Circulação Geral dos Oceanos

Paulo S. Polito, Ph.D.

Instituto Oceanográfico da Universidade de São Paulo

São Paulo, 2021

Roteiro

Roteiro

6 Dinâmica de Sverdrup

- Para começo de conversa...
- A Base Teórica da Dinâmica de Sverdrup
- A Dinâmica de Sverdrup na Prática
- Como Resolver as Inconsistências
- O Vento Térmico e a Espiral β

Objetivos desta aula:

- Das equações do movimento obter a relação de Sverdrup e o transporte.
- Explorar a ambiguidade da solução de Sverdrup.
- Criar um modelo prático da circulação obtida.
- Entender porque esse modelo é incompleto.
- Indicar a possível solução.
- Derivar e entender vento térmico e espiral β.

Capítulo 20 do livro do Benoit, 9.5 do Pond & Pickard.

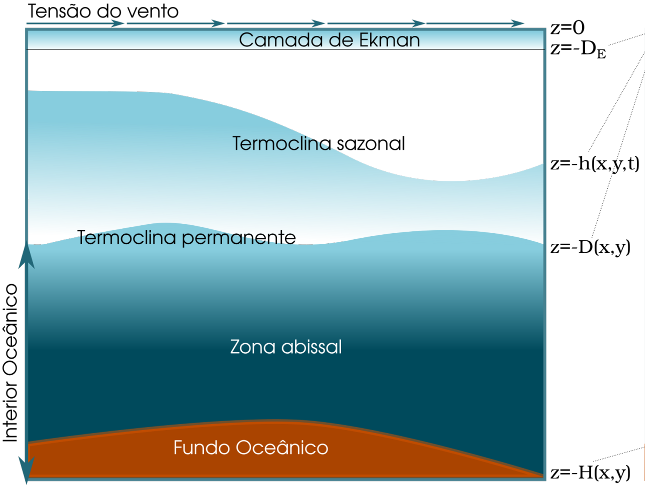
Conhecimento prévio:

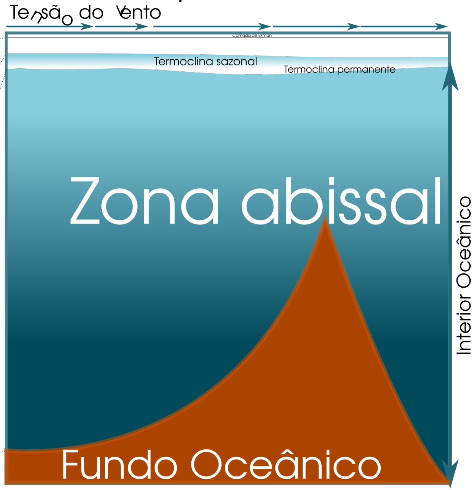
- Dominar a ideia de geostrofia, dinâmica de Ekman e análise de escalas.
- Entender a conservação de PV no modelo homogêneo de águas rasas.
- Saber lidar com condições de contorno para a velocidade.
- Saber expressar matematicamente a deformação e a rotação.
- Ter intuição sobre o papel das escalas no balanço de vorticidade.
- Se você tem dificuldade com qualquer um desses pontos, **estude-o**.

Roteiro

Geometria do Problema

Imaginamos assim, mas está mais para isto.





Geometria do Problema ... continuação

- As camadas de mistura e Ekman coincidem, tem z=O(10m) e $\frac{\partial \rho}{\partial z} = 0$.
- A termoclina sazonal tem z =O(100m), aparece (i.e. $\frac{\partial \rho}{\partial z} \neq 0$) e desaparece.
- A termoclina permanente tem z =O(300-1000m) e $\frac{\partial \rho}{\partial z} \neq 0$ sempre.
- A zona abissal tem z =O(5000m), tem $\vec{v}$ média pequena, e $\frac{\partial \rho}{\partial z} \simeq 0$.
- Estamos interessados no interior oceânico, do fundo até a o topo da termoclina permanente.

Dinâmica de Sverdrup

$$
\begin{cases}
v = \dfrac{1}{f\rho_0}\dfrac{\partial p}{\partial x}, & (1) \\
u = -\dfrac{1}{f\rho_0}\dfrac{\partial p}{\partial y}, & (2) \\
0 = \rho g + \dfrac{\partial p}{\partial z}, & \\
0 = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}, & (3) \\
0 = u\dfrac{\partial \rho}{\partial x} + v\dfrac{\partial \rho}{\partial y} + w\dfrac{\partial \rho}{\partial z} &
\end{cases}
$$

- $p \leftarrow p' \quad \rho \leftarrow \rho'$
- Plano β : $\quad f = f_0 + \beta_0 y$.
- Note que $f_0 = 2\Omega \sin\theta, \;\; \beta_0 = \dfrac{2}{R_\oplus}\Omega\cos\theta, \;\; \theta =$cte.
- Conservação de ρ é não linear ($\rho \rightsquigarrow p \rightsquigarrow u, v$).
- Conservação de ρ $\sim$ conservação de energia, posto que $\rho = \rho(T, S)$
- São 5 equações e 5 incógnitas (u, v, w, p, ρ).

Relação de Sverdrup

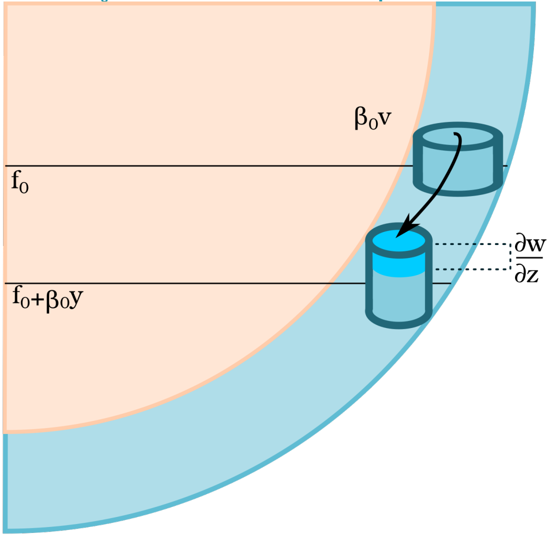
Fazendo o $-\vec{\nabla}_h \times \vec{v}$, i.e. $\frac{\partial(1)}{\partial y} - \frac{\partial(2)}{\partial x}$, temos: $\frac{\partial fu}{\partial x} + \frac{\partial fv}{\partial y} = \frac{1}{\rho_0}\cancel{\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial x}} - \frac{1}{\rho_0}\cancel{\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial y}} = 0.$

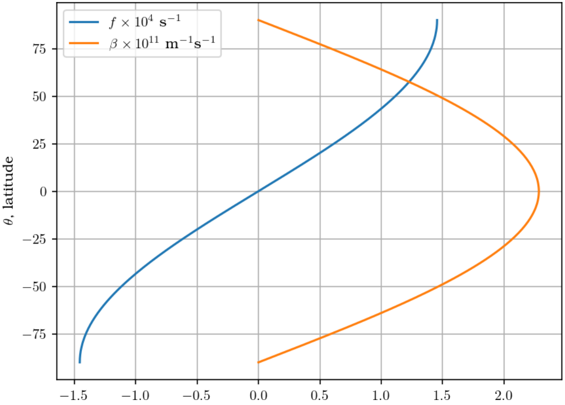
Usando a derivada de produto, $\Rightarrow f\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$

Como $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = \beta_0$, sobra $f\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \beta_0 v = 0.$

Usando (3), temos a relação de Sverdrup: $\boxed{\beta_0 v = f\frac{\partial w}{\partial z}.}$

Relação de Sverdrup ... continuação





$$\boxed{\beta_0 v = f\frac{\partial w}{\partial z}}$$

Transporte de Sverdrup

- Transporte de Ekman veio de $\int_{-D_E}^{0} \cdots dz$ onde a dinâmica de Ekman atua.
- Analogamente, o transporte de Sverdrup vem de $\int_{-H}^{-D_E} \cdots dz$, assumindo:
  - termoclina sazonal está em equilíbrio geostrófico;
  - camada de Ekman de fundo não importa, $\vec{u}(z = -H) \simeq 0$.
- Integrando v em z:

$$V = \int_{z=-H}^{-D_E} v dz = \frac{f}{\beta_0} \int_{z=-H}^{-D_E} \frac{\partial w}{\partial z} dz = w(z = -D_E)$$ Veja o Slide 23 do Tema 5.

Transporte de Sverdrup ... continuação

- Não podemos substituir $w(z = -D_E) = \frac{1}{f\rho_0}\vec{\nabla} \times \vec{\tau}$ nessa forma. Não estamos mais no plano f!

- Temos de dar um passo atrás e colocar o f dentro das derivadas:

$w(z = -D_E) = \frac{1}{\rho_0}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\tau_y}{f}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\tau_x}{f}\right)\right]$ pois Sverdrup usou f em função de y.

- Fazendo a derivada do quociente, você deve obter:

$$V = \frac{1}{\rho_0\beta_0}\left[\frac{\partial\tau_y}{\partial x} - \frac{\partial\tau_x}{\partial y}\right] + \frac{\tau_x}{\rho_0 f} \quad \leftarrow \text{este termo se deve ao plano } \beta.$$

Transporte de Sverdrup ... continuação

- Vamos incluir o transporte de Ekman meridional para obter o total V_t, do fundo até a superfície.

- Novamente, do Slide 23 do Tema 5, $V_E = -\dfrac{\tau_x}{\rho_0 f}$, dessa forma:

$$V_t = V + V_E = \frac{1}{\rho_0 \beta_0}\left[\frac{\partial \tau_y}{\partial x} - \frac{\partial \tau_x}{\partial y}\right].$$

- Este é o transporte meridional de Sverdrup.

- Sim, o termo devido ao efeito β anulou exatamente o transporte de Ekman.

Usando a continuidade

- Se integrarmos equação da continuidade em z do fundo à superfície temos $\frac{\partial U_t}{\partial x} + \frac{\partial V_t}{\partial y} = 0$
- Não tem o termo em z. Porquê?
- $\boxed{U_t = \frac{1}{\rho_0 \beta_0} \int_{x_0}^{x} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \tau_y}{\partial x} - \frac{\partial \tau_x}{\partial y} \right) dx}$ A questão é como escolher x_0 e x.
- Resgatando $\boxed{V_t = \frac{1}{\rho_0 \beta_0} \left(\frac{\partial \tau_y}{\partial x} - \frac{\partial \tau_x}{\partial y} \right)}$, temos o transporte de Sverdrup.

Usando a continuidade

- Se integrarmos equação da continuidade em z do fundo à superfície temos $\frac{\partial U_t}{\partial x} + \frac{\partial V_t}{\partial y} = 0$
- Não podemos transportar a coluna d'água para cima ou para baixo!
- $\boxed{U_t = \frac{1}{\rho_0 \beta_0} \int_{x_0}^{x} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \tau_y}{\partial x} - \frac{\partial \tau_x}{\partial y} \right) dx}$ A questão é como escolher x_0 e x.
- Resgatando $\boxed{V_t = \frac{1}{\rho_0 \beta_0} \left(\frac{\partial \tau_y}{\partial x} - \frac{\partial \tau_x}{\partial y} \right)}$, temos o transporte de Sverdrup.

O Problema Está nas Bordas

- Idealmente deveríamos integrar de uma borda a outra, com x_0 na África e x na América ou vice-versa para obter U_t.
- Podemos fazer $U_t(x_0) = 0$, mas à medida que chegamos na outra borda $U_t \neq 0$ para todo o y. Qual é o problema com isso?
- Esta teoria é incompleta no sentido de que é necessária uma corrente de contorno fora do domínio.
- Em outras palavras, resolve a circulação da borda leste até perto da borda oeste, mas não fecha a bacia.

Roteiro

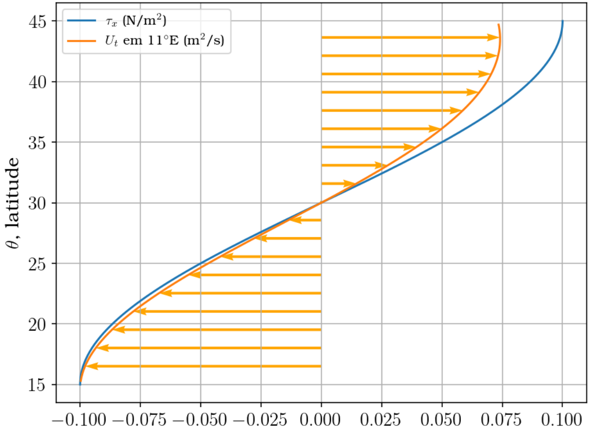
6 Dinâmica de Sverdrup

- Para começo de conversa...
- A Base Teórica da Dinâmica de Sverdrup
- A Dinâmica de Sverdrup na Prática
- Como Resolver as Inconsistências
- O Vento Térmico e a Espiral β

Retomando o Problema de Forma Ativa

- Já vimos que τ_x é dominante e $\sim$ constante em x, com máximos opostos em 15° e 45°.
- Escreva uma função para imitar o perfil meridional de τ_x entre essas latitudes. Pause o vídeo e resolva.
- As direções podem ser observadas nos slides do Tema 5. Use um valor máximo de $|\tau|$ de $A = 0.1$ N/m².
- Como vamos derivar, deve ser uma função contínua com derivadas contínuas.

A Solução para τ_x é a Linha Azul



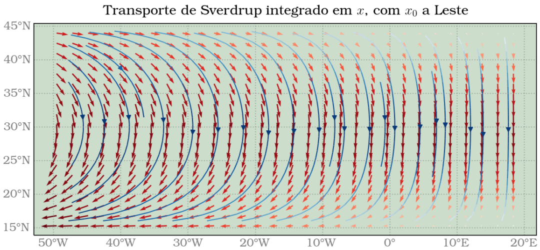
- HN, $\theta > 0$, $f > 0$.
- $\tau_x = A\cos(a\theta + b)$ é contínua, $A = 0.1$.
- Escolha a e b para dar 0 em 30° e ± 1 em 45° e 15°.
- $V_t \propto -\dfrac{\partial \tau_x}{\partial y}$ portanto é zero nas bordas, máximo no meio.
- $U_t \propto \dfrac{\partial^2 \tau_x}{\partial y^2}$ é máximo nas bordas e zero no centro.

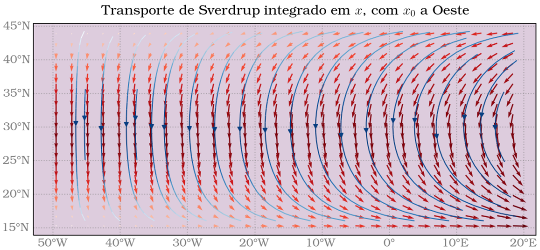
O x da Questão

- $U_t = \dfrac{1}{\rho_0\beta_0}\displaystyle\int_{x_0}^{x}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\tau_y}{\partial x}-\frac{\partial\tau_x}{\partial y}\right)dx$ e $V_t \;=\; \dfrac{1}{\rho_0\beta_0}\left[\dfrac{\partial\tau_y}{\partial x}-\dfrac{\partial\tau_x}{\partial y}\right]$.
- Se o vento é zonal, $U_t = -\dfrac{1}{\rho_0\beta_0}\displaystyle\int_{x_0}^{x}\frac{\partial^2\tau_x}{\partial y^2}dx$ e $V_t \;=\; -\dfrac{1}{\rho_0\beta_0}\dfrac{\partial\tau_x}{\partial y}$.
- Na figura do slide anterior plotei o $U_t(y)$ para dy unitário.
- Ao integrar $U_t(y)$, a constante de integração deve ser tal que $U_t = 0$ na borda leste (x_0) e a integral cresce linearmente com x.

Roteiro

Temos Alguns Problemas





1. Podemos por o x_0 nas duas bordas. Como decidir em qual delas?
2. O fluxo $\perp$ a uma das paredes meridionais não é zero.
3. Falta uma corrente de retorno pois o fluxo meridional médio não é zero.

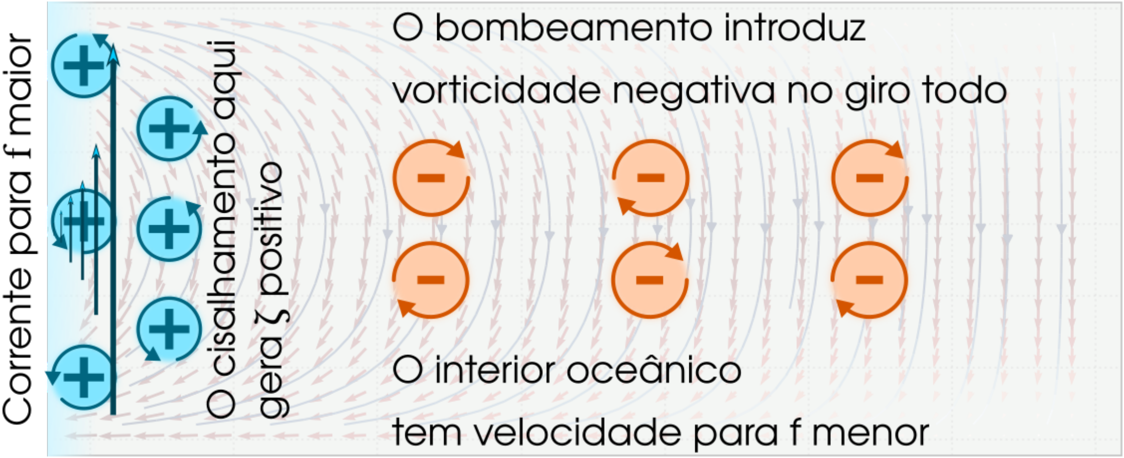
Balanço de massa, energia e vorticidade

- Para equilibrar o balanço de massa e respeitar a condição de fluxo $\perp$ zero, precisamos de uma corrente meridional em direção ao polo.
- O bombeamento de Ekman coloca energia cinética (V_t, Slide 11). Sem viscosidade não há dissipação. Precisamos de viscosidade nessa corrente.
- Do Slide 29 do Tema 1, dissipação $\propto \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$, portanto introduz vorticidade relativa. Essa foi a ideia de Stommel e Munk.
- Vejamos como fica isso graficamente.

Borda Leste?

- Não leva ao equilíbrio, sobra vorticidade ↻.

Borda Oeste?



- Leva ao equilíbrio por causa da vorticidade ↺.

Pontos a Ponderar

- A relação de Sverdrup é entre vorticidade de estiramento e planetária.
- A relativa não entra: velocidades no interior são pequenas e variam em grandes distâncias.
- O transporte de Sverdrup (U_t, V_t) vai da superfície ao fundo mas não fecha uma das bordas pois $U_t(x = x_b, y) \neq 0$.
- O fluxo para dentro e fora da borda x_b sugere a falta de uma corrente para o norte.

Pontos a Ponderar ... continuação

- O vento introduz vorticidade no giro todo mas não há dissipação. A viscosidade deve atuar numa corrente estreita fora do domínio.

- Essa corrente não é parte da dinâmica de Svedrup. Ela foi sugerida por Stommel e será tratada em detalhe mais adiante.

- A corrente a oeste, por causa da viscosidade, resolve os balanços de:

  massa : retorna da água que passou através de $x = x_b$,

  energia : dissipa a energia injetada por $\vec{\tau}$ e

  vorticidade : balanceia o excesso de vorticidade negativa $\circlearrowright$.

Roteiro

6 Dinâmica de Sverdrup

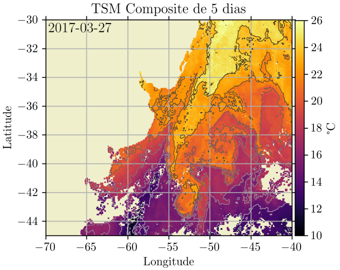
- Para começo de conversa...
- A Base Teórica da Dinâmica de Sverdrup
- A Dinâmica de Sverdrup na Prática
- Como Resolver as Inconsistências
- O Vento Térmico e a Espiral β

Vento Térmico

1. Vá para o Slide 8 e calcule $\frac{\partial}{\partial z}$ de (1) e (2).
2. Substitua o $\frac{\partial p}{\partial z}$ hidrostático para obter:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{g}{f\rho_0}\frac{\partial \rho}{\partial x}, \\ \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{g}{f\rho_0}\frac{\partial \rho}{\partial y}. \end{cases}$$

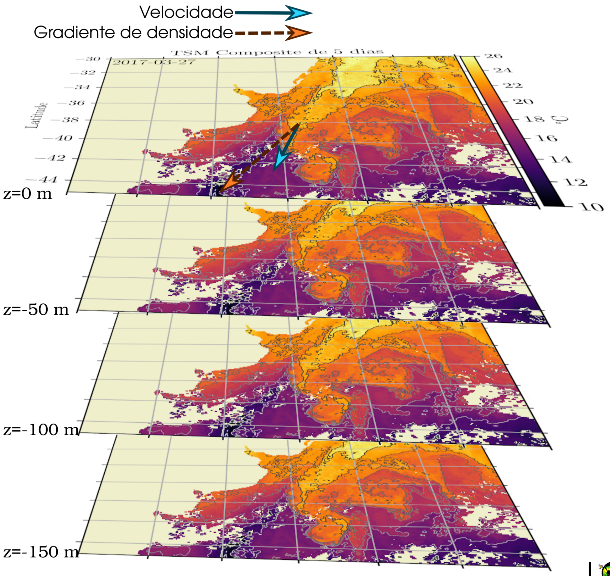
- Perceba que u e v variam com a profundidade: a velocidade muda de direção.
- Isso depende do gradiente horizontal de $\rho(S, T)$.



Como Funciona na Prática

- $z = 0$ na superfície, $\Delta z < 0$.
- HS, $f < 0$.
- $\dfrac{1}{\rho_0} \propto T$.

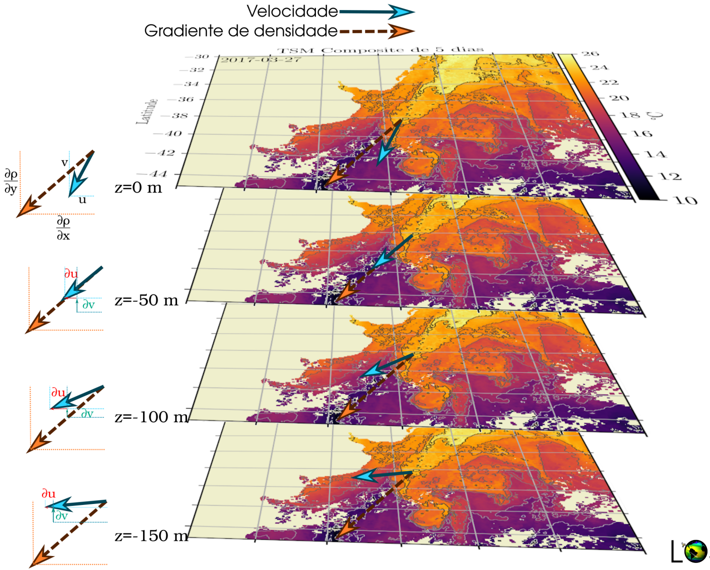
$$\begin{cases} \overbrace{-\dfrac{g}{f\rho_0}}^{\oplus} \overset{\times}{} \overbrace{\dfrac{\partial \rho}{\partial x}}^{\ominus = \ominus} = \underbrace{\overbrace{\dfrac{\partial v}{\partial z}}^{?}}_{\ominus}, \\ \underbrace{\dfrac{g}{f\rho_0}}_{\ominus} \underset{\times}{} \underbrace{\dfrac{\partial \rho}{\partial y}}_{\ominus = \oplus} = \underbrace{\overbrace{\dfrac{\partial u}{\partial z}}^{?}}_{\ominus}. \end{cases}$$



Como Funciona na Prática

- $\Delta z < 0$.
- HS, $f < 0$.
- $\dfrac{1}{\rho_0} \propto T$.

$$\begin{cases} \overbrace{-\frac{g}{f\rho_0}}^{\oplus} \times \overbrace{\frac{\partial \rho}{\partial x}}^{\ominus} = \ominus \qquad = \underbrace{\overbrace{\frac{\partial v}{\partial z}}^{\oplus}}_{\ominus}, \\ \underbrace{\frac{g}{f\rho_0}}_{\ominus} \times \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial y}}_{\ominus} = \ominus = \oplus \qquad = \underbrace{\overbrace{\frac{\partial u}{\partial z}}^{\ominus}}_{\ominus}. \end{cases}$$



A Espiral β

- Em coordenadas cilíndricas, $u = U\cos\theta, v = U\sin\theta$ sendo $\theta = \arctan\left(\frac{v}{u}\right)$.

  Note que esse U não é o transporte de Sverdrup, é o módulo da velocidade.

- Vento térmico $\Rightarrow$ $u = u(z)$ e $v = v(z)$. Portanto $U = U(z)$ e $\theta = \theta(z)$.

- Quero calcular $\frac{\partial\theta}{\partial z}$. Pela regra da cadeia $\frac{\partial\theta}{\partial z} = \frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}$.

- Da derivada de arctan: $\frac{\partial\theta}{\partial z} = \left(\frac{-v}{u^2+v^2}\right)\frac{\partial u}{\partial z} + \left(\frac{u}{u^2+v^2}\right)\frac{\partial v}{\partial z}$,

- Reagrupando, $\frac{\partial\theta}{\partial z} = \frac{1}{u^2+v^2}\left(u\frac{\partial v}{\partial z} - v\frac{\partial u}{\partial z}\right)$.

A Espiral β ... continuação

- Usando o vento térmico, $\frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{-g}{\rho_0 f(u^2+v^2)}\left(u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)$.

- Usando a conservação de energia, i.e.: a última equação do Slide 8,

  obtemos a famosa equação da espiral β : $\boxed{\frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{g}{\rho_0 f}\frac{w}{U^2}\left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)}$.

- Na presença de estratificação $\frac{\partial \rho}{\partial z}$, onde houver velocidade vertical w, a velocidade horizontal muda de direção com a profundidade $\frac{\partial \theta}{\partial z}$.

O Mundo Segundo Sverdrup