

Circulação Geral dos Oceanos

Paulo S. Polito, Ph.D.

Instituto Oceanográfico da Universidade de São Paulo

São Paulo, 2021

Roteiro

- 8 O Modelo de Stommel
 - Para começo de conversa...
 - Preâmbulo
 - Vorticidade e o Problema de Sverdrup
 - Sobre a não-dimensionalização
 - A contribuição de Stommel

Roteiro

- 8 O Modelo de Stommel
 - Para começo de conversa...
 - Preâmbulo
 - Vorticidade e o Problema de Sverdrup
 - Sobre a não-dimensionalização
 - A contribuição de Stommel

Objetivos desta aula:

- Contextualizar a importância do problema.
- Entender a simplificação da conservação de PV.
- Criar um modelo não-dimensionalizado.
- Resolver o problema em duas regiões separadas e juntar depois.
- Redimensionalizar o modelo.
- Explorar a solução graficamente.

Capítulo 2.2 do Abarbanel & Young, 6.2 do McWilliams.

Conhecimento prévio:

- Entender o modelo de Sverdrup.
- Entender cada termo da conservação de PV no modelo homogêneo de águas rasas.
- Ter noções de equações diferenciais.
- Entender e saber utilizar a função de corrente.
- Saber utilizar condições de contorno.
- Noções de programação.

Roteiro

8 O Modelo de Stommel

- Para começo de conversa...
- **Preâmbulo**
- Vorticidade e o Problema de Sverdrup
- Sobre a não-dimensionalização
- A contribuição de Stommel

MC Hendershott

Tradução minha do Abarbanel & Young p. 202

O artigo de Henry Stommel de 1948 "A intensificação para oeste das correntes oceânicas forçadas pelo vento" deu início a uma nova era no estudo da circulação oceânica. Isto porque ele sugeriu que a variação latitudinal do parâmetro Coriolis (leia-se efeito β) restringe tão fortemente os fluxos oceânicos que muito poderia ser aprendido sobre eles isolando processos horizontais em um modelo de camada única da circulação e, portanto, tendo que resolver apenas duas dimensões em vez de três.

Roteiro

- 8 O Modelo de Stommel
 - Para começo de conversa...
 - Preâmbulo
 - Vorticidade e o Problema de Sverdrup
 - Sobre a não-dimensionalização
 - A contribuição de Stommel

Partindo da Vorticidade

- Derivamos o modelo de Sverdrup a partir das equações do movimento.
- Aqui vamos partir da conservação de vorticidade¹.

$$(\partial_t - \psi_y \partial_x + \psi_x \partial_y)(\nabla^2 \psi + f) = \frac{\tau_x^y - \tau_y^x}{\rho_0 D_0} - r \nabla^2 \psi + A_H \nabla^4 \psi,$$

Que fica mais familiar assim:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right) (\nabla^2 \psi + f) = \left(\frac{\frac{\partial \tau_y}{\partial x} - \frac{\partial \tau_x}{\partial y}}{\rho_0 D_0} \right) - \gamma \nabla^2 \psi + A_H \nabla^4 \psi$$

Se você não reconheceu alguns termos, que tal assim:

Partindo da Vorticidade ... continuação

$$-\frac{\partial \psi}{\partial y} = u,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = v, \text{ portanto}$$

$\nabla^2 \psi$ é a vorticidade relativa

$$\zeta = (\vec{\nabla} \times \vec{v})_{\hat{k}}.$$

$f = f_0 + \beta y$ sim, é o plano- β .

ρ_0 é constante, oceano homogêneo.

D_0 é constante, fundo plano.

$\gamma \sim (T^{-1})$ é o coeficiente de atrito com o fundo. No livro é r .

A_H é o atrito lateral, horizontal.

$$\nabla^4 \psi = \nabla^2 \zeta = \nabla^2 (\vec{\nabla} \times \vec{v})_{\hat{k}}$$

¹Fórmula 1.1.1 do Abarbanel & Young

Stommel simplificou

- Bacia retangular: 

- $\tau_y = 0$ e $\tau_x = -\tau_0 \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right)$ faça um gráfico para ver como é.

- Reduziu a equação do Slide 8 a:

$$\underbrace{\gamma \nabla^2 \psi}_{\text{Atrito com o fundo}} + \underbrace{\beta \frac{\partial \psi}{\partial x}}_{\text{Advecção de vorticidade planetária}} = \underbrace{-\left(\frac{\pi \tau_0}{D_0 b \rho_0}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)}_{\text{Rotacional do stress do vento}}$$

O que significam essas simplificações?

$$\gamma \nabla^2 \psi + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = - \left(\frac{\pi \tau_0}{D_0 b \rho_0} \right) \sin \left(\frac{\pi y}{b} \right)$$

- Em relação ao Slide 8:
- Sumiu o $\frac{\partial}{\partial t} \Rightarrow$ estacionário, fluxo médio.
- Sumiram $u \frac{\partial}{\partial y}$ e $v \frac{\partial}{\partial x} \Rightarrow$ linear.
- Não sumiu $\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} = v \beta \therefore$ Sverdrup \rightsquigarrow Stommel.
- Sumiu o atrito lateral $\nabla^4 \psi \Rightarrow$ escorregamento livre nas bordas laterais.



Roteiro

8 O Modelo de Stommel

- Para começo de conversa...
- Preâmbulo
- Vorticidade e o Problema de Sverdrup
- Sobre a não-dimensionalização
- A contribuição de Stommel

Colocando e tirando as dimensões

- Muitos livros, (Pedlosky, Abarbanel & Young) **não-dimensionalizam** as equações.
- A ideia é resolver a equação sem se enrolar com as constantes.

$$\left\{ \begin{array}{l} x \leftarrow ax \\ y \leftarrow by \\ \psi \leftarrow \frac{\tau_0}{\beta\rho_0 D_0} \psi \end{array} \right. \quad \text{Substituindo em } \gamma \nabla^2 \psi + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = - \left(\frac{\pi \tau_0}{D_0 b \rho_0} \right) \sin \left(\frac{\pi y}{b} \right),$$
$$\frac{\tau_0}{D_0 \rho_0 \beta} \left[\gamma \left(\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) + \frac{\beta}{a} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] = - \frac{\tau_0 \pi}{\beta \rho_0 D_0} \sin(\pi y)$$

dividindo por $\frac{\tau_0}{D_0 \rho_0 \beta}$: $\gamma \left(\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) + \frac{\beta}{a} \frac{\partial \psi}{\partial x} = - \frac{\beta \pi}{b} \sin(\pi y)$

Resolver no quadrado ($a \simeq b$) e esticar depois

$$\gamma \left(\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) + \frac{\beta}{a} \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\beta \pi}{a} \sin(\pi y) \quad \text{dividindo por } \frac{\beta}{a},$$

$$\frac{\gamma}{\beta a} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\pi \sin(\pi y) \quad \text{defino } \epsilon_S = \frac{\gamma}{\beta a},$$

$$\epsilon_S \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\pi \sin(\pi y).$$

■ γ deve ser tal que $\epsilon_S \ll 1$. Por que?

■ A vorticidade relativa ($\nabla^2 \psi = \zeta$) é pequena no interior do giro.

Resolver no quadrado ($a \simeq b$) e esticar depois

$$\gamma \left(\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) + \frac{\beta}{a} \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\beta \pi}{a} \sin(\pi y) \quad \text{dividindo por } \frac{\beta}{a},$$

$$\frac{\gamma}{\beta a} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\pi \sin(\pi y) \quad \text{defino } \epsilon_S = \frac{\gamma}{\beta a},$$

$$\epsilon_S \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\pi \sin(\pi y).$$

- γ deve ser tal que $\epsilon_S \ll 1$. Por que?
- A vorticidade relativa ($\nabla^2 \psi = \zeta$) é pequena no interior do giro.

Resolver no interior e grudar a borda oeste depois

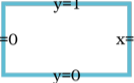
- Estime ϵ_S e confirme se $\epsilon_S \ll 1$.
- $\nabla^2 \psi = \zeta$, vorticidade relativa, que é pequena no interior do giro.
- Vamos chamar de ψ_I a função de corrente do interior oceânico.

$$\cancel{\epsilon_S \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)} + \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\pi \sin(\pi y) \quad \therefore \quad \frac{\partial \psi_I}{\partial x} = -\pi \sin(\pi y).$$

- É fácil perceber que $\psi_I = -\pi \sin(\pi y)x + c$.
- Precisamos de uma condições de contorno.
- Lembre que não-dimensionalizamos x e y .

Condições de contorno

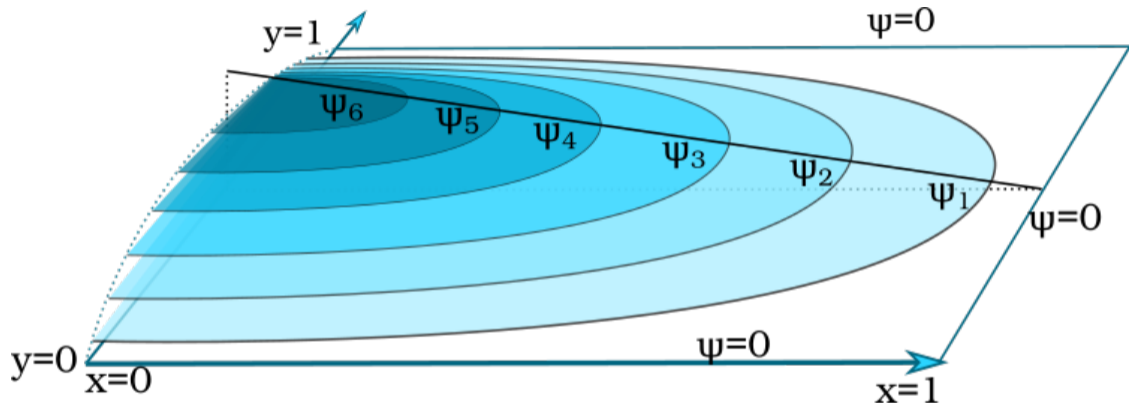
$$\frac{\partial \psi_I}{\partial x} = -\pi \sin(\pi y), \quad \psi_I = -\pi \sin(\pi y)x + c.$$

- O domínio não-dimensionalizado é bem simples: 
- Para evitar que haja $\vec{v} \perp (\mathbf{y} = [0, 1], \mathbf{x} = [1])$ basta fazer $\psi_I = \text{constante}$;
- mas já temos $\sin(\pi y) = 0$ para $\mathbf{y} = [0, 1]$, basta fazer $c = \pi \sin \pi y$.
- Dessa forma, $\psi_I = (1 - x)\pi \sin(\pi y)$.

$(1 - x) > 0$, decai linearmente entre $x = 0$ e $x = 1$, onde é zero \checkmark .

$\sin(\pi y) > 0$, zero nas bordas, calombo centrado em $y=1/2$.

O interior fica assim



■ Até aqui é como a solução de Sverdrup $u \neq 0$ em $x = 0$.

A solução da camada limite

$$\epsilon_S \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\pi \sin(\pi y).$$

- Não vamos resolver explicitamente o problema².
- A ideia é resolver a camada limite voltando a equação à forma acima, deformando a coordenada x de $x = 0$ a $x = \epsilon_S$.
- Ao fazer essa transformação, eliminam-se os termos de ordem ϵ_S e uma solução fisicamente razoável é:

$$\psi = \left(1 - e^{-\frac{x}{\epsilon_S}} - x \right) \pi \sin(\pi y)$$

²pp. 218-222 do Abarbanel & Young

Roteiro

- 8 O Modelo de Stommel
 - Para começo de conversa...
 - Preâmbulo
 - Vorticidade e o Problema de Sverdrup
 - Sobre a não-dimensionalização
 - A contribuição de Stommel

Pode acompanhar pelo Abarbanel & Young

- O que significa exatamente deformar a borda oeste?
- O ψ_I é do Sverdrup, o ψ_{WBL} é do Stommel.
- Fazer $x \leftarrow \epsilon_S \xi$ implica que $\frac{\partial}{\partial x} \leftarrow \frac{1}{\epsilon_S} \frac{\partial}{\partial \xi}$ e que $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \leftarrow \frac{1}{\epsilon_S^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}$.
- Essa estratégia coloca um ϵ_S^{-1} que limita a solução à borda oeste.
- **Tente plotar** $\psi = \left(1 - e^{-\frac{x}{\epsilon_S}} - x\right)$ para $\epsilon_S = [0.1, 0.01, 0.001, \dots]$.
- Essa é a parte em x da solução. A parte em y é um seno meio bobinho.

Dimensionalização

Note que $\psi = \left(1 - e^{-\frac{x}{\epsilon S} - x} \right) \pi \sin(\pi y)$ está na forma não-dimensionalizada.

Se revertermos as as transformações do Slide 13, chegaremos em

$$\begin{cases} x \rightarrow \frac{x}{a} \\ y \rightarrow \frac{y}{b} \\ \psi \rightarrow \frac{\rho_0 \beta D_0}{\tau_0} \psi \end{cases} \quad \psi = \frac{\pi \tau_0}{\rho_0 \beta D_0 b} \left(1 - e^{\left(-\frac{x}{a \epsilon S} \right) - \frac{x}{a}} \right) \sin\left(\frac{\pi}{b} y\right),$$

que é a forma dimensionalizada usando a notação do Abarbanel & Young.

Se a preferência é pelo livro do McWilliams, ele usa outra notação:

Ele parte de $D\nabla^2\psi + \frac{\partial\psi}{\partial x} = A \sin\left(\frac{2\pi y}{L_y}\right)$ onde o fator 2 dentro do seno se deve

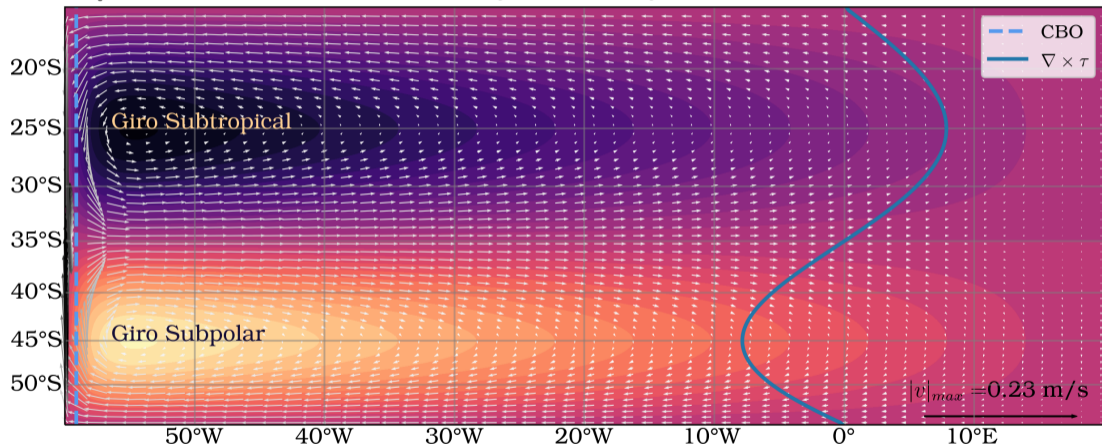
ao fato de ele usar o vento para dois giros ao mesmo tempo (subpolar e subtropical).

$D = \frac{f_0}{\beta} \sqrt{E/2}$, mede a largura da CBO, E é o n° de Ekman; D é o ϵ_S do A&Y.

$A = \frac{2\pi\tau_0}{\rho_0\beta H L_y}$, onde o L_y é b e H é o D_0 do A&Y. A mede a velocidade da CBO.

O mar segundo Hank Stommel

Solução Analítica de Stommel com $\nu_e=2 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$, $\tau_0=-0.20 \text{ Nm}^{-2}$, $D=121 \text{ km}$ e $H=4000 \text{ m}$

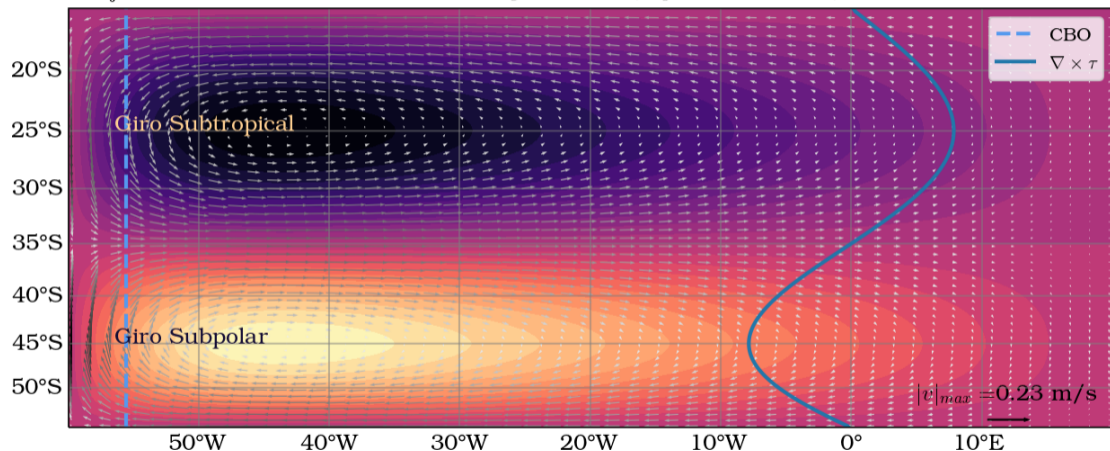


Pontos a ponderar sobre a figura anterior

- É a solução do problema de 2 giros, do livro do McWilliams.
- A linha azul contínua é o forçante, $\nabla \times \tau = \frac{\partial \tau_x}{\partial y}(\mathbf{y})$.
- Tem um monte de vetores amontoados na CBO.
- D é a largura da CBO, indicada com a linha tracejada azul clara.
- v cresce exponencialmente em $[0, D]$ e u cai linearmente em $[D, L_x]$.
- Isso completa o esquema do Slide 17.

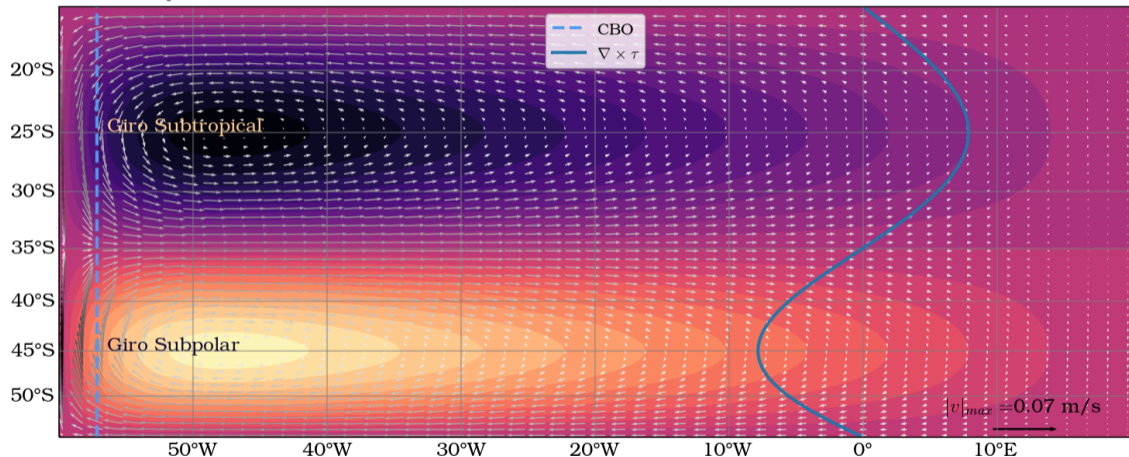
Se o mar fosse mais raso

Solução Analítica de Stommel com $\nu_e=2 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$, $\tau_0=-0.20 \text{ Nm}^{-2}$, $D=604 \text{ km}$ e $H=800 \text{ m}$



Se o mar fosse mais viscoso

Solução Analítica de Stommel com $\nu_e=20 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$, $\tau_0=-0.20 \text{ Nm}^{-2}$, $D=382 \text{ km}$ e $H=4000 \text{ m}$



Novamente, sobre a figuras anteriores

- Num oceano mais **raso**,
 - como D decai com a espessura do oceano, a CBO é mais larga;
 - $|v|_{max}$ continua a mesma, mas as velocidades são, em média, bem maiores.
 - A energia está melhor distribuída.
- Num oceano mais **viscoso**,
 - como D depende da $\sqrt{\nu}$ da viscosidade, a largura aumenta;
 - porém isso influencia a velocidade máxima e a média, que caem bastante.
 - A energia foi dissipada de forma mais eficaz.

Boys just wanna have fun

