# Circulação Geral dos Oceanos

Paulo S. Polito, Ph.D.

Instituto Oceanográfico da Universidade de São Paulo

São Paulo, 2022

# Roteiro

# Roteiro

1. Fluxo Médio e Variabilidade
   - Para começo de conversa...
   - Revendo Navier–Stokes
   - O número de Reynolds
   - Decomposição de Reynolds
   - Navier–Stokes para o fluxo médio
   - Viscosidade turbulenta

# Objetivos desta aula:

- Retomar a interpretação da equação de Navier-Stokes (NS).
- Considerar os termos não-lineares e viscosos: número de Reynolds.
- Entender a decomposição de Reynolds.
- Derivar o *Stress* de Reynolds.
- Obter Navier-Stokes para o fluxo médio.

Pond & Pickard cap. 7.

# Conhecimento prévio:

- Familiaridade com a equação de Navier-Stokes (NS).
- Noção de média, anomalia e correlação.
- Saber calcular e interpretar fisicamente $\vec{\nabla} E$, $\vec{\nabla}\vec{v}$, $\vec{\nabla}\cdot\vec{v}$, $\vec{\nabla}\times\vec{v}$ e $\nabla\vec{u}$
- Se você tem dificuldade com qualquer um desses pontos, **estude-o**.

# Roteiro

# Navier–Stokes

Na forma vetorial, em unidades de aceleração, temos:

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p - 2\vec{\Omega}\times\vec{v} + \vec{g} + \vec{F}$$

$$\begin{cases} (x)\ \dfrac{Du}{Dt} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} + 2\Omega\sin\theta v - 2\Omega\cos(\theta)w + F_x, \\ (y)\ \dfrac{Dv}{Dt} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} - 2\Omega\sin\theta u + F_y, \\ (z)\ \dfrac{Dw}{Dt} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} + 2\Omega\cos\theta u - g + F_z\,. \end{cases}$$

Os termos em destaque são desprezíveis. Porquê?[1]

[1] Responda todas as perguntas numa folha de rascunho. Depois discuta a resposta.

# Derivada material e os termos não–lineares

$$\frac{D\square}{Dt} = \frac{\partial\square}{\partial t} + u\frac{\partial\square}{\partial x} + v\frac{\partial\square}{\partial y} + w\frac{\partial\square}{\partial z}$$

Você pode fazer todos os $\square = u$ ou todos $v$ ou todos $w$,

dependendo se a equação é da componente $x$, $y$, ou $z$.

---

- Precisamos de derivada material, uma derivada simples não basta?
- Fisicamente, porque a direção da velocidade fora da derivada e a direção da derivada são fixas? ($u$ com $\frac{\partial}{\partial x}$ e assim por diante)
- Porque os termos não–lineares tem esse nome e qual o papel deles?

# O termo viscoso

- Podemos intuir várias coisas:
  - Atrito, perda de momentum e energia.
  - Resistência à deformação do fluido.
  - Difusão ou transmissão de momentum.

$$F_{\bigcirc} = \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 \square}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \square}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \square}{\partial z^2}\right).$$

Aqui se $\bigcirc = x$ , $\square = u$, se $\bigcirc = y$ , $\square = v$, e se $\bigcirc = z$ , $\square = w$.

Ele depende da variação da deformação. É um jeito de medir quanto as camadas de fluido se esfregam umas nas as outras.

# Roteiro

1. Fluxo Médio e Variabilidade
   - Para começo de conversa...
   - Revendo Navier–Stokes
   - O número de Reynolds
   - Decomposição de Reynolds
   - Navier–Stokes para o fluxo médio
   - Viscosidade turbulenta

# Os termos não–lineares importam?

- Termos não–lineares **causam** variabilidade espacial e temporal.

- Termos viscosos **reduzem** essa variabilidade.

Faça como Osborne Reynolds, escreva a razão entre os dois termos

$$Re = \frac{\text{não–linear}}{\text{viscoso}} \text{ usando } \nu = \frac{\mu}{\rho}.$$

Velocidade tem dimensão de $U$, comprimento horizontal de $L$ e $\nu$...é $\nu$ mesmo.

Obtenha o **número de Reynolds** $Re = \dfrac{UL}{\nu}$.

# Os termos não–lineares importam?

- Termos não–lineares **causam** variabilidade espacial e temporal.
- Termos viscosos **reduzem** essa variabilidade.

Faça como Osborne Reynolds, escreva a razão entre os dois termos
$Re = \dfrac{\text{não–linear}}{\text{viscoso}}$ usando $\nu = \dfrac{\mu}{\rho}$.
Velocidade tem dimensão de $U$, comprimento horizontal de $L$ e $\nu$...é $\nu$ mesmo.
Obtenha o **número de Reynolds** $Re = \dfrac{UL}{\nu}$.

# Aplicação: laminar ou turbulento?

Calcule $Re$ e responda se o fluxo é laminar ou turbulento nestes 2 casos:

1. o fluxo num cano de diâmetro 0.1 m com um vazamento que gera fluxo de $10^{-3}$ m/s e para
2. o fluxo na Corrente do Brasil com $10^5$ m de largura e fluxo de 0.5 m/s.

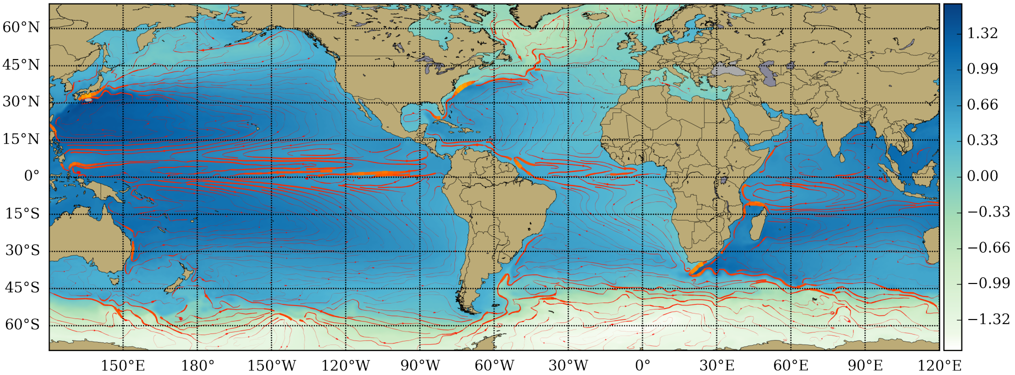
Use $\mu = 10^{-3}$ kg/(m.s), $\rho = 10^3$ kg/m³. Fluxos com $Re < 10^4$ são laminares, e se $Re > 10^6$ são turbulentos. Esses valores variam bastante de acordo com a geometria do problema, não são fixos.

# Roteiro

# O foco deste curso é...

- A circulação **média**.
- A circulação de larga escala.
- Longe das bordas, oceano profundo.

**Pseudo-linhas de corrente sobre altura dinâmica (m)**



# Pausa para um vídeo da NASA/JPL

- Saída do modelo ECCO2.
- Assimila dados de satélites, flutuadores etc.
- Mostra pseudo–linhas de corrente sobre topografia.
- Cores representam a TSM.

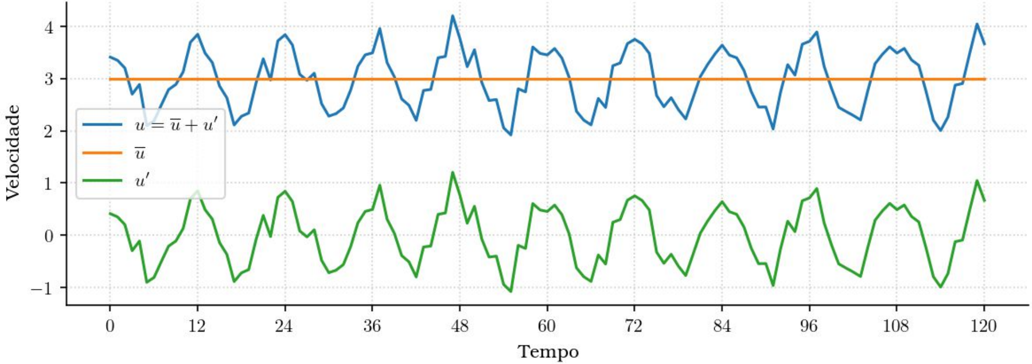
Você reconhece os padrões do slide 13 subjacentes à animação?

# Da intuição à quantificação

A **decomposição de Reynolds** é só isto:

$u = \overline{u} + u'$ onde

$\overline{u}$ é a média e $u'$ é a variabilidade.



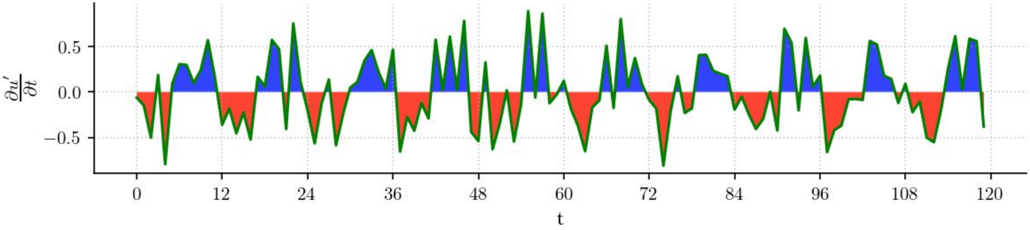
# Roteiro

1. Fluxo Médio e Variabilidade
   - Para começo de conversa...
   - Revendo Navier–Stokes
   - O número de Reynolds
   - Decomposição de Reynolds
   - Navier–Stokes para o fluxo médio
   - Viscosidade turbulenta

# Termo Local

A ideia é substituir $u = \overline{u} + u'$ e tirar a média:

$$\overline{\frac{\partial u}{\partial t}} = \overline{\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \cancel{\frac{\partial u'}{\partial t}}}$$ Olhe a figura abaixo.




Perceba que, com o passar do tempo, **as áreas + e - se cancelam** (aproximadamente).

# Termo não–linear

Novamente, vou fazer a decomposição de Reynolds e tirar a média:

$$\overline{(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}} = \overline{u\frac{\partial u}{\partial x}} + \overline{v\frac{\partial u}{\partial y}} + \overline{w\frac{\partial u}{\partial z}} + \cdots$$

Vou mostrar na componente $\hat{x}$, as outras são análogas.

$$= \overline{(\bar{u}+u')\frac{\partial(\bar{u}+u')}{\partial x}} + \overline{(\bar{v}+v')\frac{\partial(\bar{u}+u')}{\partial y}} + \overline{(\bar{w}+w')\frac{\partial(\bar{u}+u')}{\partial z}} + \cdots$$

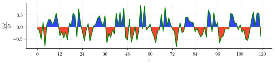
Abrindo,

$$= \overline{\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}} + \overline{\bar{u}\frac{\partial u'}{\partial x}} + \overline{u'\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}} + \overline{u'\frac{\partial u'}{\partial x}} + \quad \overline{\bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}} + \overline{\bar{v}\frac{\partial u'}{\partial y}} + \overline{v'\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}} + \overline{v'\frac{\partial u'}{\partial y}} +$$

$$\overline{\bar{w}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}} + \overline{\bar{w}\frac{\partial u'}{\partial z}} + \overline{w'\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}} + \overline{w'\frac{\partial u'}{\partial z}} + \cdots$$

# Termo não–linear

Mas note que pelo mesmo argumento




posso cancelar todos os produtos média×variabilidade

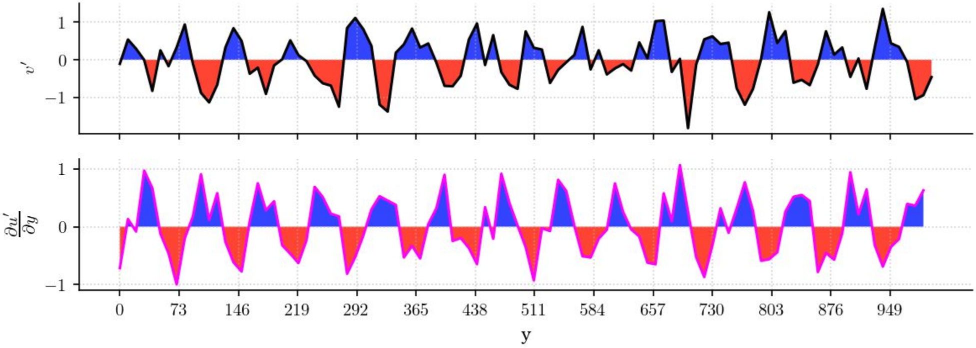
pois a média da média é constante.

$$
\begin{aligned}
\overline{(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}} = \; & \overline{\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}} + \cancel{\overline{\bar{u}\frac{\partial u'}{\partial x}}} + \cancel{\overline{u'\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}}} + \overline{u'\frac{\partial u'}{\partial x}} + \\
& \overline{\bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}} + \cancel{\overline{\bar{v}\frac{\partial u'}{\partial y}}} + \cancel{\overline{v'\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}}} + \overline{v'\frac{\partial u'}{\partial y}} + \\
& \overline{\bar{w}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}} + \cancel{\overline{\bar{w}\frac{\partial u'}{\partial z}}} + \cancel{\overline{w'\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}}} + \overline{w'\frac{\partial u'}{\partial z}} + \cdots
\end{aligned}
$$

Os termos em vermelho **não** se anulam necessariamente. Porquê?

# O efeito da correlação

Se os termos da forma $\overline{v' \frac{\partial u'}{\partial y}}$ forem **correlacionados**:




A **média do produto não será zero**, no caso é negativa,

apesar das médias tanto de $v'$ como de $\frac{\partial u'}{\partial y}$ tenderem a zero.

# Os termo da pressão e de Coriolis

Para facilitar, usei o volume específico $\alpha$.

$$\overline{\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p} = \overline{(\bar{\alpha}+\alpha')\frac{\partial(\bar{p}+p')}{\partial x}} + \cdots = \overline{\bar{\alpha}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}} + \cancel{\overline{\bar{\alpha}\frac{\partial p'}{\partial x}}} + \cancel{\overline{\alpha'\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}}} + \cancel{\overline{\alpha'\frac{\partial p'}{\partial x}}} + \cdots$$

O último é desprezível pois $\alpha' \ll \alpha$ e $p' \ll p$.

Coriolis também é bem simples:

$$\overline{2\Omega \sin\theta(\bar{u}+u')} = 2\Omega \sin\theta\overline{(\bar{u}+u')} = 2\Omega \sin\theta\bar{u}$$

As outras componentes ($\hat{y}$ e $\hat{z}$) são análogas.

# Roteiro

1. Fluxo Médio e Variabilidade
   - Para começo de conversa...
   - Revendo Navier–Stokes
   - O número de Reynolds
   - Decomposição de Reynolds
   - Navier–Stokes para o fluxo médio
   - Viscosidade turbulenta

# O melhor sempre fica para o final

# Equação da continuidade

Para um fluxo incompressível

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0, \quad \overline{\frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial x}} + \overline{\frac{\partial(\bar{v} + v')}{\partial y}} + \overline{\frac{\partial(\bar{w} + w')}{\partial z}} = 0$$

$\Rightarrow \overline{\vec{\nabla} \cdot \vec{u}} = 0$ e $\overline{\vec{\nabla} \cdot \vec{u}'} = 0.$

Do slide 19, somo $\vec{u}' \cdot (0) = \overline{\vec{u}' \cdot \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}'\right)}$ à componentes ′ do termo não–linear:

$$u'\frac{\partial u'}{\partial x} + v'\frac{\partial u'}{\partial y} + w'\frac{\partial u'}{\partial z} + u'\left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z}\right) =$$

Abra os parênteses. Pense na regra de derivadas do produto.

# De volta para Navier–Stokes

Isso mesmo, desfazendo a regra de derivadas do produto:

$$= \frac{\partial(u'u')}{\partial x} + \frac{\partial(u'v')}{\partial y} + \frac{\partial(u'w')}{\partial z}$$

Colocando na componente $\hat{x}$ da eq. de Navier–Stokes **para o fluxo médio**:

$$\begin{aligned} \frac{D\bar{u}}{Dt} \quad = \quad & -\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - 2\Omega(\sin\theta\bar{v} - \cos\theta\bar{w}) + \\ & \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\bar{u}}{\partial z^2}\right) - \underbrace{\left(\frac{\partial\overline{u'u'}}{\partial x} + \frac{\partial\overline{u'v'}}{\partial y} + \frac{\partial\overline{u'w'}}{\partial z}\right)}_{\text{esta parte vem do termo não –linear}} \end{aligned}$$

# Juntando as partes

Estamos assumindo $\mu$ e $\rho$ constantes,
$\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}\right) = \left(\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}\right)$ e assim por diante.
Juntando o termo viscoso com a parte que veio do termo não linear:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \overline{u'u'} + \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \overline{u'v'} + \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \overline{u'w'}\right)$$

Os termos em vermelho são chamados de *stress* de Reynolds.

# O pulo do gato

A grande sacada de Osborne Reynolds foi **postular** uma equivalência formal entre o *stress* viscoso, (molecular, propriedade da matéria) e os termos dependentes das correlações (propriedade do fluxo):

$$\begin{cases} -u'u' & = & A_x \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial x} \\ -u'v' & = & A_y \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial y} \\ -u'w' & = & A_z \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial z} \end{cases} \quad \cdots \quad \text{e termos análogos para } \hat{y} \text{ e } \hat{z}.$$

# Pontos a ponderar

- Por uma questão de escala e simetria, $A_x \simeq A_y \neq A_z$.
- Esses termos de **viscosidade turbulenta** são muito (O$(10^6)$ vezes) maiores que os da viscosidade molecular.
- Esses argumentos funcionam para fluxos turbulentos, com $Re > 10^6$.
- O oceano é extremamente turbulento e portanto a dissipação de energia e a transmissão de momentum são propriedades estatísticas do fluxo e não apenas da matéria.

# Navier–stokes para o fluxo médio

Abandonando as barras, usando $f = 2\Omega \sin\theta$

$$
\begin{cases}
\dfrac{Du}{Dt} &= -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} + fv + A_i \nabla^2 u, \\
\dfrac{Dv}{Dt} &= -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} - fu + A_i \nabla^2 v, \\
\dfrac{Dw}{Dt} &= -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} - g + A_i \nabla^2 w .
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
A_i \nabla^2 u &= A_x \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_y \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A_z \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\
A_i \nabla^2 v &= A_x \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + A_y \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} + A_z \dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2} \\
A_i \nabla^2 w &= A_x \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + A_y \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + A_z \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} .
\end{cases}
$$

Dê uma olhada na figura do slide 13. Estas equações regem essa parte do fluxo, aquela subjacente à animação da NASA/JPL.

Quais os termos associados à **(1) geostrofia, (2) dinâmica de Ekman e (3) hidrostática**?

# Fim do Tema 1

Clique aqui e anime-se para pensar no assunto.

Nota: fruto do trabalho de um egresso do IO, César Rocha, Ph.D.