ENGENHARIA DE BIOSSISTEMAS – FZEA / USP

ZEB1027 FENÔMENOS DE TRANSPORTE

# SCALE-UP E SEMELHANÇA: EXEMPLOS

- EQUAÇÕES DIMENSIONAIS DE GRANDEZAS DA MECÂNICA
- FORÇA DE ARRASTO SOBRE ESFERA → ADIMENSIONAIS
- FORÇA DE ARRASTO SOBRE ESFERA → SEMELHANÇA

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

FACULDADE DE ZOOTECNIA E ENGENHARIA DE ALIMENTOS

USP

FZEA

# Equações dimensionais de grandezas

- Usando FLT como base de dimensões na Mecânica, escreva as equações dimensionais das grandezas: velocidade, aceleração, massa, densidade, viscosidade dinâmica e viscosidade cinemática.

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \quad \rightarrow \quad [v] = \frac{[s]}{[t]} = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}} \quad \Rightarrow \quad [v] = \mathrm{L}\,\mathrm{T}^{-1}$$

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \quad \rightarrow \quad [a] = \frac{[v]}{[t]} = \frac{\mathrm{L}\,\mathrm{T}^{-1}}{\mathrm{T}} \quad \Rightarrow \quad [a] = \mathrm{L}\,\mathrm{T}^{-2}$$

$$m = \frac{F}{a} \quad \rightarrow \quad [m] = \frac{[F]}{[a]} = \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{L}\,\mathrm{T}^{-2}} \quad \Rightarrow \quad [m] = \mathrm{F}\,\mathrm{L}^{-1}\,\mathrm{T}^{2}$$

# Equações dimensionais de grandezas

- Usando FLT como base de dimensões na Mecânica, escreva as equações dimensionais das grandezas: velocidade, aceleração, massa, densidade, viscosidade dinâmica e viscosidade cinemática. (cont.)

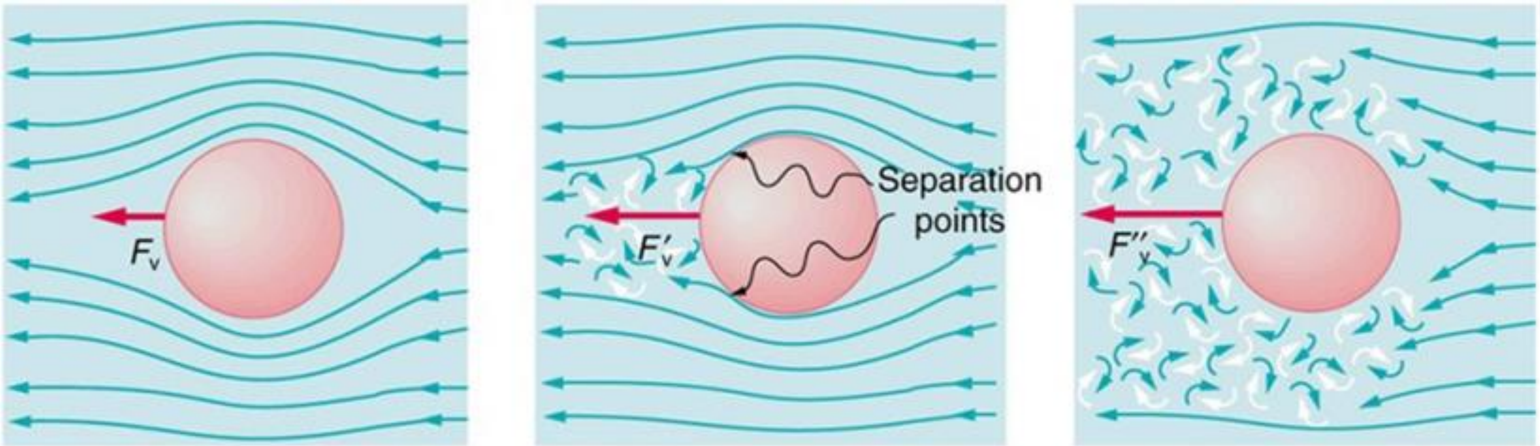
$$\rho = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V} \quad \rightarrow \quad [\rho] = \frac{[m]}{[V]} = \frac{\mathrm{F\,L^{-1}T^{2}}}{\mathrm{L^{3}}} \quad \Rightarrow \quad [\rho] = \mathrm{F\,L^{-4}T^{2}}$$

$$\mu = \frac{F}{A}\frac{\Delta y}{v} \quad \rightarrow \quad [\mu] = \frac{[F]}{[A]}\frac{[\Delta y]}{[v]} = \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{L^{2}}}\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{L\,T^{-1}}} \quad \Rightarrow \quad [\mu] = \mathrm{F\,L^{-2}T}$$

$$\upsilon = \frac{\mu}{\rho} \quad \rightarrow \quad [\upsilon] = \frac{[\mu]}{[\rho]} = \frac{\mathrm{F\,L^{-2}T}}{\mathrm{F\,L^{-4}T^{2}}} \quad \Rightarrow \quad [\upsilon] = \mathrm{L^{2}T^{-1}}$$

# Esfera sob arrasto: adimensionais

- Pretende-se estudar como a força de arrasto $F$ sobre uma esfera imersa em uma corrente fluida depende do diâmetro $D$ da esfera assim como da velocidade $v$, da viscosidade dinâmica $\mu$ e da densidade $\rho$ do fluido. Usando $(\rho,v,D)$ como parâmetros repetentes, verifique que $F/(\rho v^2 D^2) = \mathrm{Eu}$ (número de Euler) e $\rho v D/\mu = \mathrm{Re}$ (número de Reynolds) surgem como adimensionais.



# Esfera sob arrasto: adimensionais

- Passo 1: listar os parâmetros primitivos envolvidos
  - Parâmetros $\rightarrow$ $F$ (dependente) , $D$ , $v$ , $\rho$ , $\mu$ (independentes)
- Passo 2: selecionar (escolher) as dimensões da base
  - Problema de mecânica dos fluidos: $\mathrm{F\ L\ T} \rightarrow m = 3$
- Passo 3: equação dimensional dos parâmetros listados
  - Parâmetro dependente $\rightarrow$ força: $[F] = \mathrm{F}$
  - Parâmetro independente $\rightarrow$ diâmetro: $[D] = \mathrm{L}$
  - Parâmetro independente $\rightarrow$ velocidade: $[v] = \mathrm{L\ T}^{-1}$
  - Parâmetro independente $\rightarrow$ densidade: $[\rho] = \mathrm{F\ L}^{-4}\,\mathrm{T}^{2}$
  - Parâmetro independente $\rightarrow$ viscosidade: $[\mu] = \mathrm{F\ L}^{-2}\,\mathrm{T}$

# Esfera sob arrasto: adimensionais

- Passo 4: selecionar $m$ (no caso, 3) parâmetros que, em conjunto, incluam as dimensões da base (no caso, FLT)
  - Força: $[F] = \mathrm{F}$ $\longrightarrow$ **parâmetro remanescente #1**
  - Diâmetro: $[D] = \boxed{\mathrm{L}}$
  - Velocidade: $[v] = \boxed{\mathrm{L\,T^{-1}}}$
  - Densidade: $[\rho] = \boxed{\mathrm{F\,L^{-4}\,T^{2}}}$

  **parâmetros repetentes**

  - Viscosidade: $[\mu] = \mathrm{F\,L^{-2}\,T}$ $\longrightarrow$ **parâmetro remanescente #2**
- Passo 5: obter $r = n - m$ ($\rightarrow$ $r = 5 - 3 = 2$ $\rightarrow$ $\Pi_1$ e $\Pi_2$ ) adimensionais combinando (potências) os parâmetros repetentes com um parâmetro remanescente por vez e resolvendo o sistema linear resultante ( $\rightarrow$ expoentes)

# Esfera sob arrasto: adimensionais

- Obtenção do número adimensional $\Pi_1 \leftrightarrow F$

$$\Pi_1 = \rho^{\alpha_1} \cdot v^{\alpha_2} \cdot D^{\alpha_3} \cdot F$$

$$[\ ] \Big\downarrow \ \mathbf{F\,L\,T}$$

$$F^0L^0T^0 = (F^1L^{-4}T^2)^{\alpha_1} \cdot (L^1T^{-1})^{\alpha_2} \cdot (L^1)^{\alpha_3} \cdot F^1$$

$$= F^{\alpha_1+1}\, L^{-4\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\, T^{2\alpha_1-\alpha_2}$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 + 1 &= 0 \\ -4\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \alpha_1 &= -1 \\ \alpha_2 &= -2 \\ \alpha_3 &= -2 \end{aligned}\right\} \quad \boxed{\Pi_1 = \frac{F}{\rho v^2 D^2} = \text{Eu}}$$

# Esfera sob arrasto: adimensionais

- Obtenção do número adimensional $\Pi_2 \leftrightarrow \mu$

$$\Pi_2 = \rho^{\beta_1} \cdot v^{\beta_2} \cdot D^{\beta_3} \cdot \mu$$

$$[\ ] \downarrow \mathbf{F\,L\,T}$$

$$F^0L^0T^0 = (F^1L^{-4}T^2)^{\beta_1} \cdot (L^1T^{-1})^{\beta_2} \cdot (L^1)^{\beta_3} \cdot F^1L^{-2}T^1$$

$$= F^{\beta_1+1}\, L^{-4\beta_1+\beta_2+\beta_3-2}\, T^{2\beta_1-\beta_2+1}$$

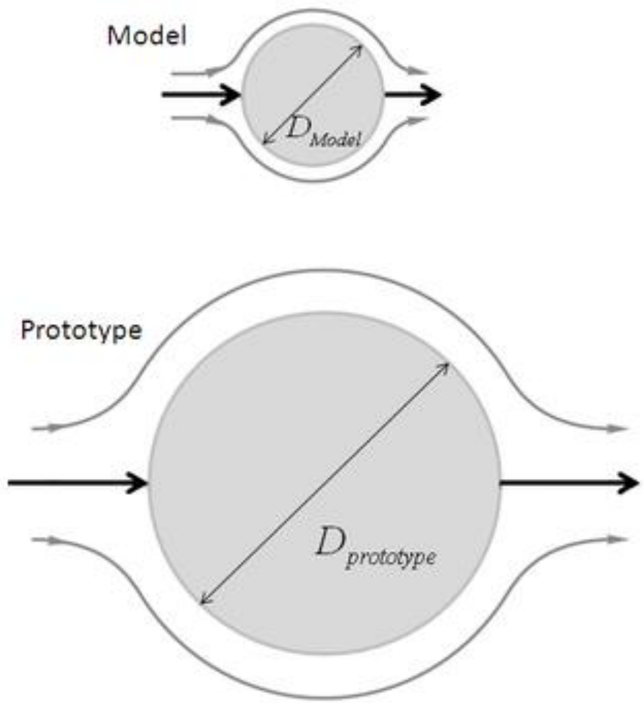
$$\Pi_2 = \mu / (\rho\, v\, D)$$

$$\left.\begin{aligned} \beta_1 + 1 = 0 \\ -4\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - 2 = 0 \\ 2\beta_1 - \beta_2 + 1 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \beta_1 = -1 \\ \beta_2 = -1 \\ \beta_3 = -1 \end{aligned}\right]$$

$$\boxed{\Pi_2 = \frac{\rho\, v D}{\mu} = \mathrm{Re}}$$

# Esfera sob arrasto: scale-up

- Deseja-se avaliar a força de arrasto sobre uma sonda esférica a ser imersa em um curso d'água. Em testes com um modelo na escala 1:5 em água a 20°C fluindo a 60 km/h, foi medida uma força de arrasto de 30 N.
- Sabendo que o protótipo será usado em água a 4°C, calcule a velocidade de escoamento que irá proporcionar condições de semelhança completa e, nestas condições de operação, avalie a força de arrasto que em princípio será observada no protótipo.



# Esfera sob arrasto: scale-up

**Lei das escalas:** $\mathrm{Re_m} = \mathrm{Re_p}$ **e** $\mathrm{Eu_m} = \mathrm{Eu_p}$

$$\left(\frac{\rho v D}{\mu}\right)_{\mathrm{m}} = \left(\frac{\rho v D}{\mu}\right)_{\mathrm{p}} \qquad \left(\frac{F}{\rho v^2 D^2}\right)_{\mathrm{m}} = \left(\frac{F}{\rho v^2 D^2}\right)_{\mathrm{p}}$$

$$\frac{\rho_{\mathrm{m}}}{\rho_{\mathrm{p}}}\frac{v_{\mathrm{m}}}{v_{\mathrm{p}}}\frac{D_{\mathrm{m}}}{D_{\mathrm{p}}} = \frac{\mu_{\mathrm{m}}}{\mu_{\mathrm{p}}} \qquad \frac{F_{\mathrm{m}}}{F_{\mathrm{p}}} = \frac{\rho_{\mathrm{m}}}{\rho_{\mathrm{p}}}\left(\frac{v_{\mathrm{m}}}{v_{\mathrm{p}}}\right)^2\left(\frac{D_{\mathrm{m}}}{D_{\mathrm{p}}}\right)^2$$

$$K_\rho K_v K_D = K_\mu \qquad K_F = K_\rho K_v^2 K_D^2$$

# Esfera sob arrasto: scale-up

| Parâmetro | Valor no modelo | Valor no protótipo |
|---|---|---|
| Dimensão ($\rightarrow K_D$) | 1 | 5 |
| Velocidade ($\rightarrow K_v$) | 60 km/h | $v_\mathrm{p}$ (a determinar) |
| Densidade ($\rightarrow K_\rho$) | 998,29 kg/m³ (a 20ºC) | 1000 kg/m³ (a 4ºC) |
| Viscosidade ($\rightarrow K_\mu$) | 1,003 cP (a 20ºC) | 1,569 cP (a 4ºC) |
| Força ($\rightarrow K_F$) | 30 N | $F_\mathrm{p}$ (a determinar) |

$$\frac{\rho_\mathrm{m}}{\rho_\mathrm{p}}\frac{v_\mathrm{m}}{v_\mathrm{p}}\frac{D_\mathrm{m}}{D_\mathrm{p}}=\frac{\mu_\mathrm{m}}{\mu_\mathrm{p}} \quad\Rightarrow\quad v_\mathrm{p}=v_\mathrm{m}\frac{K_\rho K_D}{K_\mu} \quad\rightarrow\quad v_\mathrm{p}\cong 18{,}74\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

$$\frac{F_\mathrm{m}}{F_\mathrm{p}}=\frac{\rho_\mathrm{m}}{\rho_\mathrm{p}}\left(\frac{v_\mathrm{m}}{v_\mathrm{p}}\right)^2\left(\frac{D_\mathrm{m}}{D_\mathrm{p}}\right)^2 \Rightarrow F_\mathrm{p}=\frac{F_\mathrm{m}}{K_\rho(K_v)^2(K_D)^2} \quad\rightarrow\quad F_\mathrm{p}\cong 73{,}23\,\mathrm{N}$$