

Circulação Geral dos Oceanos

Paulo S. Polito, Ph.D.

Instituto Oceanográfico da Universidade de São Paulo

São Paulo, 2021

Roteiro

- 9 O Modelo de Munk
 - Para começo de conversa...
 - A Base Ainda é a Mesma: PV
 - Não-dimensionalização à la Stommel
 - A contribuição de Munk
 - Onde Sverdrup, Stommel e Munk nos Levaram?

Roteiro

- 9 O Modelo de Munk
 - Para começo de conversa...
 - A Base Ainda é a Mesma: PV
 - Não-dimensionalização à la Stommel
 - A contribuição de Munk
 - Onde Sverdrup, Stommel e Munk nos Levaram?

Objetivos desta aula:

- Modificar a solução de Stommel.
- Entender a diferença entre os modelos de Stommel e Munk.
- Criar um modelo não-dimensionalizado.
- Apresentar a solução não-dimensionalizada.
- Redimensionalizar o modelo.
- Explorar a solução graficamente.

Conhecimento prévio:

- Entender o modelo de Sverdrup.
- Ter uma noção básica do modelo de Stommel.
- Entender a conservação de PV no modelo homogêneo de águas rasas.
- Ter noções de equações diferenciais em ψ .
- Saber utilizar condições de contorno.
- Noções de programação.

Roteiro

9 O Modelo de Munk

- Para começo de conversa...
- A Base Ainda é a Mesma: PV
- Não-dimensionalização à la Stommel
- A contribuição de Munk
- Onde Sverdrup, Stommel e Munk nos Levaram?

Partindo da Vorticidade

- Aqui também vamos partir da conservação de vorticidade.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right) (\nabla^2 \psi + f) = \left(\frac{1}{\rho_0 D_0} \right) \left(\frac{\partial \tau_y}{\partial x} - \frac{\partial \tau_x}{\partial y} \right) - \gamma \nabla^2 \psi + A_H \nabla^4 \psi$$

$\nabla^2 \psi$ é a vorticidade relativa $\zeta = (\vec{\nabla} \times \vec{v})_{\hat{k}}$.

$f = f_0 + \beta y$ plano- β . Again.

$\gamma \sim (\text{T}^{-1})$ é o coeficiente de atrito com o fundo. No livro é r .

A_H é o atrito lateral, horizontal.

$\nabla^4 \psi = \left(\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} \right)$ é o operador bi-harmônico¹ de ψ .

¹Cap. 9.10 do Pond & Pickard

Munk também simplificou

- Bacia retangular: 

- $\tau_y = 0$ e $\tau_x = -\tau_0 \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right)$ olhe o gráfico que você já fez.

- Reduziu a equação do Slide 6 a:

$$\underbrace{-A_h \nabla^4 \psi}_{\text{Atrito lateral}} + \underbrace{\beta \frac{\partial \psi}{\partial x}}_{\text{Advecção de vorticidade planetária}} = \underbrace{-\left(\frac{\pi \tau_0}{D_0 b \rho_0}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)}_{\text{Bombeamento Ekman}}$$

Que diferença faz?

$$-A_h \nabla^4 \psi + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = - \left(\frac{\pi \tau_0}{D_0 b \rho_0} \right) \sin \left(\frac{\pi y}{b} \right)$$

- Sumiu o $\frac{\partial}{\partial t} \Rightarrow$ estacionário, fluxo médio.
- Sumiram $u \frac{\partial}{\partial y}$ e $v \frac{\partial}{\partial x} \Rightarrow$ linear.
- Não sumiu $\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} = v \beta \therefore$ Sverdrup \rightsquigarrow Munk.
- Troquei o atrito do fundo por dissipação lateral $\nabla^4 \psi$.
- No modelo de Munk não há necessidade de velocidades junto ao fundo.

Roteiro

9 O Modelo de Munk

- Para começo de conversa...
- A Base Ainda é a Mesma: PV
- Não-dimensionalização à la Stommel
- A contribuição de Munk
- Onde Sverdrup, Stommel e Munk nos Levaram?

Fica muito parecido

- Como no modelo de Stommel

$$\left\{ \begin{array}{l} x \leftarrow ax \\ y \leftarrow by \\ \psi \leftarrow \frac{\tau_0}{\beta \rho_0 D_0} \psi \\ A = \frac{\tau_0}{\rho_0 D_0 \beta} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Substituindo em } -A_h \nabla^4 \psi + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = - \left(\frac{\pi \tau_0}{D_0 b \rho_0} \right) \sin \left(\frac{\pi y}{b} \right), \\ -\frac{A_h}{b^4} \left(\frac{\tau_0}{D_0 \beta \rho_0} \right) \nabla^4 \psi + \left(\frac{\tau_0}{D_0 \beta \rho_0} \right) \frac{\beta}{a} \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\pi \tau_0}{D_0 b \rho_0} \sin(\pi y). \end{array}$$

Fazendo $a \simeq b$ e dividindo por $A\beta$: $-\frac{A_h}{\beta b^3} \nabla^4 \psi + \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\pi \sin(\pi y)$.

Definindo $\epsilon_M = \frac{A_h}{\beta b^3}$:

$$\boxed{-\epsilon_M \nabla^4 \psi + \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\pi \sin(\pi y)}$$

Condições de contorno

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi = 0 \text{ em } x = 0 \text{ e } x = 1, \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \text{ em } x = 0 \text{ e } x = 1 \quad \leftarrow \text{ Note que isso equivale a } v = 0, \\ \psi = 0 \text{ em } y = 0 \text{ e } y = 1, \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \text{ em } y = 0 \text{ e } y = 1 \quad \leftarrow \text{ Note que isso equivale a } \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \end{array} \right.$$

Portanto...

- v vai para zero nas bordas W e E, não há fluxo \perp . Razoável, né?!
- $\frac{\partial u}{\partial y}$ é um stress que é zero nas bordas N e S, facilita a solução.
- Queremos cisalhamento na borda W.

○ Problema de Munk

$$-\epsilon_M \nabla^4 \psi + \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\pi \sin(\pi y)$$

- A solução também é do tipo camada limite, resolvido em duas partes (interior e borda oeste) como o problema de Stommel.
- Tente separar mentalmente quem é constante de quem é **variável**:

$$\psi = \left\{ \left[-\frac{2}{3} \left(1 - \epsilon_M^{\frac{1}{3}} \right) e^{\left(-\frac{x}{2\epsilon_M^{\frac{1}{3}}} \right)} \cos \left(\frac{x\sqrt{3}}{2\epsilon_M^{\frac{1}{3}}} - \frac{\pi}{6} \right) + \frac{2}{\sqrt{3}} e^{\left(-\frac{x}{2\epsilon_M^{\frac{1}{3}}} \right)} \sin \left(\frac{x\sqrt{3}}{2\epsilon_M^{\frac{1}{3}}} \right) \right] + \dots \right. \\ \left. \dots + \left(1 - \epsilon_M^{\frac{1}{3}} - x \right) + \left(\epsilon_M^{\frac{1}{3}} e^{\left(\frac{x-1}{\epsilon_M^{\frac{1}{3}}} \right)} \right) \right\} \pi \sin(\pi y).$$

O Problema de Munk ... continuação

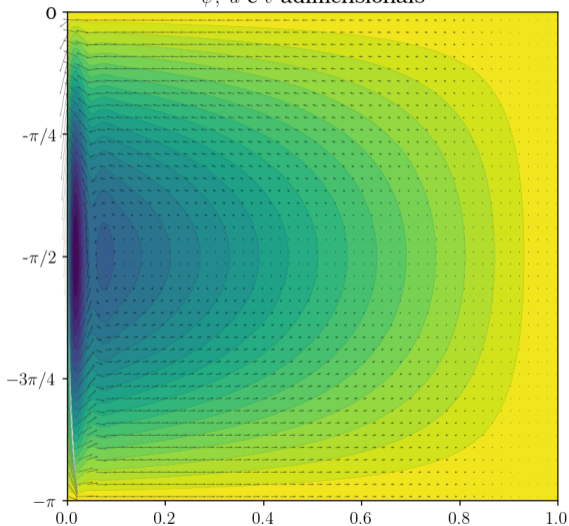
Que fica um pouco menos complicada fazendo-se

$$\psi = \left\{ \left[-\frac{2}{3} (1 - k) e^{-mx} \cos \left(xm\sqrt{3} - \frac{\pi}{6} \right) + \frac{2}{\sqrt{3}} e^{(-mx)} \sin \left(xm\sqrt{3} \right) \right] + \dots \right. \\ \left. \dots + (1 - k - x) + \left(ke^{\left(\frac{x-1}{k}\right)} \right) \right\} \pi \sin(\pi y), \quad \text{onde } k = \epsilon_M^{\frac{1}{3}}, \quad m = \frac{1}{2k}.$$

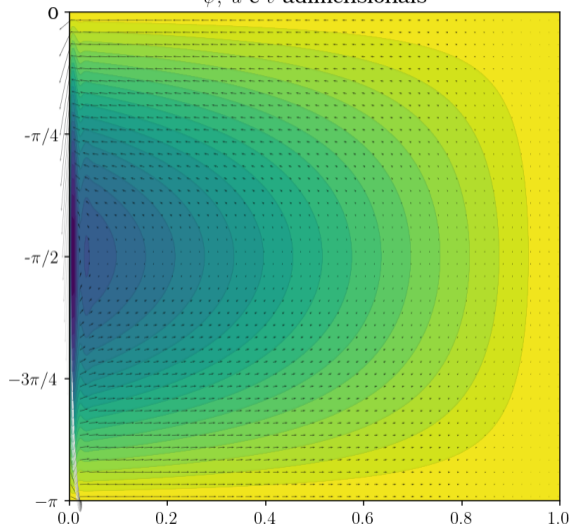
- Note que a parte em y se reduz à solução de Sverdrup e a parte em x contém o decaimento exponencial, como na solução de Stommel, mas modulado de várias formas.

Soluções adimensionais

ψ , u e v adimensionais



ψ , u e v adimensionais



Roteiro

9 O Modelo de Munk

- Para começo de conversa...
- A Base Ainda é a Mesma: PV
- Não-dimensionalização à la Stommel
- A contribuição de Munk
- Onde Sverdrup, Stommel e Munk nos Levaram?

Análise da solução

- É uma equação não-dimensionalizada, portanto a largura da bacia é 1.
- $\epsilon_M \ll 1$ é uma escala para o termo da vorticidade relativa
- ... que é o termo viscoso, aquele do ∇^4 .
- O fluxo meridional é máximo na CBO, em $x \simeq 1.2\epsilon_M^{0.333}$.
- Podemos escalar a largura da corrente δ_S como o dobro disso.

Dimensionalização

$$\psi = \left\{ \left[-\frac{2}{3} (1 - k) e^{-mx} \cos \left(xm\sqrt{3} - \frac{\pi}{6} \right) + \frac{2}{\sqrt{3}} e^{(-mx)} \sin \left(xm\sqrt{3} \right) \right] + \dots \right. \\ \left. \dots + (1 - k - x) + \left(ke^{\left(\frac{x-1}{k}\right)} \right) \right\} \pi \sin(\pi y), \quad \text{onde } k = \epsilon_M^{\frac{1}{3}}, \quad m = \frac{1}{2k},$$

está na forma não-dimensionalizada. Redimensionalizando (Slide 10), i.e.:

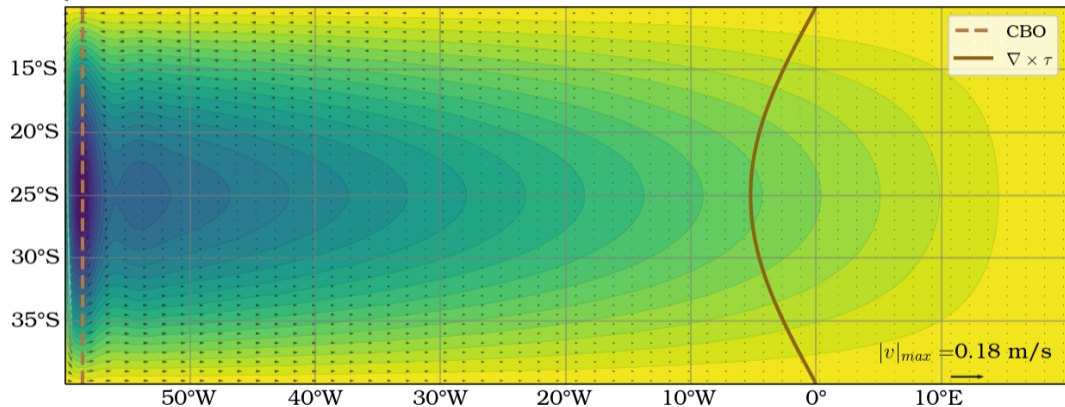
$$\begin{cases} x & \rightarrow \frac{x}{a} \\ y & \rightarrow \frac{y}{b} \\ \psi & \rightarrow \frac{\rho_0 \beta D_0}{\tau_0} \psi \end{cases}$$

- A ideia é parecida com a do modelo de Stommel².
- Neste caso se multiplicarmos o ψ adimensional por $A = \frac{a}{b} \frac{\pi \tau_0}{\rho_0 \beta_0 D_0 b}$, as velocidades dimensionais são obtidas de $u = b \frac{\partial \psi}{\partial y}$ e $v = -a \frac{\partial \psi}{\partial x}$.
- $D = a \epsilon_M^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{a A_H}{\beta b^3} \right)^{\frac{1}{3}}$ é uma escala para a largura da corrente δ^* , mais exatamente $\delta^* = 2.4D$.

²Slide 22 do Tema 8

O mar segundo Walter Munk

Solução Analítica de Munk com $A_h=5.5e+02 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$, $\tau_0=-0.20 \text{ Nm}^{-2}$, $\delta^*=172 \text{ km}$ e $D_0=5000 \text{ m}$



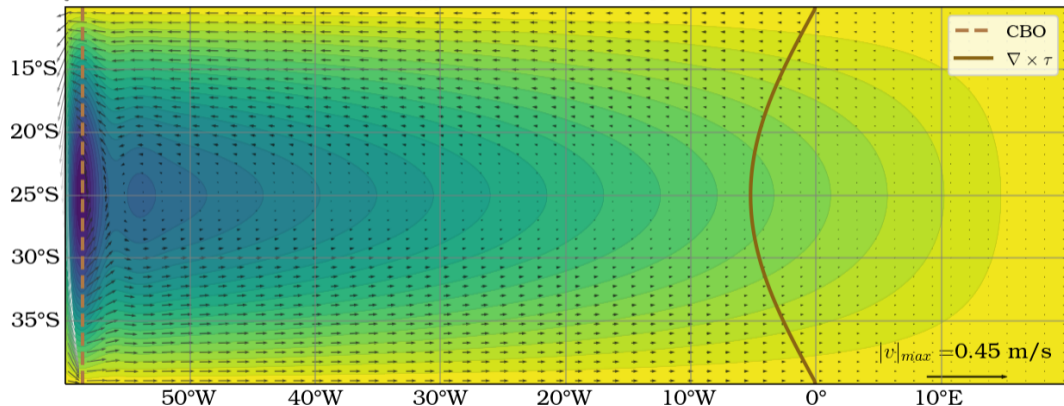
Pontos a ponderar sobre a figura anterior

- É a solução do problema de 1 giro, baseada no livro do A&Y.
- A linha marrom contínua é o forçante, $\nabla \times \tau = \frac{\partial \tau_x}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{y})$.
- Note que o giro **tem um meandro** depois da CBO.
- δ^* é a largura da CBO, indicada com a linha tracejada marrom clara.
- v cresce exponencialmente em $[0, \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\epsilon_M^{\frac{1}{3}}]$
- u cai não-linearmente em $[\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\epsilon_M^{\frac{1}{3}}, b]$.
- Em comparação com as observações é mais preciso que o de Stommel.



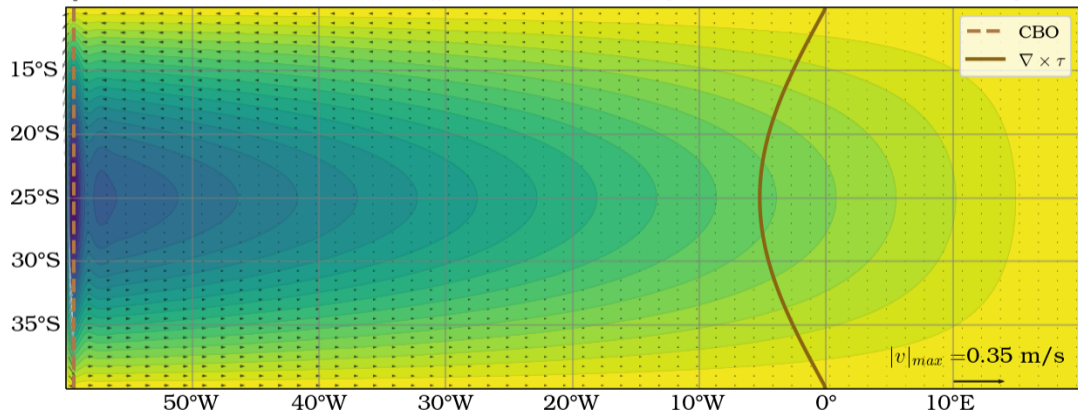
Se o mar fosse mais raso

Solução Analítica de Munk com $A_h=5.5e+02 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$, $\tau_0=-0.20 \text{ Nm}^{-2}$, $\delta^*=172 \text{ km}$ e $D_0=2000 \text{ m}$



Se o mar fosse menos viscoso

Solução Analítica de Munk com $A_h=5.0e+01 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$, $\tau_0=-0.20 \text{ Nm}^{-2}$, $\delta^*=78 \text{ km}$ e $D_0=5000 \text{ m}$



Novamente, sobre a figuras anteriores

- Num oceano mais **raso**,
 - D não depende da espessura do oceano, a CBO é da mesma largura;
 - $|v|_{max}$ e as velocidades, em média, são maiores.
 - A energia está melhor distribuída, mas difere do que vimos antes.
- Num oceano menos **viscoso**,
 - como D depende da $\sqrt[3]{\nu}$ da viscosidade, a largura diminui;
 - porém isso influencia a velocidade máxima e a média, que aumentam.
 - A energia foi dissipada de forma menos eficaz.

Roteiro

- 9 O Modelo de Munk
 - Para começo de conversa...
 - A Base Ainda é a Mesma: PV
 - Não-dimensionalização à la Stommel
 - A contribuição de Munk
 - Onde Sverdrup, Stommel e Munk nos Levaram?

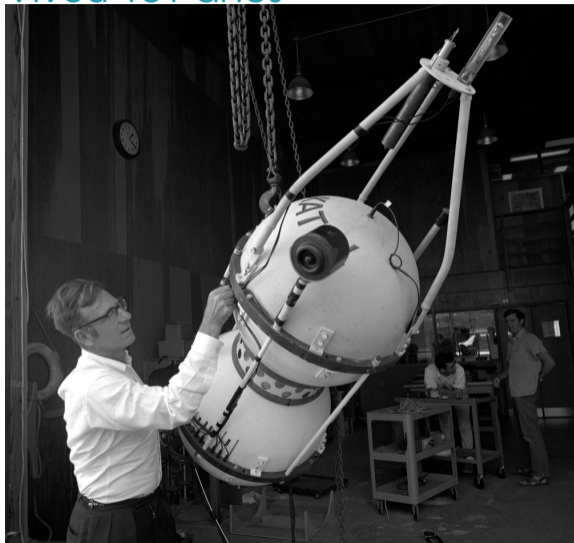
Uma melhor compreensão da evolução das ideias

- A evolução é \pm recente e **progressiva**.
- Os modelos são **minimalistas**: retêm a física necessária e nada mais.
- Os três resolvem a conservação de vorticidade (= momento angular).
- Sverdrup: não resolve a borda oeste.
- Stommel: resolve com atrito com o fundo. v **significativa** no fundo?
- Munk: resolve com atrito lateral. Ignora a **não-linearidade**.

Aumento do escopo do aprendizado

- Programação nos permitiu visualizar o problema de forma **ativa**.
- A **intuição física** é importante e depende de matemática e física básica.
- Os três modelos ajudam muito a responder perguntas básicas:
 - Como o vento força as correntes médias?
 - Como dissipar a energia introduzida pelo vento?
 - Como equilibrar a vorticidade introduzida pelo vento?
- Sem entender os modelos básicos, como discutir modelos de clima?

Viveu 101 anos



As pessoas tem tanto medo de fazer algo que não funciona. Nós temos que encorajar estudantes a experimentar e cometer erros. Nós temos que recompensar experimentos **bem feitos** que falharam.

Walter Munk, Ph.D.