ENGENHARIA DE BIOSSISTEMAS – FZEA / USP

ZEB1027 FENÔMENOS DE TRANSPORTE

TEOREMA DE TRANSPORTE DE REYNOLDS: FORMULAÇÃO

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

FACULDADE DE ZOOTECNIA E ENGENHARIA DE ALIMENTOS

- GRANDEZAS EXTENSIVAS vs. GRANDEZAS INTENSIVAS
- TEOREMA DE TRANSPORTE DE REYNOLDS – TTR
- TTR: FORMULAÇÃO MATEMÁTICA
- TTR: INTERPRETAÇÃO DOS TERMOS
- TTR: HIPÓTESES SIMPLIFICADORAS

USP FZEA

Grandezas: extensivas vs. intensivas

- Grandeza extensiva $\Rightarrow$ depende da extensão do meio
  - Ex: massa, número de moles, volume, energia total

- Grandeza intensiva $\Rightarrow$ variação ponto-a-ponto
  - Ex: densidade, pressão, energia específica, temperatura
  - Base molar: $\bar{\phi} = \dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}n} \Leftrightarrow \mathrm{d}\Phi = \bar{\phi}\,\mathrm{d}n \xrightarrow{\mathrm{d}n = c\,\mathrm{d}V} \Phi_{\mathrm{VC}} = \int_{\mathrm{VC}} \bar{\phi}\, c\, \mathrm{d}V$
  - Base mássica: $\phi = \dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}m} \Leftrightarrow \mathrm{d}\Phi = \phi\,\mathrm{d}m \xrightarrow{\mathrm{d}m = \rho\,\mathrm{d}V} \Phi_{\mathrm{VC}} = \int_{\mathrm{VC}} \phi\, \rho\, \mathrm{d}V$

Grandeza	Massa	QDM-linear	Energia total
Extensiva Φ	m	$m\vec{v}$	$E_{\mathrm{total}} = ½\, mv^2 + mgz + U$
Intensiva ϕ	1		$e_{\mathrm{total}} = ½\, v^2 + gz + u$

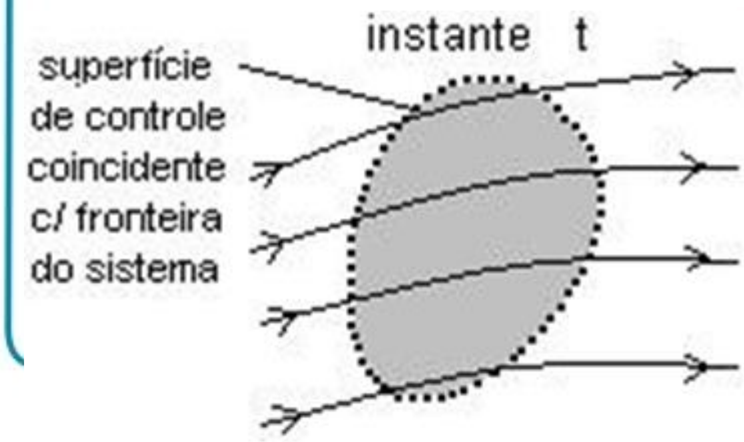
Teorema de transporte de Reynolds

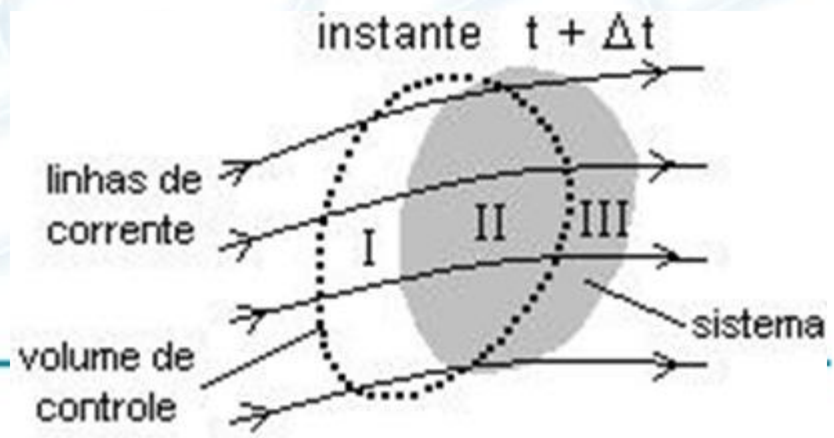
- Migrando do método de Lagrange p/ método de Euler
  - Tarefa: equivalência matemática entre as taxas de variação

Variação de grandeza extensiva associada à massa de controle (MC)

em termos de

Variações de grandeza intensiva associada ao volume de controle (VC)





Teorema de transporte de Reynolds

- Instante t : MC e VC coincidentes (VC fixo no espaço)

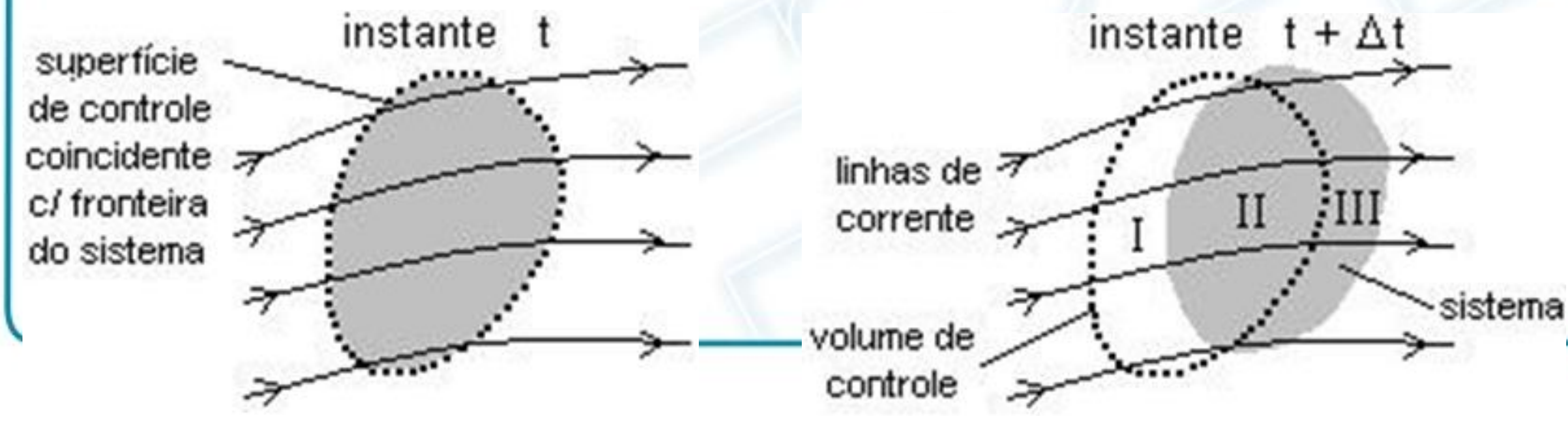
$$\Phi_{MC}(t) = \Phi_{VC}(t)$$

- Instante $t + \Delta t$: MC deslocada em relação ao VC fixo

$$\Phi_{MC}(t+\Delta t) = \Phi_{II}(t+\Delta t) + \Phi_{III}(t+\Delta t)$$

$$\Big\downarrow \; \Phi_{II} = \Phi_{VC} - \Phi_{I}$$

$$\Phi_{MC}(t+\Delta t) = \Phi_{VC}(t+\Delta t) - \Phi_{I}(t+\Delta t) + \Phi_{III}(t+\Delta t)$$



Teorema de transporte de Reynolds

- Taxa de variação: grandeza extensiva relativa à MC

$$\frac{d\Phi_{MC}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Phi_{MC}(t+\Delta t) - \Phi_{MC}(t)}{\Delta t}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{MC}(t+\Delta t) = \Phi_{VC}(t+\Delta t) & \\ -\Phi_{I}(t+\Delta t) & \\ +\Phi_{III}(t+\Delta t) & \end{aligned}$$

$$\Phi_{MC}(t) = \Phi_{VC}(t)$$

$$\frac{d\Phi_{MC}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Phi_{VC}(t+\Delta t) - \Phi_{I}(t+\Delta t) + \Phi_{III}(t+\Delta t) - \Phi_{VC}(t)}{\Delta t}$$

Teorema de transporte de Reynolds

- Taxa de variação: grandeza extensiva relativa à MC

$$\underbrace{\frac{d\Phi_{MC}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Phi_{MC}(t+\Delta t) - \Phi_{MC}(t)}{\Delta t}}$$

$$\frac{d\Phi_{MC}}{dt} = \boxed{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Phi_{VC}(t+\Delta t) - \Phi_{VC}(t)}{\Delta t}} \boxed{-\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Phi_{I}(t+\Delta t)}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Phi_{III}(t+\Delta t)}{\Delta t}}$$

Derivada parcial c/ relação ao tempo referente ao VC

Fluxos por SC_I + SC_{III} = SC: sinal $\leftrightarrow$ produto escalar

- Teorema de Transporte de Reynolds (TTR)

$$\frac{d\Phi_{MC}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \phi \rho \, dV + \oint_{SC} \phi \rho \, \vec{v} \cdot d\vec{A}$$

Fox, McDonald, Pritchard, "Introd. Mec. Fluidos"

TTR: interpretação dos termos

$\dfrac{\mathrm{d}\Phi_{MC}}{\mathrm{d}t}$	Taxa de variação c/ tempo da grandeza extensiva Φ_{MC} relativa à MC $\rightarrow$ princípios físicos de conservação
$\dfrac{\partial}{\partial t}\displaystyle\int_{VC}\phi\rho\,\mathrm{d}V$	Taxa c/ que a grandeza Φ varia, considerando todo VC $\phi =$ grandeza intensiva correspondente $(\phi = \mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}m)$ $\rho\mathrm{d}V =$ elemento de massa ($\mathrm{d}m$) no interior do VC $\int_{VC}\phi\rho\,\mathrm{d}V =$ total da grandeza extensiva Φ em todo VC
$\displaystyle\oint_{SC}\phi\rho\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{A}$	Vazão resultante (= saída – entrada) da grandeza extensiva Φ através de toda a extensão da SC $\rho\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{A} =$ taxa (local) com que massa flui através do elemento de superfície $\mathrm{d}A$ por unidade de tempo $\phi\rho\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{A} =$ vazão da grandeza Φ pelo elemento $\mathrm{d}A$

TTR: hipóteses simplificadoras

- Regime permanente (estado estacionário):

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathrm{VC}} \phi\rho\,\mathrm{d}V = 0$$

- Grandezas intensivas uniformes (= homogêneas) nas seções transversais de cada entrada e de cada saída:

$$\oint_{\mathrm{SC}} \phi\rho\,\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{A} = \sum_{\text{saídas}} \phi\rho v A - \sum_{\text{entradas}} \phi\rho v A$$

- Combinando estas duas simplificações, obtém-se:

$$\frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{MC}}}{\mathrm{d}t} = \sum_{\text{saídas}} \phi\rho v A - \sum_{\text{entradas}} \phi\rho v A$$