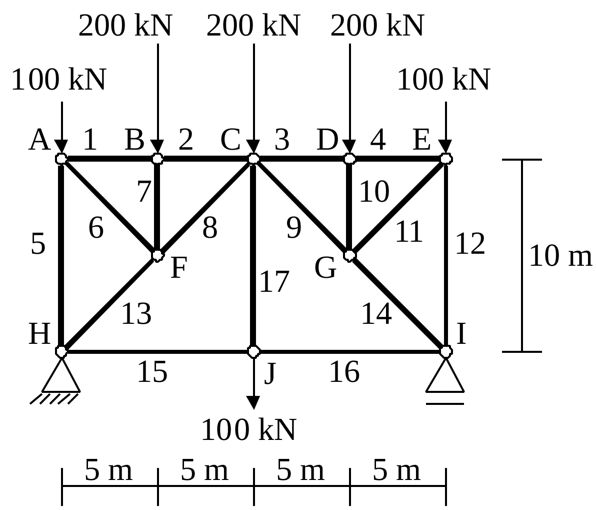
O equilíbrio do nó J mostra que se tem:

$$N_{17} = 0$$

As forças normais nas barras 1 a 14 são as mesmas da treliça do item anterior. Tem-se então:

$$N_{16} = N_{15} = 200\ kN$$

c)Determinar as forças normais nas barras da treliça da figura abaixo. Utilizar qualquer método de resolução.



<u>Resolução</u>:

O equilíbrio do nó J mostra que se tem:

$$N_{17} = 100\ kN$$

As forças normais nas demais barras são, portanto:

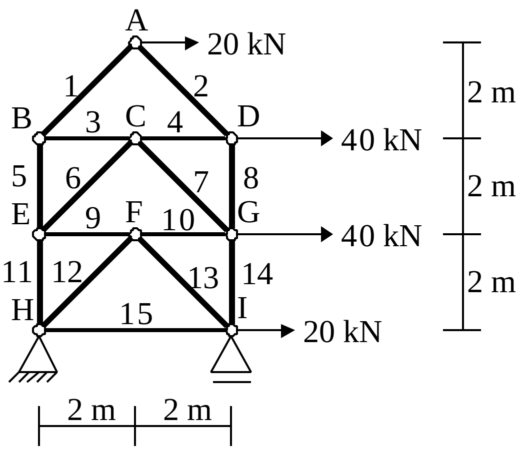
$N_1 = N_4 = -100\ kN$ $\quad$ $N_6 = N_{11} = 100\sqrt{2}\ kN$ $\quad$ $N_{13} = N_{14} = -250\sqrt{2}\ kN$

$N_2 = N_3 = -100\ kN$ $\quad$ $N_7 = N_{10} = -200\ kN$ $\quad$ $N_{15} = N_{16} = 250\ kN$

$N_5 = N_{12} = -200\ kN$ $\quad$ $N_8 = N_9 = -150\sqrt{2}\ kN$ $\quad$ $N_{17} = 100\ kN$

3ª QUESTÃO - PROVA DE RECUPERAÇÃO DE 1991

Determinar as forças normais das barras 3, 5 e 6, utilizando o processo de Ritter.



<u>Resolução</u>:

Cortando-se as barras 5, 3, 4 e 8, tem-se:

$SFx = 0 ==> 20 + N_3 - N_4 = 0$

$SFy = 0 ==> - N_5 - N_8 = 0 ==> N_5 = - N_8$

$(SM)_D = 0 ==> - 20*2 + N_5*4 = 0 ==> N_5 = 10\ kN$

Cortando-se as barras 5, 6, 7 e 8, tem-se:

$SFx = 0 ==> 60 - N_6*\sqrt{2}/2 + N_7*\sqrt{2}/2 = 0$

$SFy = 0 ==> - N_5 - N_6*\sqrt{2}/2 - N_7*\sqrt{2}/2 - N_8 = 0 ==> \quad N_6 = - N_7$

$N_6 = 30\sqrt{2}\ kN$

Cortando-se as barras 2, 3 e 5, tem-se:

$(SM)_J = 0 ==> - 20*2 - N_3*4 = 0 ==> N_3 = - 10\ kN$

1ª QUESTÃO - 2ª PROVA DE 1991 - (3,0)

Determinar as reações de apoio e os esforços (valores e sinais) nas barras da treliça abaixo, pelo mértodo de Cremona.

Os valores de P1 e de P2 serão arbitrados pelos alunos dentro da seguinte regra:

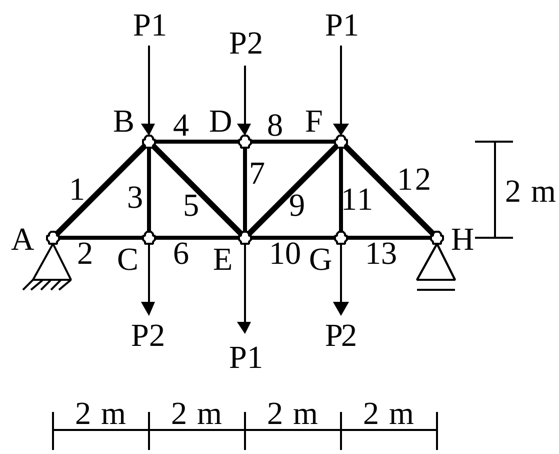
3P1 + 3P2 = 90,0 + 3*(S + T)

as forças, em valor absoluto, nos montantes verticais 3, 7 e 11 devem ficar entre 9,0 + 0,1*(S + T) e 10,0 + 0,1*(S + T) (escolher qualquer valor nesse intervalo fechado).

S é o segundo n.USP do aluno.

T é o terceiro.

Use a folha quadriculada para desenhar o gráfico e indicar o resultado.



<u>Solução</u>:

Aplicando-se Cremona deve-se chegar aos seguintes resultados:

convenção: *positivo ==> tração*
negativo ==> compressão

$N_1 = -\,3\sqrt{2}\,(P_1 + P_2)/2$
$N_2 = +\,3(P_1 + P_2)/2$
$N_3 = +\,P_2$
$N_4 = -\,2(P_1 + P_2)$
$N_5 = +\,\sqrt{2}\,(P_1 + P_2)/2$
$N_6 = +\,3(P_1 + P_2)/2$
$N_7 = -\,P_2$

$N_8 = -\,2(P_1 + P_2)$
$N_9 = +\,\sqrt{2}\,(P_1 + P_2)/2$
$N_{10} = +\,3(P_1 + P_2)/2$
$N_{11} = +\,P_2$
$N_{12} = -\,3\sqrt{2}\,(P_1 + P_2)/2$
$N_{13} = +\,3(P_1 + P_2)/2$