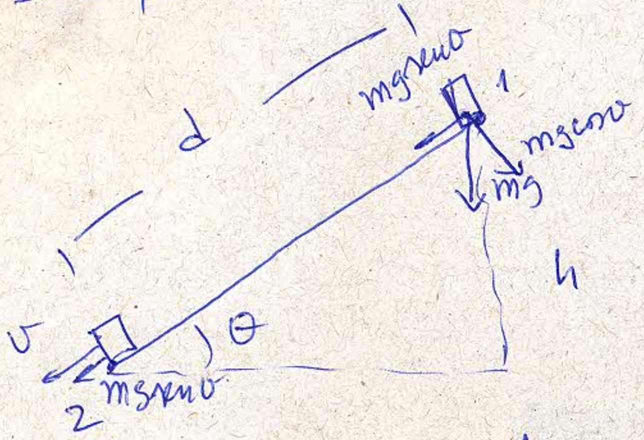
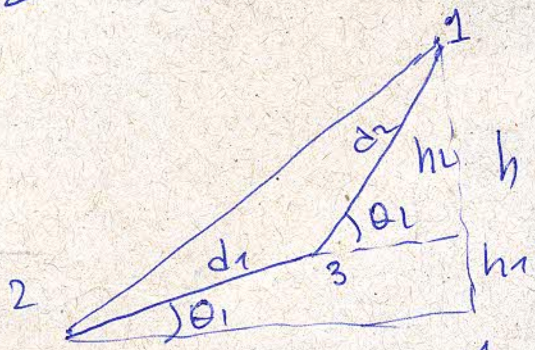
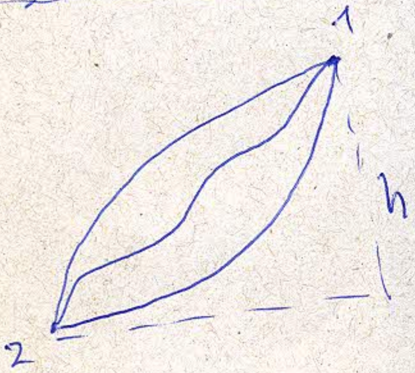
Forças Conservativas / Energia Potencial



$$W_{12} = mg\,\text{sen}\,\theta \cdot d$$
$$= \underline{mgh}$$



$$W_{12} = W_{13} + W_{32}$$
$$= mg\,\text{sen}\,\theta_2\, d_2 + mg\,\text{sen}\,\theta_1\, d_1 =$$
$$= mgh_1 + mgh_2 = \underline{mgh}$$



$W_{12} = mgh$ qualquer que seja o caminho de $1 \to 2$

Invertendo o caminho: $W_{21} = -mg\,\text{sen}\,\theta \cdot d$
$$= \underline{-mgh}$$

$$\Rightarrow \boxed{W_{12} + W_{21} = 0}$$

Para qualquer caminho fechado ($\equiv$ ponto de partida = ponto de chegada) o trabalho realizado pela força gravitacional é nulo.

- Isso não vale p/ qualquer tipo de força.

Ex. Força de atrito.

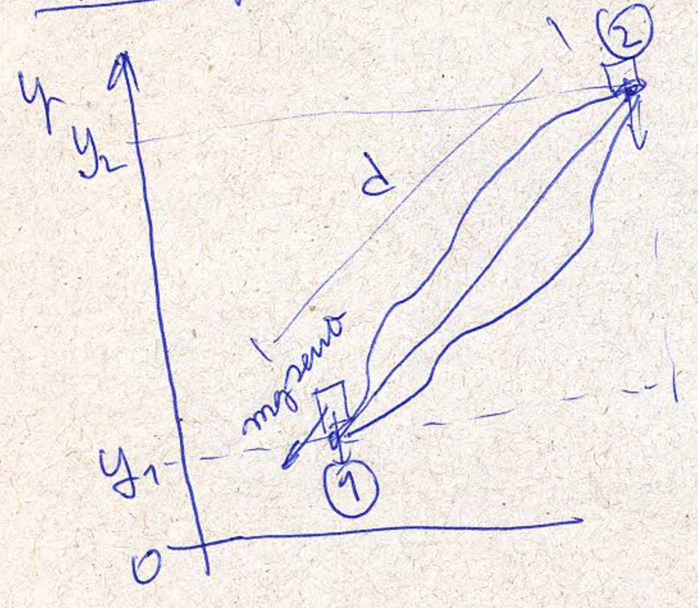
A força de atrito é sempre oposta à direção do movimento, portanto W_{fat} é sempre negativo.

portanto $W_{12} < 0$ e $W_{21} < 0$.

Forças para as quais o trabalho é o mesmo para qualquer caminho, são chamadas Forças conservativas. (Como veremos, a energia mecânica é conservada, em partículas sob a ação de forças conservativas).

→ Exemplos de forças conservativas
- A força elástica de uma mola
- a força elétrica entre duas cargas
- força gravitacional

Energia Potencial

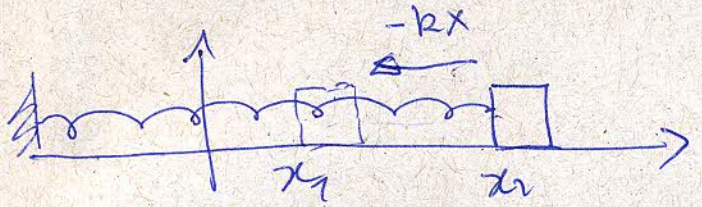


$W_{12} = -mg\,\text{sen}\,\theta \cdot d$

$= -mgh$

$\boxed{= -mg(y_2 - y_1)}$

$=$



$$W_{21} = \int_{x_2}^{x_1} -kx\,dx = -\frac{1}{2}k(x_1^2 - x_2^2)$$

Energia potencial gravitacional:

$$E_g(y) = mgy \qquad W_{12} = mgy_1 - mgy_2 =$$
$$= -mg(y_2 - y_1) = -\Delta E_g$$

Energia potencial elástica:

$$E_e = \frac{1}{2}kx^2 \qquad W_{21} = -\frac{1}{2}k(x_1^2 - x_2^2) = -(E_e^f - E_e^i)$$
$$= -\Delta E_e$$

O trabalho realizado por uma força conservativa é igual a ⊖ a variação da energia potencial associada àquela força:

$$\boxed{W = -\Delta E_p}$$

só para forças conservativas!!!

$$\boxed{W = \Delta E_c}$$

Para a resultante das forças sobre 1 partícula (conservativas + ñ conservativas).

Supondo que, sobre uma partícula, estejam agindo somente forças conservativas $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \ldots$. A cada uma dessas forças estão associados $E_{p_1}, E_{p_2}, E_{p_3}, \ldots$, energias potenciais.

$$W = W_{F_1} + W_{F_2} + W_{F_3} \ldots = W_{F_{result.}}$$

mas $$W = \underbrace{-\Delta E_{p_1} - \Delta E_{p_2} - \Delta E_{p_3} - \ldots}_{= -\Delta E_p} = \Delta E_c$$

$$\Rightarrow \quad -\Delta E_p = \Delta E_c$$

ou $$\boxed{\Delta E_c + \Delta E_p = 0}$$ se somente forças conservativas estão agindo sobre uma partícula

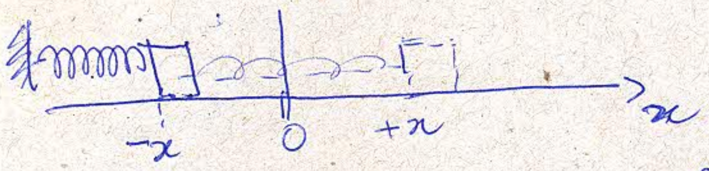
$$\boxed{E_M = E_p + E_c = \text{Energia Mecânica}}$$

$$\boxed{\Delta E_M = 0 \Rightarrow \text{Energia mecânica é conservada!!}}$$

$\Downarrow$

Tudo isso é decorrente das leis de Newton, não introduzimos nenhuma lei nova, ~~a não~~ mas somente definições de E_c, E_p, E_M, W etc.

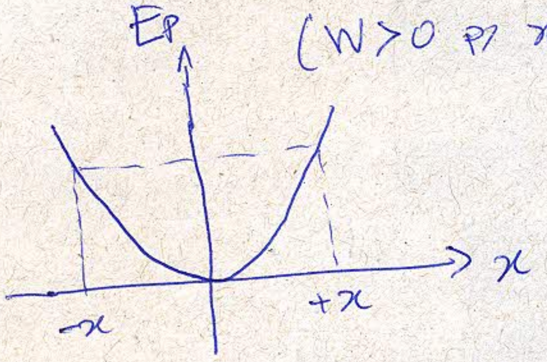
Exemplo:



$$E_p(-x) = \frac{1}{2}k(-x)^2 = \frac{1}{2}kx^2 = E_p(x)$$

$\Delta E_p = 0 \Rightarrow W = 0$ ($\Delta E_c = 0$!)

($W > 0$ p/ $x < 0$ e $W < 0$ p/ $x > 0$)

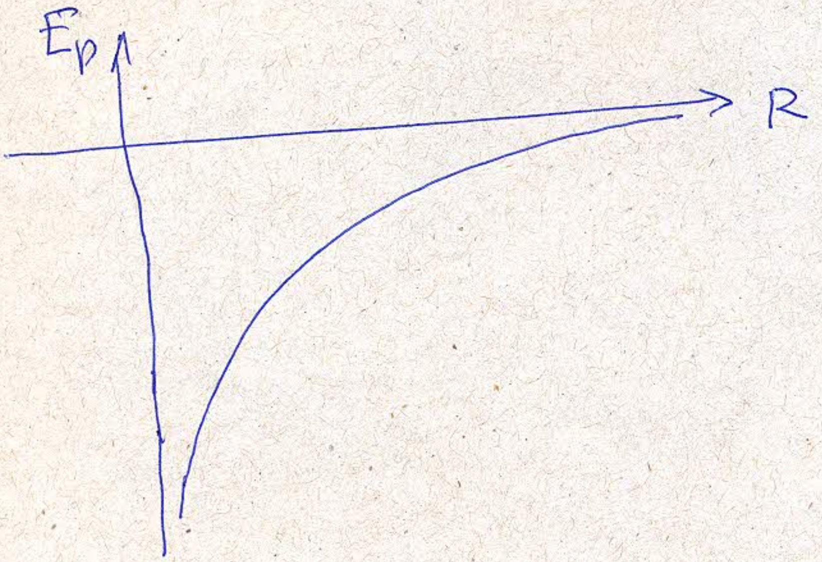


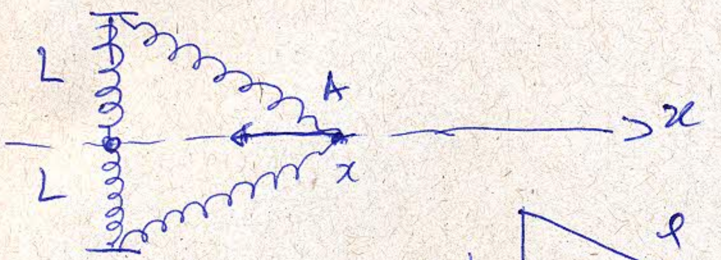
Energia Potencial Gravitacional

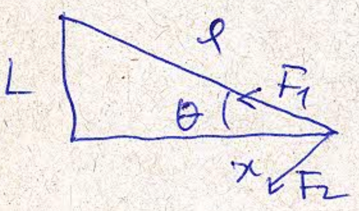
$E_g = mgy$ é uma aproximação (g = constante) p/ y próximo à superfície da Terra. Em termos astronômicos (ou seja p/ grandes distâncias) define-se

$$E_g = -\frac{GmM}{R}$$

onde G = constante gravitacional
M = massa da Terra
R = distância ao centro da Terra.







$F_1 = -k(\ell - L) = F_2$

$F = -2k(\ell - L)\cos\theta \qquad \cos\theta = \frac{x}{\ell}$

$F = -2k(\ell - L)\frac{x}{\ell} = -2kx\left(1 - \frac{L}{\ell}\right)$

$\ell = \sqrt{x^2 + L^2} \qquad \vec{F} = -2kx\left(1 - \frac{L}{\sqrt{x^2+L^2}}\right)\vec{i}$

$$W_{A\to 0} = \int_A^0 F_x\,dx = -2k\int_A^0 x\left(1 - \frac{L}{\sqrt{x^2+L^2}}\right)dx$$

$$= \underbrace{-2k\int_A^0 x\,dx}_{-2k\left(-\frac{1}{2}A^2\right)} + 2kL\int_A^0 \frac{x}{\sqrt{x^2+L^2}}\,dx$$

$$E_p = E_{p_1} + E_{p_2} = \frac{1}{2}k(\ell - L)^2 \times 2$$

$$= k(\ell^2 - 2\ell L + L^2) = k\left(x^2 + L^2 - 2L\sqrt{x^2+L^2} + L^2\right)$$

$$= k\left(x^2 + 2L^2 - 2L\sqrt{x^2+L^2}\right)$$

$E_p(x=0) = 0 \,!\, \qquad W = \Delta E_p = E_p(A)$

$= -(E_p(0) - E_p(A))$

$$\underline{W = k\left(A^2 + 2L^2 - 2L\left(\sqrt{A^2+L^2}\right)\right)}$$

Forças Não Conservativas.

São forças que aumentam ou diminuem a energia mecânica de um sistema. Se uma força atua ~~sempre~~ de forma a diminuir a energia mecânica de uma ~~partícula~~ sistema, ela é chamada força dissipativa.

Exemplos:

Gasolina (combustíveis em geral). São fonte de forças ñ conservativas que aumentam a energia cinetica (mecânica) de um automovel. A energia interna desses compostos ~~são~~ é liberada em reações químicas produzindo calor ou eletricidade que então são transformados em energia mecânica.

Atrito: as várias formas de atrito são exemplos de forças dissipativas. No geral as forças dissipativas aumentam a energia interna de um corpo (p. ex. aumentando sua temperatura).

Vamos considerar o caso de vários forças conservativas $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}, \ldots$ segundo em um sistema, além de outras, $\vec{F}_{N1}$, $\vec{F}_{N2}$, etc, não conservativas.

Seja U_1, U_2, U_3 as energias potenciais associadas a cada uma das forças conservativas e $U = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots$ a energia potencial do sistema em que essas forças estão atuando.

A força resultante no sistema pode ser escrita como:

$$\vec{F}_R = \vec{F}_{RC} + \vec{F}_{RN} \quad \text{onde}$$

$$\vec{F}_{RC} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots = \text{resultante das forças conservativas}$$

e

$$\vec{F}_{RN} = \vec{F}_{N1} + \vec{F}_{N2} + \vec{F}_{N3} + \ldots = \text{resultante das forças não conservativas}$$

Pelo teorema Trabalho-Energia, sabemos:

$$W_{\vec{F}_R} = \Delta E_C$$

Mas $W_{\vec{F}_R} = W_{\vec{F}_C} + W_{\vec{F}_N}$

e sabemos também: $W_{\vec{F}_C} = -\Delta U$

$$\Rightarrow \Delta E_C = -\Delta U + W_{\vec{F}_N}$$

$$\Rightarrow \boxed{W_{FN} = \Delta E_C + \Delta U = \Delta E_M}$$

Podemos então enunciar:
"O trabalho das forças ñ conservativas em um sistema é igual à variação de sua energia mecânica".

Se a força é dissipativa, $\underline{\Delta E_m < 0}$

Força e Energia Potencial

Sabemos:
- Força na mola → $-kx$
- En. pot. elástica $\frac{1}{2} kx^2$

- Força gravitacional : → $-mg$
- En. pot. gravit. → $+mgx$

Como escrever a relação formal $\vec{F} \leftrightarrow U$?

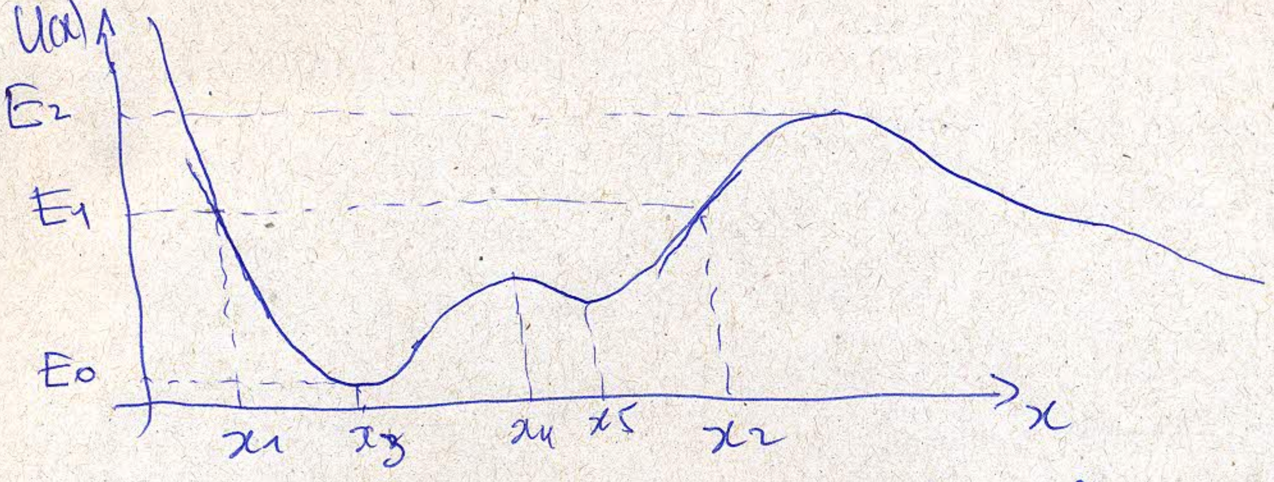
Caso uni-dimensional (mola, gravidade)

$$\boxed{F = -\frac{dU}{dx}} \quad \text{ou} \quad \vec{F} = -\frac{dU}{dx}\hat{\imath}$$

(note que $\hat{\imath}$ = direção de x = variável que aparece na energia potencial)

Diagramas de energia potencial.

Ex: Partícula se desloca sob a ação de força conservativa, descrita pela função energia potencial $U(x)$:



Suponhamos que a energia total de uma partícula sob a ação dessa força seja E_1. Como $E_1 = U + E_c$, sabemos que nos pontos x_1 e x_2, onde $U = E_1$, $E_c = 0$

Note também que nenhuma partícula pode ter energia total (E_M) menor que E_0 pois teríamos $U > E_0$ p/ qualquer outro ponto $\neq x_3$, teríamos $U > E_0$ $\Rightarrow E_c < 0$!

Uma partícula com energia $> E_2$, terá movimento ilimitado à direita (supondo que $U(x)$ seja sempre decrescente nessa região)

Partícula com energia $< E_2$ tem sempre movimento limitado.

Note que em $x = x_1$, $\frac{dU}{dx} < 0 \Rightarrow \hat{F} > 0$ ~~ou~~ seja da esquerda p/ a direita. em $x = x_2$ $\frac{dU}{dx} > 0$ e a força é p/ a esquerda (< 0) nos pontos x_3 e x_5 $\frac{dU}{dx} = 0 \Rightarrow F = 0$ e são pontos de equilíbrio estável: p/ ponto logo à direita de x_3, $\frac{dU}{dx} > 0 \Rightarrow$ Força é p/ esquerda e p/ ponto logo à esquerda de x_3, $\frac{dU}{dx} < 0 \Rightarrow$ a força é p/ a direita.

x_4 é um ponto de equilíbrio instável. Deslocando-se a partícula desse ponto p/ a direita, $\frac{dU}{dx} < 0 \Rightarrow$ força tb é p/ a direita. Idem p/ desloca à esquerda.

No caso geral em que U é uma função tb de y e z, a relação entre $\vec{F}$ e U é dada por:

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}\right)$$

Onde $\frac{\partial U}{\partial x}$ quer dizer: derive $U(x,y,z)$ em relação a x, tomando y e z como se fossem constantes. Analogamente p/ as outras derivadas, chamadas <u>derivadas parciais</u>.

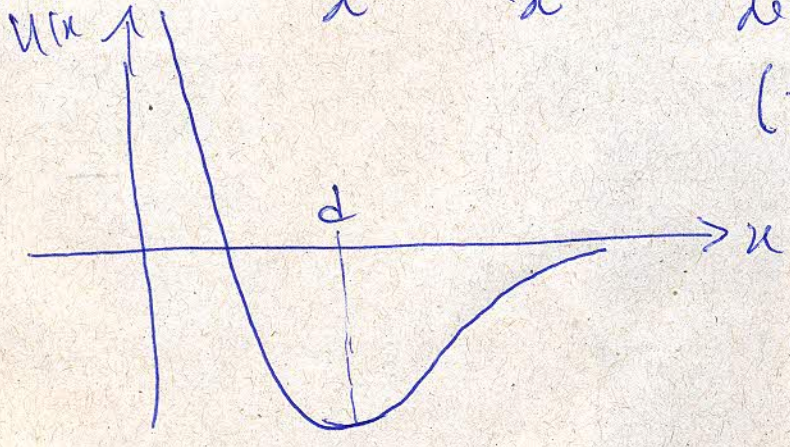
<u>Exemplo</u>: Potencial entre dois átomos em uma molécula di-atômica

~~A força~~ A energia potencial entre os dois átomos de N em uma molécula N_2 pode ser aproximada por:

$$U(x) = \frac{\alpha}{x^{12}} - \frac{\beta}{x^{6}}$$

onde $x = d$ é a separação de equilíbrio

(x = distância entre os átomos na molécula)



$$\vec{F} = -\frac{dU}{dx}\hat{i} = \frac{12\alpha}{x^{13}} - \frac{6\beta}{x^{7}}$$

A distância d é dada pela condição

$$\frac{dU}{dx}(d) = F(d) = 0$$

$$\frac{12\alpha}{x^{13}} = \frac{6\beta}{x^{7}} \Rightarrow x^{6} = \frac{12\alpha}{6\beta}$$

$$\boxed{x = \sqrt[6]{\frac{12\alpha}{6\beta}}}$$

Se $x \gg d$ o termo $\frac{1}{x^{13}}$ fica desprezível comparado com o ~~ot~~ outro e portanto

$$F(x) \simeq \frac{6\beta}{x^{7}} \quad \text{p/ } x \gg d$$

Essa é a chamada Força de Van der Walls

($F < 0 \Rightarrow$ Van de Walls é atrativa!!)