Circulação Geral dos Oceanos

Paulo S. Polito, Ph.D.

Instituto Oceanográfico da Universidade de São Paulo

São Paulo, 2023

Roteiro

2 Análise de Escala

- Para começo de conversa...
- Assimetria Horizontal $\times$ Vertical
- A Viscosidade Turbulenta é Assimétrica
- Navier–Stokes - Hidrostática
- Geostrofia e Dinâmica de Ekman
- Estratificação e Viscosidade Turbulenta

Roteiro

Objetivos desta aula:

- Discutir as simplificações mais importantes

  da eq. de NS para problemas de larga escala.

- Usar análise de escala para obter

  números adimensionais (Ek, Ro, Ri).

- Entender a base física da aproximação de Boussinesq.

- Discutir intuitivamente o efeito mecânico da estratificação.

Pond & Pickard cap 7

Conhecimento prévio:

- Familiaridade com a equação de Navier-Stokes (NS).
- Noção da escala de elementos básicos do oceano: profundidade, largura, termoclina, camada de Ekman etc.
- Familiaridade com a equação da continuidade.
- Novamente, se você tem dificuldade com qualquer um desses pontos, **estude-o**.

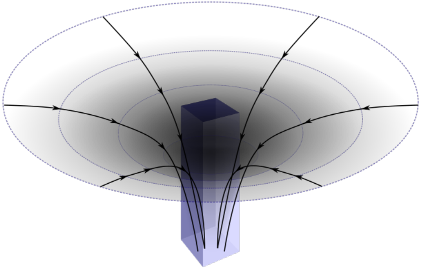
Roteiro

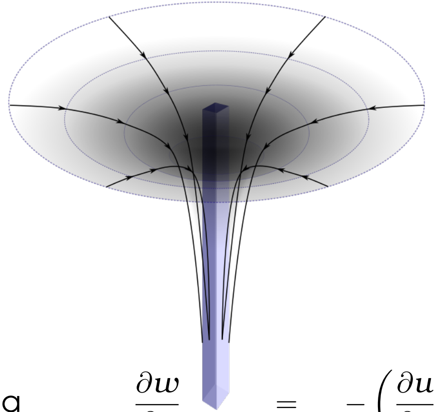
2 Análise de Escala

- Para começo de conversa...
- Assimetria Horizontal × Vertical
- A Viscosidade Turbulenta é Assimétrica
- Navier–Stokes - Hidrostática
- Geostrofia e Dinâmica de Ekman
- Estratificação e Viscosidade Turbulenta

Continuidade e incompressibilidade

Num fluxo incompressível:





$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \text{ou seja} \quad \underbrace{\frac{\partial w}{\partial z}}_{\text{estiramento vertical}} = \underbrace{-\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)}_{\text{convergência horizontal}}$$

Escalando os termos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial z} &= -\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right), \\
\frac{W}{H} &\sim \left(\frac{U}{L}+\frac{U}{L}\right), \\
\frac{W}{H} &\sim \frac{U}{L}; \qquad \boxed{W \sim \frac{HU}{L}}.
\end{aligned}$$

Faça, num rascunho, a **sua** estimativa da ordem de grandeza de:

1. L como 1/10 da largura da bacia.
2. H como espessura da camada acima da termoclina.
3. U como magnitude média das velocidades horizontais nos grandes giros.

Estimativa de W

$$W \sim \frac{HU}{L} \sim \frac{10^3.10^{-1}}{10^6} \sim 10^{-4} \quad \text{m/s}.$$

- Um dia tem 86400 s, $\Rightarrow W \sim 8.64$ m/dia.
- Em quanto tempo esse W moveria a termoclina 150 m [1]?
- Quantos períodos inerciais levaria esse movimento em 30°S?
- O que você conclui em relação a movimentos nessa escala?

[1] para cima ou para baixo.

Você deve ter percebido que:

- W moveria a termoclina em 17 dias e 8 horas.
- Isso equivale a 17.36 períodos inerciais ($P_i = \dfrac{2\pi}{|f|}$).
- Um fluxo que perdura por vários períodos inerciais é influenciado pela rotação, como nossa estimativa foi bem abrangente, podemos dizer que **fluxos de larga escala são influenciados pela rotação**.
- Se W é minúsculo, a divergência é minúscula, *ergo* os **fluxos de larga escala são aproximadamente não–divergentes**.

Roteiro

2 Análise de Escala

- Para começo de conversa...
- Assimetria Horizontal $\times$ Vertical
- A Viscosidade Turbulenta é Assimétrica
- Navier–Stokes - Hidrostática
- Geostrofia e Dinâmica de Ekman
- Estratificação e Viscosidade Turbulenta

Os termos não–lineares importam?

Nas correntes médias, a viscosidade deve compensar a não–linearidade.

Na **horizontal**:

$$\text{Termo viscoso: } A_y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim A_y \frac{U}{L^2}$$

$$\text{Termo não–linear: } v \frac{\partial u}{\partial y} \sim \frac{U^2}{L}$$

$$A_y \frac{U}{L^2} \simeq \frac{U^2}{L} \qquad \boxed{A_y \simeq LU}$$

Na **vertical**:

$$\text{Termo viscoso: } A_z \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \sim A_z \frac{U}{H^2}$$

$$\text{Termo não–linear: } v \frac{\partial u}{\partial y} \sim \frac{U^2}{L}$$

$$A_z \frac{U}{H^2} \simeq \frac{U^2}{L} \qquad \boxed{A_z \simeq \frac{H^2 U}{L}}$$

Na expressão $A_z \simeq 10^C A_y$ $(A_x \equiv A_y)$ quanto vale C?

Os termos não–lineares importam?

Nas correntes médias, a viscosidade deve compensar a não–linearidade.

Na **horizontal**:

Termo viscoso: $A_y \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim A_y \dfrac{U}{L^2}$

Termo não–linear: $v \dfrac{\partial u}{\partial y} \sim \dfrac{U^2}{L}$

$$A_y \frac{U}{L^2} \simeq \frac{U^2}{L} \qquad \boxed{A_y \simeq LU}$$

Na **vertical**:

Termo viscoso: $A_z \dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2} \sim A_z \dfrac{U}{H^2}$

Termo não–linear: $v \dfrac{\partial u}{\partial y} \sim \dfrac{U^2}{L}$

$$A_z \frac{U}{H^2} \simeq \frac{U^2}{L} \qquad \boxed{A_z \simeq \frac{H^2 U}{L}}$$

Na expressão $A_z \simeq 10^C A_y$ $(A_x \equiv A_y)$ quanto vale C?

Os termos não–lineares importam?

Nas correntes médias, a viscosidade deve compensar a não–linearidade.

Na **horizontal**:

Termo viscoso: $A_y \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim A_y \dfrac{U}{L^2}$

Termo não–linear: $v \dfrac{\partial u}{\partial y} \sim \dfrac{U^2}{L}$

$$A_y \frac{U}{L^2} \simeq \frac{U^2}{L} \qquad \boxed{A_y \simeq LU}$$

Na **vertical**:

Termo viscoso: $A_z \dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2} \sim A_z \dfrac{U}{H^2}$

Termo não–linear: $v \dfrac{\partial u}{\partial y} \sim \dfrac{U^2}{L}$

$$A_z \frac{U}{H^2} \simeq \frac{U^2}{L} \qquad \boxed{A_z \simeq \frac{H^2 U}{L}}$$

Na expressão $A_z \simeq 10^C A_y$ $(A_x \equiv A_y)$ quanto vale C?

Os termos não–lineares importam?

Nas correntes médias, a viscosidade deve compensar a não–linearidade.

Na **horizontal**:

Termo viscoso: $A_y \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim A_y \dfrac{U}{L^2}$

Termo não–linear: $v \dfrac{\partial u}{\partial y} \sim \dfrac{U^2}{L}$

$$A_y \frac{U}{L^2} \simeq \frac{U^2}{L} \quad \boxed{A_y \simeq LU}$$

Na **vertical**:

Termo viscoso: $A_z \dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2} \sim A_z \dfrac{U}{H^2}$

Termo não–linear: $v \dfrac{\partial u}{\partial y} \sim \dfrac{U^2}{L}$

$$A_z \frac{U}{H^2} \simeq \frac{U^2}{L} \quad \boxed{A_z \simeq \frac{H^2 U}{L}}$$

Na expressão $A_z \simeq 10^C A_y$ $(A_x \equiv A_y)$ quanto vale C?

$A_z \simeq \dfrac{H^2}{L^2} A_x \quad A_z \simeq 10^{-6} A_x \quad C = -6$ ou seja, $\quad \therefore \quad A_z \ll A_x$

Roteiro

2 Análise de Escala

- Para começo de conversa...
- Assimetria Horizontal × Vertical
- A Viscosidade Turbulenta é Assimétrica
- Navier–Stokes - Hidrostática
- Geostrofia e Dinâmica de Ekman
- Estratificação e Viscosidade Turbulenta

O Peso da Hidrostática

$$\frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + 2\Omega\cos\theta u - g + A_i\frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2}$$

Abrindo a derivada, escalando e usando o resultado anterior:

$$\frac{W}{T} + \frac{UW}{L} + \frac{UW}{L} + \frac{W^2}{H} = -\alpha\frac{P}{H} + 2\Omega U - g + 10^5\frac{W}{L^2} + 10^5\frac{W}{L^2} + 10^{-}1\frac{W}{H^2}$$

Repita os passos acima entendendo de onde veio cada um desses termos.

Análise de Escala Vertical

$$\frac{W}{T} + \frac{UW}{L} + \frac{UW}{L} + \frac{W^2}{L} = -\alpha\frac{P}{H} + 2\Omega\, U - g + 10^5\frac{W}{L^2} + 10^5\frac{W}{L^2} + 10^-1\frac{W}{H^2}$$

Substituindo (tudo em unidades do SI):

$W = 10^{-4}$ $\quad L = 10^6$ $\quad g = 10$

$T = 10^6$ $\quad H = 10^3$ $\quad \alpha = 10^{-3}$

$U = 0.1$ $\quad \Omega = 10^{-4}$

$$10^{-10} + 10^{-11} + 10^{-11} + 10^{-11} = \mathbf{10} + 10^{-5} + \mathbf{10} + 10^{-11} + 10^{-11} + 10^{-11}$$

Separando a Hidrostática

O balanço dominante em $\hat{z}$ é hidrostático, por 5 ordens de grandeza.

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = -g \quad \text{ou} \quad p = -\int_0^H \rho g \, dz.$$

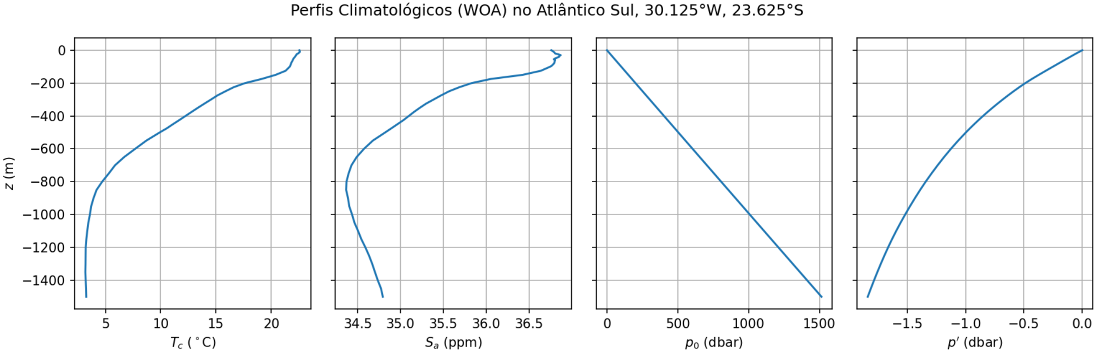
Para isolar o efeito da compressão hidrostática, fazemos

$\rho = \rho_0 + \hat{\rho}(z) + \rho'(x, y, z, t)$ o que leva a $p = p_0(z) + p'(x, y, z, t)$ e

$\dfrac{\partial p_0}{\partial z} = -g\rho_0$ integrar em $z \rightsquigarrow$ hidrostática para um fluido homogêneo.

Na Prática

Perfis a partir da climatologia WOA. O local não tem nada de especial.



Perceba a diferença de escala entre p_0 e p'.

Quando podemos fazer $p \longleftarrow p'$?

Podemos[2] fazer essa troca quando

$$\boxed{\frac{Dw}{Dt} \ll g\frac{\rho'}{\rho_0}} \text{ g=10 m.s}^2, \rho_0 = 1000\text{kg.m}^{-3}, \rho' = 5\text{kg.m}^{-3}\ \frac{Dw}{Dt} \ll 0.05\text{ m.s}^{-2}.$$

- Vimos no slide 14 que, nas escalas que nos interessam, $\frac{Dw}{Dt} \sim 10^{-10}$.
- Portanto separar a hidrostática e seus efeitos na densidade média na eq. de NS é justificado. Essa é a aproximação de Boussinesq.
- É crucial notar que as anomalias de densidade e de altura geram gradientes de pressão de natureza hidrostática que causam movimento.

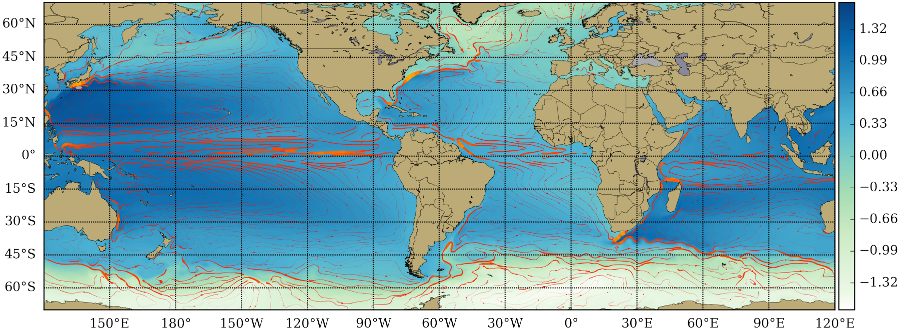
[2] Livro do Vallis

Roteiro

Correntes de Borda Oeste (CBOs)

- Anote o nome de 5 correntes de borda oeste.
- Da figura, estime a ordem de grandeza da largura delas.
- Qual a diferença de altura entre um lado e outro delas?

Pseudo-linhas de corrente sobre altura dinâmica (m)



Análise de escala das CBOs

Fazendo $p \longleftarrow p'$ e $\rho \longleftarrow \rho'$,

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\dfrac{\partial u}{\partial t} & + & u\dfrac{\partial u}{\partial x} + \cdots & = & -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} & + & fv - 2\Omega\cos\theta w & + & A_x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cdots \\
\dfrac{U}{T} & + & \dfrac{U^2}{L} + \cdots & = & \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\Delta P}{\Delta x} & + & 10^{-4}U + 10^{-4}W & + & 10^5\dfrac{U}{L^2} + \cdots \\
10^{-6} & + & 10^{-5} + \cdots & = & 10^{-4} & + & 10^{-4} + 10^{-8} & + & 10^{-5}
\end{array}
$$

O Δp vem da hidrostática: $\Delta p = \rho g \Delta\eta \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\Delta P}{\Delta x} = g\dfrac{\Delta\eta}{\Delta x} \sim 10\dfrac{1}{10^5}$

Dominam os termos da pressão e de Coriolis, i.e.: **geostrofia**. Escreva as equações geostróficas em termos de ρ, x, y, u, v, f e p.

Pontos a ponderar

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} & = & fv \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} & = & -fu \end{cases}$$

- Geostrofia domina por um fator de 10, não é como hidrostática.
- Essa dominância decorre das nossas escolhas de U, L, T etc.
- Para saber se nossas escolhas são apropriadas, devemos comparar o termo de Coriolis com a aceleração.

O número de Rossby

$$\frac{\text{advectivo}}{\text{Coriolis}} = \frac{U^2}{fLU} = \frac{U}{fL} = Ro \ll 1, \text{N. de Rossby (advectivo)}$$

$$\frac{\text{local}}{\text{Coriolis}} = \frac{U}{TUf} = \frac{1}{fT} = Ro_T \ll 1, \text{N. de Rossby (inercial)}$$

- $T = \dfrac{1}{f}$ é a escala inercial de tempo. Perturbações da pressão que duram muito mais que T são afetadas pela rotação.
- Faça as contas para ver quanto é esse *período inercial* para 30°S.
- Ro é mais usado que Ro_T. Neste curso lidaremos com $Ro \simeq 0.1$ a 0.01.

O número de Ekman

Por um argumento semelhante podemos comparar:

$$\frac{\text{viscoso}}{\text{Coriolis}} = \frac{A_z U/H^2}{fU} = \frac{A_z}{fH^2} = Ek \ll 1\,, \text{N. de Ekman}$$

- Veja o slide 20.
- Faça você mesmo/a a análise de escala
- Use os valores que usamos antes, mas no último termo use A_z e varie[3] o valor de H para obter $Ek \ll 1$ e $Ek \simeq 1$.

[3] uma voz do além sussurou "Python" no seu ouvido

Como interpretar $Ek \ll 1$

- A viscosidade turbulenta num sistema que gira rápido só é relevante em escalas muito menores que H.
- Num dado f, A_z depende do fluxo e H é a prof. da termoclina, O(1000)m.
- $Ek \ll 1$: nessa escala vertical a viscosidade turbulenta é irrelevante.
- Se diminurmos a escala de uma ou duas ordens de grandeza, $Ek \to 1$.
- Portanto A_z é relevante junto à superfície, junto à *camada de Ekman*, que é fina comparada com H.

Roteiro

2 Análise de Escala

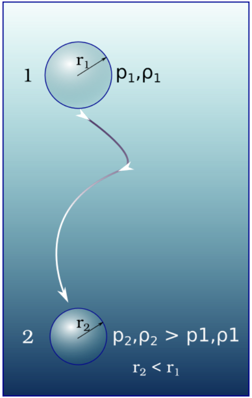
- Para começo de conversa...
- Assimetria Horizontal $\times$ Vertical
- A Viscosidade Turbulenta é Assimétrica
- Navier–Stokes - Hidrostática
- Geostrofia e Dinâmica de Ekman
- Estratificação e Viscosidade Turbulenta

A Ideia de Estabilidade

- O livro do Pond & Pickard discute isso

  no tópico sobre estabilidade dinâmica e difusão dupla.

- Pensando numa parcela de fluido que se move verticalmente:



- A parcela é empurrada da posição 1 para a 2.

- Ela deveria voltar para 1, mas está sujeita a uma pressão

  $p_2 > p_1$ e pode ser comprimida.

- Se for comprimida diabaticamente e perder calor, não

  vai voltar até 1.

Uma questão Termodinâmica

Numa coluna d'água

estável é necessário empurrar[4] a parcela para movê-la.;

instável a parcela se moverá por ser mais (ou menos) densa que o fuido em volta dela;

neutra a parcela mantém seu momentum vertical, que pode ser zero.

[4] exercer trabalho, dar energia para

Definição de Estabilidade

$$E = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial z} - \frac{g}{C^2}$$ onde C é a velocidade do som.

$E < 0 \Rightarrow$ Instável.

$E = 0 \Rightarrow$ Neutra.

$E > 0 \Rightarrow$ Estável.

- No caso, ρ é a densidade in-situ, e.g.: medindo S e T com Argo e calculando a densidade via TEOS-10.
- O fator $\frac{g}{C^2}$ contabiliza o efeito da compressibilidade.
- Se você viu $\frac{\partial \rho}{\partial z}$ e pensou na frequência de Brunt-Väisälä, parabéns!

O Número de Richardson

Introduzindo a frequência de Brunt-Väisälä em E:

$$N^2 = gE = g\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial z} - \frac{g}{C^2}\right] = \frac{g}{\rho}\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial z}$$

O Número de Richardson compara estratificação com cisalhamento vertical:

$$Ri = \frac{N^2}{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2} \begin{cases} Ri > 0 \leadsto \text{turbulência diminui.} \\ Ri < 0 \leadsto \text{turbulência aumenta.} \end{cases}$$

Conectando com a Viscosidade Vertical

Dado o valor de $\frac{\partial u}{\partial z}$, quanto...

1. menos estratificado o fluido, menor N^2, maior a viscosidade turbulenta.
   - pense no interior de uma camada, longe da termoclina. A_z é grande e a camada se move como um todo.
2. mais estratificado o fluido, maior N^2, menor a viscosidade turbulenta.
   - pense na termoclina. A_z é pequeno, a transmissão vertical de momentum é ineficaz, as camadas se movem independentemente uma da outra.

Pontos a ponderar

- Por esse raciocínio, a ideia de um oceano de duas camadas homogêneas que deslizam uma sobre a outra é bem razoável, dada a ubiquidade da termoclina.
- A discussão sobre estabilidade tem raízes na **termodinâmica**;
- a dedução heurística do *stress* de Reynolds se baseou na correlação, portanto na **estatística**;
- ambas tem consequências extremamente interessantes para a **dinâmica** de larga escala.
- Sinceramente espero que você tenha apreciado a viagem.

Fim do Tema 2