# 11 Análise da Variância



## Objetivos do Aprendizado

### Neste capítulo, você aprenderá:

- Os conceitos básicos da modelagem do experimento
- A utilizar a análise da variância de fator único para testar diferenças entre as médias aritméticas de diversos grupos
- A utilizar a análise da variância de dois fatores e interpretar o efeito decorrente da interação
- A realizar comparações múltiplas em uma análise da variância de fator único e uma análise da variância de dois fatores

UTILIZANDO A ESTATÍSTICA

## @Perfect Parachutes

Você é o gerente de produção da Perfect Parachutes Company. Os paraquedas são tecidos em sua fábrica com o uso de uma fibra sintética adquirida de um de quatro diferentes fornecedores. A resistência dessas fibras é uma característica importante que garante paraquedas de qualidade. Você precisa decidir se as fibras sintéticas de cada um de seus quatro fornecedores resultam em paraquedas de igual resistência. Além disso, sua fábrica utiliza dois tipos de teares para produzir paraquedas: o *Jetta* e o *Turk*. Você precisa estabelecer se os paraquedas tecidos em ambos os tipos de teares são igualmente resistentes. Você também deseja saber se quaisquer diferenças na resistência dos paraquedas que possam ser atribuídas aos quatro fornecedores são dependentes do tipo de tear utilizado. De que modo você pode ir à busca dessas informações?

No Capítulo 10, você utilizou a metodologia de testes de hipóteses para chegar a conclusões sobre possíveis diferenças entre duas populações. Como gerente da Perfect Parachutes, você precisa projetar um experimento para testar a resistência de paraquedas tecidos com as fibras sintéticas fabricadas por *quatro* fornecedores. Ou seja, você precisa avaliar diferenças entre *mais de duas* populações, ou grupos. (Neste capítulo, as populações são chamadas de *grupos*.)

Este capítulo se inicia com o exame de um *modelo completamente aleatório* que possui somente um único *fator* (que fornecedor utilizar) e vários grupos (os quatro fornecedores). O modelo completamente aleatório é então estendido para o *modelo fatorial*, no qual mais de um fator de cada vez é estudado simultaneamente em um único experimento. Por exemplo, um experimento que incorporasse os quatro fornecedores e os dois tipos de teares ajudaria você a determinar o fornecedor e o tipo de tear a utilizar para fabricar os paraquedas mais resistentes. Ao longo de todo o capítulo, a ênfase é concentrada nos pressupostos que permeiam a utilização dos vários procedimentos de teste.

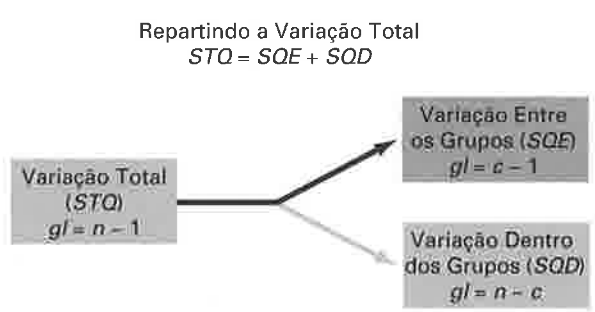
# 11.1 O Modelo Completamente Aleatório: Análise da Variância de Fator Único

Em muitas situações, você precisa examinar diferenças entre mais de dois **grupos**. Os grupos envolvidos são classificados de acordo com **níveis** de um **fator** de interesse. Por exemplo, um fator como a temperatura de cozimento pode possuir vários grupos definidos por *níveis numéricos*, como por exemplo 300°, 350°, 400°, 450°, enquanto um fator tal como o fornecedor preferido para um fabricante de paraquedas pode possuir vários grupos definidos por *níveis categóricos*, como por exemplo Fornecedor 1, Fornecedor 2, Fornecedor 3, Fornecedor 4. Quando existe um único fator, o modelo do experimento é conhecido como **modelo completamente aleatório**.

## Teste *F* ANOVA de Fator Único para Diferenças entre Mais de Duas Médias Aritméticas

Quando está analisando uma variável numérica e determinados pressupostos são atendidos, você utiliza a **análise da variância (ANOVA)** para comparar as médias aritméticas dos grupos. O procedimento ANOVA, utilizado para o modelo completamente aleatório, é conhecido como **ANOVA de fator único**, e é uma extensão do teste *t* de variância agrupada, discutido na Seção 10.1. Embora ANOVA seja um acrônimo para *análise da variância (analysis of variance)*, o termo pode induzir a equívoco, uma vez que o objetivo é analisar diferenças entre as médias aritméticas dos grupos, e *não* as variâncias dos grupos. No entanto, ao analisar a variação entre os grupos e dentro dos grupos, você pode chegar a conclusões sobre possíveis diferenças entre médias aritméticas dos grupos. Em ANOVA, a variação total é subdividida entre variações que são atribuídas a diferenças *entre* os grupos e variações que são atribuídas a variações *dentro* dos grupos (veja a Figura 11.1). A **variação dentro dos grupos** mede a variação aleatória. A **variação entre os grupos** é atribuída a diferenças de grupo para grupo. O símbolo *c* é utilizado para indicar o número de grupos.

**FIGURA 11.1**
Dividindo a variação total em um modelo completamente aleatório




Partindo do pressuposto de que os *c* grupos representam populações cujos valores são selecionados de maneira aleatória e independente, seguem uma distribuição normal e possuem variâncias iguais, a hipótese nula de nenhuma diferença nas médias aritméticas das populações:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_c$$



é testada contra a hipótese alternativa de que nem todas as *c* médias aritméticas das populações são iguais:

$$H_1\text{: Nem todas as } \mu_j \text{ são iguais (em que } j = 1, 2, \ldots, c\text{).}$$

Para realizar um teste ANOVA para a igualdade entre médias aritméticas de populações, você subdivide a variação total nos valores em duas partes – aquela que é decorrente de diferenças por entre os grupos e aquela que é decorrente de variação dentro dos grupos. A **variação total** é representada pela **soma do total dos quadrados (*STQ*)**. Uma vez que se pressupõe que as médias aritméticas da população para os *c* grupos são iguais, sob a hipótese nula, você calcula a variação total entre todos os valores, por meio da soma das diferenças (elevadas ao quadrado) entre cada um dos valores individuais e a **grande média aritmética**, $\bar{\bar{X}}$. A grande média aritmética é a média aritmética correspondente a todos os valores em todos os grupos combinados. A Equação (11.1) demonstra o cálculo para a variação total.

VARIAÇÃO TOTAL EM ANOVA DE FATOR ÚNICO

$$STQ = \sum_{j=1}^{c}\sum_{i=1}^{n_j}(X_{ij} - \bar{\bar{X}})^2 \qquad \textbf{(11.1)}$$

em que

$$\bar{\bar{X}} = \frac{\sum_{j=1}^{c}\sum_{i=1}^{n_j} X_{ij}}{n} = \text{Grande média}$$

$X_{ij}$ = *i*-ésimo valor no grupo *j*

$n_j$ = número de valores no grupo *j*

$n$ = número total de valores em todos os grupos combinados (ou seja, $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_c$)

$c$ = número de grupos

Você calcula a variação entre os grupos, geralmente conhecida como a **soma dos quadrados entre os grupos (*SQE*)**, por meio da soma das diferenças (elevadas ao quadrado) entre a média aritmética da amostra para cada um dos grupos, $\bar{X}_j$, e a grande média aritmética, $\bar{\bar{X}}$, ponderada com base no tamanho da amostra, $n_j$, em cada um dos grupos. A Equação (11.2) demonstra o cálculo para a variação entre os grupos.

VARIAÇÃO ENTRE OS GRUPOS EM ANOVA DE FATOR ÚNICO

$$SQE = \sum_{j=1}^{c} n_j(\bar{X}_j - \bar{\bar{X}})^2 \qquad \textbf{(11.2)}$$

em que

$c$ = número de grupos

$n_j$ = número de valores no grupo *j*

$\bar{X}_j$ = média aritmética da amostra do grupo *j*

$\bar{\bar{X}}$ = grande média

A variação dentro do grupo, geralmente chamada de **soma dos quadrados dentro dos grupos (*SQD*)**, mede a diferença entre cada um dos valores e a média aritmética de seu próprio grupo e soma os quadrados dessas diferenças ao longo de todos os grupos. A Equação (11.3) demonstra os cálculos da variação dentro do grupo.

VARIAÇÃO DENTRO DO GRUPO EM ANOVA DE FATOR ÚNICO

$$SQD = \sum_{j=1}^{c}\sum_{i=1}^{n_j}(X_{ij} - \bar{X}_j)^2 \qquad \textbf{(11.3)}$$

em que

$$X_{ij} = i\text{-ésimo valor no grupo } j$$

$$\bar{X}_j = \text{média aritmética da amostra do grupo } j$$

Uma vez que você está comparando $c$ grupos, existem $c - 1$ graus de liberdade associados à soma dos quadrados entre os grupos. Tendo em vista que cada um dos $c$ grupos contribui com $n_j - 1$ graus de liberdade, existem $n - c$ graus de liberdade associados à soma dos quadrados dentro dos grupos. Além disso, existem $n - 1$ graus de liberdade associados à soma total dos quadrados, em razão de você estar comparando cada um dos valores, $X_{ij}$, com a grande média, $\bar{\bar{X}}$, baseada em todos os $n$ valores.

Se dividir cada uma dessas somas dos quadrados pelos seus respectivos graus de liberdade, você terá três variâncias, ou termos de **médias de quadrados** — $MQE$ (média dos quadrados entre grupos), $MQD$ (média dos quadrados dentro dos grupos) e $MTQ$ (média total dos quadrados).

## MÉDIA DOS QUADRADOS EM ANOVA DE FATOR ÚNICO

$$MQE = \frac{SQE}{c - 1} \tag{11.4a}$$

$$MQD = \frac{SQD}{n - c} \tag{11.4b}$$

$$MTQ = \frac{STQ}{n - 1} \tag{11.4c}$$

Embora você deseje comparar as médias aritméticas de $c$ grupos no sentido de determinar se existe alguma diferença entre elas, o nome ANOVA se origina do fato de você estar comparando variâncias. Se a hipótese nula for verdadeira, e não existirem quaisquer diferenças em termos das médias aritméticas para os $c$ grupos, todas as três médias de quadrados (ou *variâncias*) — $MQE$, $MQD$ e $MTQ$ — fornecem estimativas para a variância geral nos dados. Por conseguinte, para testar a hipótese nula:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_c$$

contra a hipótese alternativa:

$$H_1: \text{Nem todas as } \mu_j \text{ são iguais (em que } j = 1, 2, \ldots, c)$$

você calcula a estatística do teste $F_{ESTAT}$ em ANOVA de fator único como sendo igual à proporcionalidade entre $MQE$ e $MQD$, conforme demonstrado na Equação (11.5).

## ESTATÍSTICA DO TESTE $F_{ESTAT}$ EM ANOVA DE FATOR ÚNICO

$$F_{ESTAT} = \frac{MQE}{MQD} \tag{11.5}$$

A estatística do teste $F_{ESTAT}$ segue uma **distribuição *F***, com $c - 1$ graus de liberdade no numerador e $n - c$ graus de liberdade no denominador. Para um determinado nível de significância, $\alpha$, você rejeita a hipótese nula, caso a estatística do teste $F_{ESTAT}$ calculada na Equação (11.5) venha a ser maior do que o valor crítico da cauda superior, $F_\alpha$, a partir da distribuição $F$, possuindo $c - 1$ graus de liberdade no numerador e $n - c$ graus de liberdade no denominador (veja a Tabela E.5). Consequentemente, conforme apresentado na Figura 11.2, a regra de decisão passa a ser:

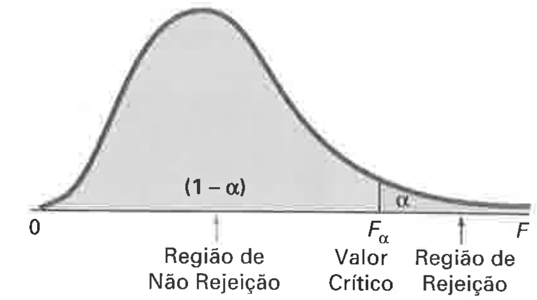
$$\text{Rejeitar } H_0 \text{ se } F_{ESTAT} > F_\alpha;$$

$$\text{caso contrário, não rejeitar } H_0.$$

Se a hipótese nula for verdadeira, espera-se que a estatística do teste $F_{ESTAT}$ calculada seja aproximadamente igual a 1, uma vez que os termos referentes a médias de quadrados tanto do numerador quanto do denominador estão estimando a variância geral nos dados. Se $H_0$ for falsa (e existirem diferenças nas médias aritméticas dos grupos), espera-se que a estatística do teste $F_{ESTAT}$ calculada seja maior do que 1, tendo em vista que o numerador, $MQE$, está estimando as



**FIGURA 11.2**
Regiões de rejeição e de não rejeição ao utilizar ANOVA




diferenças entre os grupos, além da variabilidade geral entre os valores, enquanto o denominador, $MQD$, está mensurando exclusivamente a variabilidade geral por entre os valores. Consequentemente, quando utiliza o procedimento de ANOVA, você rejeita a hipótese nula em um nível de significância selecionado, $\alpha$, unicamente se a estatística para o teste $F_{ESTAT}$ calculada for maior do que $F_\alpha$, o valor crítico para a cauda superior da distribuição $F$, que apresenta $c - 1$ e $n - c$ graus de liberdade, conforme ilustrado na Figura 11.2.

Os resultados de uma análise da variância são geralmente apresentados em uma **tabela resumida de ANOVA**, conforme ilustrado na Tabela 11.1. As entradas para essa tabela incluem as fontes da variação (ou seja, entre grupos dentro do grupo e total), os graus de liberdade, as somas dos quadrados, a média dos quadrados (ou seja, as variâncias) e a estatística do teste $F_{ESTAT}$ calculada. O valor-*p*, a probabilidade de que venha a ser obtida uma estatística $F_{ESTAT}$ tão grande quanto, ou maior do que, aquela calculada, sabendo-se que a hipótese nula é verdadeira, geralmente aparece também. O valor-*p* permite que você tire conclusões diretas em relação à hipótese nula sem que seja necessário recorrer a uma tabela de valores críticos da distribuição $F$. Caso o valor-*p* seja menor do que o nível de significância escolhido, $\alpha$, você rejeita a hipótese nula.

*As planilhas com os resultados de ANOVA apresentadas neste livro incluem o valor-p em uma célula da coluna F da tabela resumida de ANOVA.*

**TABELA 11.1**
Tabela Resumida da Análise da Variância

| Fonte | Graus de Liberdade | Soma dos Quadrados | Média dos Quadrados (Variância) | F |
|---|---|---|---|---|
| Entre grupos | $c - 1$ | $SQE$ | $MQE = \frac{SQE}{c - 1}$ | $F_{ESTAT} = \frac{MQE}{MQD}$ |
| Dentro dos grupos | $n - c$ | $SQD$ | $MQD = \frac{SQD}{n - c}$ | |
| Total | $n - 1$ | $STQ$ | | |

Para ilustrar o teste $F$ em ANOVA de fator único, retorne ao cenário que trata da Perfect Parachutes (no início do capítulo). Você define o problema da empresa como determinar se existem quaisquer diferenças significativas em termos da resistência dos paraquedas tecidos com o uso de fibras sintéticas adquiridas de cada um de quatro fornecedores. A resistência dos paraquedas é medida colocando-os em um dispositivo de teste que puxa ambas as extremidades de um paraquedas até que ele se rasgue. A quantidade de força necessária para rasgar o paraquedas é medida em uma escala de resistência à tensão na qual quanto maior o valor, mais forte o paraquedas.

Cinco paraquedas foram tecidos utilizando a fibra fornecida por cada um dos grupos — Fornecedor 1, Fornecedor 2, Fornecedor 3 e Fornecedor 4. Você realiza o experimento testando a resistência de cada um dos 20 paraquedas coletando a medição da resistência à tensão para cada um dos paraquedas. Esses resultados são organizados por grupo e armazenados, juntamente com a média aritmética da amostra e o desvio-padrão da amostra, no arquivo **Paraquedas**. A Figura 11.3 ilustra a planilha que guarda esses dados.

Na Figura 11.3, observe que existem diferenças nas médias aritméticas de amostras para os quatro fornecedores. Para o Fornecedor 1, a média aritmética da resistência à tensão é 19,52. Para o Fornecedor 2, a média aritmética da resistência à tensão é 24,26. Para o Fornecedor 3, a média aritmética da resistência à tensão é 22,84, e para o Fornecedor 4 a média aritmética da resistência à tensão é 21,16. O que você precisa determinar é se os resultados dessas amostras são suficientemente diferentes para que se conclua que as médias aritméticas das *populações* não são todas iguais.

O diagrama de dispersão ilustrado na Figura 11.4 possibilita que você visualize os dados e verifique como se distribuem as medições relativas à resistência à tensão. Você pode também observar diferenças entre os grupos, bem como dentro dos grupos. Se os tamanhos das amostras em cada um dos grupos fossem maiores, você poderia desenvolver disposições ramo e folha, boxplots e gráficos da probabilidade normal.

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | Fornecedor 1 | Fornecedor 2 | Fornecedor 3 | Fornecedor 4 |
| 2 | | 18,5 | 26,3 | 20,6 | 25,4 |
| 3 | | 24,0 | 25,3 | 25,2 | 19,9 |
| 4 | | 17,2 | 24,0 | 20,8 | 22,6 |
| 5 | | 19,9 | 21,2 | 24,7 | 17,5 |
| 6 | | 18,0 | 24,5 | 22,9 | 20,4 |
| 7 | | | | | |
| 8 | Média Aritmética da Amostra | 19,52 | 24,26 | 22,84 | 21,16 |
| 9 | Desvio-padrão da Amostra | 2,69 | 1,92 | 2,13 | 2,98 |

**FIGURA 11.3**

Planilha de dados para a resistência à tensão de paraquedas de fibras sintéticas advindas de quatro fornecedores diferentes, juntamente com a média aritmética da amostra e o desvio-padrão da amostra

*A Figura 11.3 exibe a* ***planilha DADOS_RESUMIDA*** *da* ***pasta de trabalho Paraquedas****. Essa planilha contém fórmulas que utilizam as funções* ***MÉDIA*** *e* ***DESVPAD*** *para calcular a média aritmética e o desvio-padrão da amostra no intervalo de células B8:E9.*

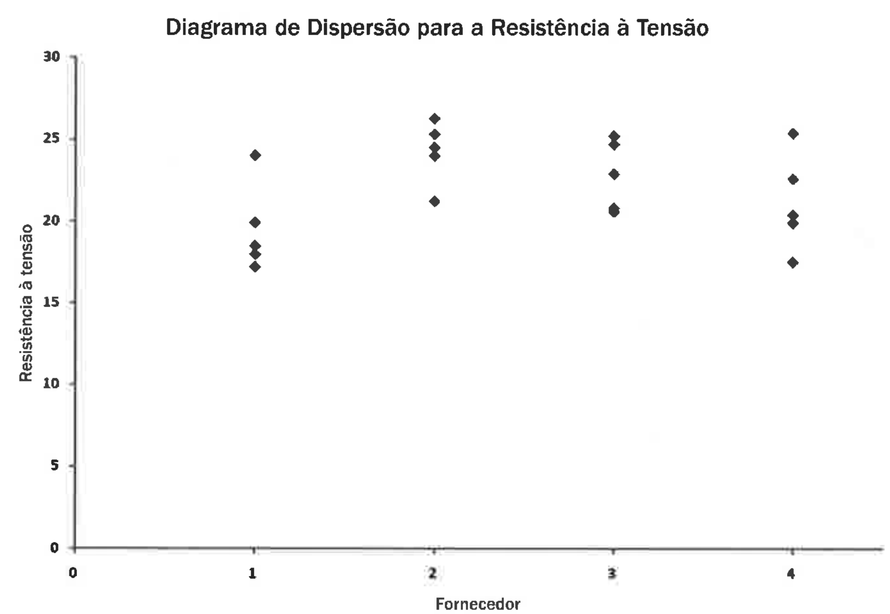



**FIGURA 11.4**

Gráfico de dispersão do Microsoft Excel para a resistência à tensão, para quatro fornecedores diferentes

*Crie diagramas de dispersão utilizando as instruções da Seção GE2.7.*

A hipótese nula afirma que não existe nenhuma diferença em absoluto em relação às médias aritméticas para a resistência à tensão entre os quatro fornecedores:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$$

A hipótese alternativa afirma que pelo menos um dos fornecedores difere no que diz respeito à média aritmética da resistência à tensão:

$$H_1: \text{Nem todas as médias aritméticas são iguais.}$$

Para construir uma tabela resumida de ANOVA, você primeiramente calcula as médias aritméticas para as amostras em cada um dos grupos (veja a Figura 11.3). Em seguida, você calcula a grande média aritmética por intermédio da soma entre todos os 20 valores e a subsequente divisão desse resultado pela quantidade total de valores:

$$\bar{\bar{X}} = \frac{\sum_{j=1}^{c}\sum_{i=1}^{n_j} X_{ij}}{n} = \frac{438{,}9}{20} = 21{,}945$$

Depois disso, utilizando as Equações (11.1) até (11.3) desta seção, você calcula a soma dos quadrados:



$$SQE = \sum_{j=1}^{c} n_j(\bar{X}_j - \bar{\bar{X}})^2 = (5)(19{,}52 - 21{,}945)^2 + (5)(24{,}26 - 21{,}945)^2$$
$$+ (5)(22{,}84 - 21{,}945)^2 + (5)(21{,}16 - 21{,}945)^2$$
$$= 63{,}2855$$

$$SQD = \sum_{j=1}^{c}\sum_{i=1}^{n_j}(X_{ij} - \bar{X}_j)^2$$
$$= (18{,}5 - 19{,}52)^2 + \cdots + (18 - 19{,}52)^2 + (26{,}3 - 24{,}26)^2 + \cdots + (24{,}5 - 24{,}26)^2$$
$$+ (20{,}6 - 22{,}84)^2 + \cdots + (22{,}9 - 22{,}84)^2 + (25{,}4 - 21{,}16)^2 + \cdots + (20{,}4 - 21{,}16)^2$$
$$= 97{,}5040$$

$$STQ = \sum_{j=1}^{c}\sum_{i=1}^{n_j}(X_{ij} - \bar{\bar{X}})^2$$
$$= (18{,}5 - 21{,}945)^2 + (24 - 21{,}945)^2 + \cdots + (20{,}4 - 21{,}945)^2$$
$$= 160{,}7895$$

Você calcula os termos das médias dos quadrados dividindo a soma dos quadrados pelos graus de liberdade correspondentes [veja a Equação (11.4)]. Uma vez que $c = 4$ e $n = 20$:

$$MQE = \frac{SQE}{c - 1} = \frac{63{,}2855}{4 - 1} = 21{,}0952$$

$$MQD = \frac{SQD}{n - c} = \frac{97{,}5040}{20 - 4} = 6{,}0940$$

de modo tal que, utilizando a Equação (11.5)

$$F_{ESTAT} = \frac{MQE}{MQD} = \frac{21{,}0952}{6{,}0940} = 3{,}4616$$

Para um nível de significância, $\alpha$, selecionado, você encontra o valor crítico da cauda superior, $F_\alpha$, a partir da distribuição $F$, utilizando a Tabela E.5. Uma parcela da Tabela E.5 é apresentada na Tabela 11.2. No exemplo que trata do fornecedor de paraquedas, existem 3 graus de liberdade no numerador e 16 graus de liberdade no denominador. $F_\alpha$, o valor crítico da cauda superior, no nível de significância de 0,05, é igual a 3,24.

**TABELA 11.2**

Encontrando o Valor Crítico de $F$, com 3 e 16 Graus de Liberdade, no Nível de Significância de 0,05

| | Probabilidades Acumuladas = 0,95<br>Área da Cauda Superior = 0,05<br>$gl_1$, Numerador | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **$gl_2$, Denominador** | **1** | **2** | **$\boxed{3}$** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** |
| . | . | . | . | . | . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . | . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . | . | . | . | . | . |
| 11 | 4,84 | 3,98 | 3,59 | 3,36 | 3,20 | 3,09 | 3,01 | 2,95 | 2,90 |
| 12 | 4,75 | 3,89 | 3,49 | 3,26 | 3,11 | 3,00 | 2,91 | 2,85 | 2,80 |
| 13 | 4,67 | 3,81 | 3,41 | 3,18 | 3,03 | 2,92 | 2,83 | 2,77 | 2,71 |
| 14 | 4,60 | 3,74 | 3,34 | 3,11 | 2,96 | 2,85 | 2,76 | 2,70 | 2,65 |
| 15 | 4,54 | 3,68 | 3,29 | 3,06 | 2,90 | 2,79 | 2,71 | 2,64 | 2,59 |
| $\boxed{16}$ | 4,49 | 3,63 | $\boxed{3{,}24}$ | 3,01 | 2,85 | 2,74 | 2,66 | 2,59 | 2,54 |

Fonte: *Extraída da Tabela E.5.*

Uma vez que $F_{ESTAT} = 3{,}4616$, é maior que $F_\alpha = 3{,}24$, você rejeita a hipótese nula (veja a Figura 11.5). Você conclui que existe uma diferença significativa em termos da média aritmética da resistência à tensão no que diz respeito aos quatro fornecedores.

**FIGURA 11.5**
Regiões de rejeição e de não rejeição para uma ANOVA de fator único, no nível de significância de 0,05, com 3 e 16 graus de liberdade


A Figura 11.6 ilustra a planilha com os resultados de ANOVA para o experimento dos paraquedas, incluindo o valor-$p$ na célula F13. Nessa planilha, a variação Entre Grupos da Tabela 11.1 é apresentada com o mesmo título (variação Entre Grupos).

**FIGURA 11.6**
Resultado do Microsoft Excel para ANOVA, para o experimento sobre os paraquedas

*A Figura 11.6 exibe a **planilha CÁLCULO** da **pasta de trabalho ANOVA Fator Único**. Crie essa planilha utilizando as instruções da Seção GE11.1. Leia as instruções do Excel Avançado para essa planilha para aprender sobre as fórmulas utilizadas nessa planilha.*

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ANOVA: Fator Único | | | | | | |
| 2 | | | | | | | |
| 3 | **RESUMO** | | | | | | |
| 4 | ***Grupos*** | ***Contagem*** | ***Soma*** | ***Média*** | ***Variância*** | | |
| 5 | Fornecedor 1 | 5 | 97,6 | 19,52 | 7,237 | | |
| 6 | Fornecedor 2 | 5 | 121,3 | 24,26 | 3,683 | | |
| 7 | Fornecedor 3 | 5 | 114,2 | 22,84 | 4,553 | | |
| 8 | Fornecedor 4 | 5 | 105,8 | 21,16 | 8,903 | | |
| 9 | | | | | | | |
| 10 | | | | | | | |
| 11 | **ANOVA** | | | | | | |
| 12 | ***Fonte da Variação*** | ***SQ*** | ***gl*** | ***MQ*** | ***F*** | ***Valor-p*** | ***F crítico*** |
| 13 | Entre Grupos | 63,2855 | 3 | 21,0952 | 3,4616 | 0,0414 | 3,2389 |
| 14 | Dentro dos Grupos | 97,504 | 16 | 6,0940 | | | |
| 15 | | | | | | | |
| 16 | Total | 160,7895 | 19 | | | | |
| 17 | | | | Nível de Significância | | | 0,05 |

| Cálculos | |
|---|---|
| *c* | 4 |
| *n* | 20 |

O valor-$p$, ou a probabilidade de obter uma estatística $F_{ESTAT}$ igual ou superior a 3,4616, quando a hipótese nula é verdadeira, corresponde a 0,0414. Uma vez que esse valor-$p$ é menor do que o $\alpha$ especificado de 0,05, você rejeita a hipótese nula. O valor-$p$ de 0,0414 indica que existe uma chance de 4,14% de serem observadas diferenças dessa dimensão, ou ainda maiores, se as médias aritméticas das populações para os quatro fornecedores forem todas iguais. Depois de ter realizado o teste ANOVA de fator único e ter encontrado uma diferença significativa entre os fornecedores, você, ainda assim, não sabe *quais* dentre os fornecedores diferem entre si. Tudo que você sabe é que existem evidências suficientes para afirmar que as médias aritméticas das populações não são todas iguais. Em outras palavras, pelo menos uma ou mais dentre as médias aritméticas das populações são significativamente diferentes. Para determinar quais fornecedores diferem entre si, você pode utilizar um procedimento de comparações múltiplas, tal como o procedimento de Tukey-Kramer.

## Múltiplas Comparações: O Procedimento de *Tukey-Kramer*

No cenário que trata da Perfect Parachutes, apresentado no início deste capítulo, você utilizou o teste $F$ de ANOVA de fator único para determinar se existia alguma diferença entre os fornecedores. A próxima etapa é realizar **múltiplas comparações** para determinar quais fornecedores são diferentes um do outro.

Embora diversos procedimentos estejam disponíveis (veja as referências 5, 6 e 9), utilizamos aqui o **procedimento de múltiplas comparações de Tukey-Kramer para ANOVA de fator único** para determinar quais dentre as $c$ médias aritméticas são significativamente diferentes. O procedimento de Tukey-Kramer possibilita que você faça comparações simultaneamente entre todos os pares de grupos. Você utiliza as quatro etapas a seguir para construir as comparações:



1. Calcule as diferenças absolutas entre as médias aritméticas, $|\bar{X}_j - \bar{X}_{j'}|$ (em que $j \neq j'$) entre todos os $c(c-1)/2$ pares de médias aritméticas.
2. Calcule o **intervalo crítico** para o procedimento de Tukey-Kramer utilizando a Equação (11.6).

INTERVALO CRÍTICO PARA O PROCEDIMENTO DE TUKEY-KRAMER

$$\text{Intervalo crítico} = Q_\alpha \sqrt{\frac{MQD}{2}\left(\frac{1}{n_j} + \frac{1}{n_{j'}}\right)} \qquad \textbf{(11.6)}$$

em que $Q_\alpha$ é o valor crítico da cauda superior, a partir da **distribuição de intervalos de Student**, contendo $c$ graus de liberdade no numerador e $n - c$ graus de liberdade no denominador. (Os valores para a distribuição de intervalos de Student são encontrados na Tabela E.7.)

Caso os tamanhos das amostras sejam diferentes, você calcula um intervalo crítico para cada uma das comparações feitas entre pares para as médias aritméticas das amostras.

3. Compare cada um dos $c(c-1)/2$ pares de médias aritméticas com seu intervalo crítico correspondente. Você declara um par específico como significativamente diferente caso a diferença absoluta nas médias aritméticas das amostras, $|\bar{X}_j - \bar{X}_{j'}|$, seja maior do que o intervalo crítico.
4. Interprete os resultados.

No exemplo dos paraquedas, existem quatro fornecedores. Consequentemente, existem $4(4-1)/2 = 6$ comparações a serem realizadas entre pares. Para aplicar o procedimento de múltiplas comparações de Tukey-Kramer, você inicialmente calcula as diferenças absolutas entre as médias aritméticas, para todas as seis comparações realizadas entre pares. *Múltiplas comparações* refere-se ao fato de que você vai realizar, simultaneamente, uma inferência em relação a todas estas seis comparações:

1. $|\bar{X}_1 - \bar{X}_2| = |19,52 - 24,26| = 4,74$
2. $|\bar{X}_1 - \bar{X}_3| = |19,52 - 22,84| = 3,32$
3. $|\bar{X}_1 - \bar{X}_4| = |19,52 - 21,16| = 1,64$
4. $|\bar{X}_2 - \bar{X}_3| = |24,26 - 22,84| = 1,42$
5. $|\bar{X}_2 - \bar{X}_4| = |24,26 - 21,16| = 3,10$
6. $|\bar{X}_3 - \bar{X}_4| = |22,84 - 21,16| = 1,68$

Você precisa calcular somente um único intervalo crítico, já que os tamanhos de amostras nos quatro grupos são iguais. Com base na tabela resumida de ANOVA (Figura 11.6), $MQD = 6{,}094$ e $n_j = n_{j'} = 5$. Com base na Tabela E.7, para $\alpha = 0{,}05$, $c = 4$ e $n - c = 20 - 4 = 16$, $Q_\alpha$, o valor crítico da cauda superior da estatística do teste, é 4,05 (veja a Tabela 11.3).

**TABELA 11.3**
Encontrando a Estatística $Q_\alpha$ do Intervalo de Student, para $\alpha = 0{,}05$, com 4 e 16 Graus de Liberdade

**Probabilidades Acumuladas = 0,95**
**Área da Cauda Superior = 0,05**
**$gl_1$, Numerador**

| $gl_2$, Denominador | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| . | . | . | . | . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . | . | . | . | . |
| 11 | 3,11 | 3,82 | 4,26 | 4,57 | 4,82 | 5,03 | 5,20 | 5,35 |
| 12 | 3,08 | 3,77 | 4,20 | 4,51 | 4,75 | 4,95 | 5,12 | 5,27 |
| 13 | 3,06 | 3,73 | 4,15 | 4,45 | 4,69 | 4,88 | 5,05 | 5,19 |
| 14 | 3,03 | 3,70 | 4,11 | 4,41 | 4,64 | 4,83 | 4,99 | 5,13 |
| 15 | 3,01 | 3,67 | 4,08 | 4,37 | 4,60 | 4,78 | 4,94 | 5,08 |
| 16 | 3,00 | 3,65 | 4,05 | 4,33 | 4,56 | 4,74 | 4,90 | 5,03 |

Fonte: *Extraída da Tabela E.7.*

A partir da Equação (11.6),

$$\text{Intervalo crítico} = 4{,}05\sqrt{\left(\frac{6{,}094}{2}\right)\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right)} = 4{,}4712$$

Uma vez que $4{,}74 > 4{,}4712$, existe uma diferença significativa entre as médias aritméticas dos Fornecedores 1 e 2. Todas as outras diferenças entre os pares são pequenas o suficiente para que possam ser atribuídas ao acaso. Com 95% de confiança, você pode concluir que os paraquedas tecidos com a fibra fabricada pelo Fornecedor 1 apresentam média aritmética mais baixa para a resistência a tensão do que os paraquedas tecidos com a fibra fabricada pelo Fornecedor 2, mas não existem diferenças estatisticamente significativas entre os Fornecedores 1 e 3, entre os Fornecedores 1 e 4, entre os Fornecedores 2 e 3, entre os Fornecedores 2 e 4 e entre os Fornecedores 3 e 4. Observe que, pelo fato de utilizar $\alpha = 0{,}05$, você é capaz de realizar todas as seis comparações, com uma taxa de erro geral de somente 5%.

Esses resultados estão ilustrados na Figura 11.7. Ela segue as etapas utilizadas para avaliar essas comparações; cada uma das médias aritméticas é calculada, e são determinadas as diferenças absolutas, o intervalo crítico é calculado, e, a partir de então, cada uma das comparações é declarada significativa (médias aritméticas são diferentes) ou não significativas (médias aritméticas não são diferentes).

**FIGURA 11.7**
Planilha para o procedimento de Tukey-Kramer correspondente ao exemplo dos paraquedas

*A Figura 11.7 exibe a **planilha TK4** da **pasta de trabalho ANOVA Fator Único**. Crie essa planilha utilizando as instruções da Seção GE11.1. Leia as instruções do Excel Avançado para essa planilha para aprender sobre as fórmulas utilizadas nessa planilha.*

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Comparações Múltiplas de Tukey-Kramer | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | |
| 3 | | Média | Tamanho | | | Diferença | Erro-padrão da | Intervalo | |
| 4 | Grupo | da Amostra | da Amostra | | Comparação | Absoluta | Diferença | Crítico | Resultados |
| 5 | 1: Fornecedor 1 | 19,52 | 5 | | Grupo 1 com Grupo 2 | 4,74 | 1,103992754 | 4,4712 | Médias aritméticas são diferentes |
| 6 | 2: Fornecedor 2 | 24,26 | 5 | | Grupo 1 com Grupo 3 | 3,32 | 1,103992754 | 4,4712 | Médias aritméticas não são diferentes |
| 7 | 3: Fornecedor 3 | 22,84 | 5 | | Grupo 1 com Grupo 4 | 1,64 | 1,103992754 | 4,4712 | Médias aritméticas não são diferentes |
| 8 | 4: Fornecedor 4 | 21,16 | 5 | | Grupo 2 com Grupo 3 | 1,42 | 1,103992754 | 4,4712 | Médias aritméticas não são diferentes |
| 9 | | | | | Grupo 2 com Grupo 4 | 3,1 | 1,103992754 | 4,4712 | Médias aritméticas não são diferentes |
| 10 | Outros Dados | | | | Grupo 3 com Grupo 4 | 1,68 | 1,103992754 | 4,4712 | Médias aritméticas não são diferentes |
| 11 | Nível de significância | 0,05 | | | | | | | |
| 12 | g.l. do numerador | 4 | | | | | | | |
| 13 | g.l. do denominador | 16 | | | | | | | |
| 14 | MQD | 6,094 | | | | | | | |
| 15 | Estatística Q | 4,05 | | | | | | | |

## *Tópico Online:* A Análise das Médias Aritméticas (ANOM)

A análise das médias aritméticas (ANOM) oferece uma abordagem alternativa que permite que você determine qual, se é que algum, dentre os $c$ grupos possui uma média aritmética significativamente diferente da média aritmética geral de todas as médias aritméticas de grupos combinadas. Para estudar esse tópico, baixe para seu computador o arquivo contendo o *tópico online* com o título ANOM, que está disponível no site da LTC Editora para este livro. (Veja a Seção D.8 do Apêndice deste livro para aprender a acessar os arquivos com os tópicos *online*.)

## Pressupostos para ANOVA

Nos Capítulos 9 e 10, você aprendeu sobre os pressupostos necessários para que seja utilizado cada um dos procedimentos de teste de hipóteses e as consequências decorrentes de não se levar em consideração esses pressupostos. Para utilizar o teste $F$ de ANOVA de fator único, você deve também, necessariamente, adotar os seguintes pressupostos em relação às populações:

- Aleatoriedade e independência
- Normalidade
- Homogeneidade de variâncias

O primeiro pressuposto, **aleatoriedade e independência**, é crucialmente importante. A validação de qualquer experimento depende da amostragem aleatória e/ou do processo de aleatoriedade. Para evitar a presença de vieses nos resultados, você precisa selecionar amostras aleatórias a partir das $c$ populações ou aleatoriamente designar os itens aos $c$ níveis do fator. A seleção de uma amostra aleatória ou a atribuição aleatória aos níveis assegura que um dado valor de um determinado grupo seja independente de qualquer outro valor dentro do experimento. O fato de deixar de levar em consideração esse pressuposto pode afetar seriamente as inferências feitas a partir da ANOVA. Esses problemas são discutidos mais extensamente nas referências 5 e 9.



O segundo pressuposto, **normalidade**, afirma que os valores da amostra em cada um dos grupos selecionados são extraídos de uma população distribuída nos moldes da distribuição normal. Exatamente como no caso do teste $t$, o teste $F$ de ANOVA de fator único é relativamente robusto em relação a distanciamentos da distribuição normal. Contanto que as distribuições não sejam extremamente diferentes de uma distribuição normal, o nível de significância para o teste $F$ de ANOVA não é, de um modo geral, fortemente afetado, particularmente no que diz respeito a grandes tamanhos de amostras. Você pode avaliar a normalidade de cada uma das $c$ amostras por meio da construção de um gráfico para a probabilidade normal ou um *box-plot*.

O terceiro pressuposto, **homogeneidade de variâncias**, afirma que as variâncias dos $c$ grupos são iguais (ou seja, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \cdots = \sigma_c^2$). Caso você tenha amostras de iguais tamanhos em cada um dos grupos, as inferências baseadas na distribuição $F$ não são seriamente afetadas por variâncias diferentes. No entanto, caso você tenha diferentes tamanhos de amostras, variâncias desiguais podem vir a exercer sérios efeitos em relação a quaisquer inferências desenvolvidas a partir dos procedimentos de ANOVA. Por conseguinte, sempre que possível, você deve ter amostras de igual tamanho em todos os grupos. Você pode utilizar o teste de Levene para homogeneidade da variância, apresentado a seguir, para testar se as variâncias dos $c$ grupos são iguais.

Quando somente o pressuposto da normalidade é violado, você pode utilizar o teste de classificações de Kruskal-Wallis, um procedimento não paramétrico discutido na Seção 12.6. Quando somente o pressuposto da homogeneidade da variância é violado, você pode utilizar procedimentos similares àqueles utilizados no teste $t$ de variâncias separadas, descrito na Seção 10.1 (veja as referências 1 e 2). Quando tanto o pressuposto da normalidade quanto o pressuposto da homogeneidade da variância tenham sido violados, você precisa utilizar uma transformação de dados apropriada que, ao mesmo tempo, normalize os dados e reduza as diferenças nas variâncias (veja a referência 9) ou utilizar um procedimento não paramétrico de natureza mais abrangente (veja as referências 2 e 3).

## O Teste de Levene para Homogeneidade da Variância

Embora o teste $F$ de ANOVA de fator único seja relativamente robusto no que diz respeito ao pressuposto de iguais variâncias entre os grupos, grandes diferenças nas variâncias dos grupos podem afetar significativamente o nível de significância e a eficácia do teste $F$. Um procedimento com elevada eficácia estatística para testar a igualdade entre variâncias é o **teste de Levene** modificado (veja as referências 1, 4 e 7). Para testar a homogeneidade de variâncias, você utiliza a hipótese nula apresentada a seguir:

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \cdots = \sigma_c^2$$

contra a hipótese alternativa:

$$H_1: \text{Nem todas as } \sigma_j^2 \text{ são iguais } (j = 1, 2, 3, \ldots, c)$$

Para testar a hipótese nula de iguais variâncias, você calcula inicialmente o valor absoluto da diferença entre cada um dos valores e a mediana correspondente ao grupo. Depois disso, você realiza uma ANOVA de fator único para essas *diferenças absolutas*. A maioria dos estatísticos sugere o uso de um nível de significância de 0,05 ao realizar uma ANOVA. Para ilustrar o teste de Levene modificado, retorne ao cenário da Perfect Parachutes, que trata da resistência dos paraquedas à tensão, apresentado pela primeira vez no início deste capítulo. A Tabela 11.4 apresenta um resumo das diferenças absolutas em relação à mediana de cada um dos fornecedores.

**TABELA 11.4**
Diferenças Absolutas em Relação à Mediana da Resistência à Tensão para Quatro Fornecedores

| Fornecedor 1 (Mediana = 18,5) | Fornecedor 2 (Mediana = 24,5) | Fornecedor 3 (Mediana = 22,9) | Fornecedor 4 (Mediana = 20,4) |
|---|---|---|---|
| $\lvert 18{,}5 - 18{,}5\rvert = 0{,}0$ | $\lvert 26{,}3 - 24{,}5\rvert = 1{,}8$ | $\lvert 20{,}6 - 22{,}9\rvert = 2{,}3$ | $\lvert 25{,}4 - 20{,}4\rvert = 5{,}0$ |
| $\lvert 24{,}0 - 18{,}5\rvert = 5{,}5$ | $\lvert 25{,}3 - 24{,}5\rvert = 0{,}8$ | $\lvert 25{,}2 - 22{,}9\rvert = 2{,}3$ | $\lvert 19{,}9 - 20{,}4\rvert = 0{,}5$ |
| $\lvert 17{,}2 - 18{,}5\rvert = 1{,}3$ | $\lvert 24{,}0 - 24{,}5\rvert = 0{,}5$ | $\lvert 20{,}8 - 22{,}9\rvert = 2{,}1$ | $\lvert 22{,}6 - 20{,}4\rvert = 2{,}2$ |
| $\lvert 19{,}9 - 18{,}5\rvert = 1{,}4$ | $\lvert 21{,}2 - 24{,}5\rvert = 3{,}3$ | $\lvert 24{,}7 - 22{,}9\rvert = 1{,}8$ | $\lvert 17{,}5 - 20{,}4\rvert = 2{,}9$ |
| $\lvert 18{,}0 - 18{,}5\rvert = 0{,}5$ | $\lvert 24{,}5 - 24{,}5\rvert = 0{,}0$ | $\lvert 22{,}9 - 22{,}9\rvert = 0{,}0$ | $\lvert 20{,}4 - 20{,}4\rvert = 0{,}0$ |

Utilizando as diferenças absolutas apresentadas na Tabela 11.4, você realiza uma ANOVA de fator único (veja a Figura 11.8).

**FIGURA 11.8**
Resultados da planilha relativa ao teste de Levene das diferenças absolutas para o experimento dos paraquedas

*A Figura 11.8 exibe a **planilha CÁLCULO** da **pasta de trabalho LEVENE**. CÁLCULO utiliza as diferenças absolutas calculadas na **planilha DifsAbs** como os dados para o teste de Levene. Crie essas planilhas utilizando as instruções da Seção GE11.1. Leia as instruções do Excel Avançado para o teste de Levene para aprender sobre as fórmulas utilizadas na planilha DifsAbs.*

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ANOVA: Teste de Levene | | | | | | | | Cálculos | |
| 2 | | | | | | | | | c | 4 |
| 3 | RESUMO | | | | | | | | n | 20 |
| 4 | *Grupos* | *Contagem* | *Soma* | *Média* | *Variância* | | | | | |
| 5 | Fornecedor 1 | 5 | 8,7 | 1,74 | 4,753 | | | | | |
| 6 | Fornecedor 2 | 5 | 6,4 | 1,28 | 1,707 | | | | | |
| 7 | Fornecedor 3 | 5 | 8,5 | 1,7 | 0,945 | | | | | |
| 8 | Fornecedor 4 | 5 | 10,6 | 2,12 | 4,007 | | | | | |
| 9 | | | | | | | | | | |
| 10 | | | | | | | | | | |
| 11 | ANOVA | | | | | | | | | |
| 12 | *Fonte da Variação* | *SQ* | *gl* | *MQ* | *F* | *Valor-p* | *F crítico* | | | |
| 13 | Entre Grupos | 1,77 | 3 | 0,5900 | 0,2068 | 0,8902 | 3,2389 | | | |
| 14 | Dentro dos Grupos | 45,648 | 16 | 2,8530 | | | | | | |
| 15 | | | | | | | | | | |
| 16 | Total | 47,418 | | | | | | | | |
| 17 | | | | | Nível de Significância | | 0,05 | | | |

Com base na Figura 11.8, observe que $F_{ESTAT} = 0{,}2068$. (O Excel dá a esse valor a legenda *F*.) Uma vez que $F_{ESTAT} = 0{,}2068 < 3{,}2389$ (ou o valor-*p* $= 0{,}8902 > 0{,}05$), você não rejeita $H_0$. Não existem evidências de uma diferença significativa entre as quatro variâncias. Em outras palavras, é razoável pressupor que as matérias-primas dos quatro fornecedores produzem paraquedas com igual quantidade de variabilidade. Por conseguinte, o pressuposto de homogeneidade da variância para o procedimento ANOVA é justificado.

## EXEMPLO 11.1

### ANOVA para a Velocidade do Serviço de *Drive-Through* em Cadeias de Lanchonetes

Para lanchonetes, o guichê de atendimento direto a automóveis (*drive-through*) está se transformando em uma fonte de receita cada vez maior. A cadeia de lanchonetes que oferece o serviço mais rápido tem maior probabilidade de atrair novos consumidores. A cada mês, a *QSR Magazine*, **www.qsrmagazine.com**, publica os resultados de seus estudos sobre tempos de espera em serviços de *drive-through* (desde a chegada ao guichê para escolha do lanche até a partida) em cadeias de lanchonetes. Em um mês recente, a média aritmética do tempo foi de 131,08 segundos para o Wendy's; 153,06 segundos para a Burger King; 154,88 segundos para a Taco Bell; 158,77 segundos para o McDonald's; e 178,52 segundos para o KFC. Suponha que o estudo tenha se baseado em 20 consumidores para cada uma das cadeias de lanchonetes e que tenha sido desenvolvida a tabela de ANOVA apresentada na Tabela 11.5.

**TABELA 11.5**
Tabela Resumida de ANOVA para a Velocidade do Atendimento Necessário para Atendimento em Cadeias de Lanchonetes *Drive-Through*

| Fonte | Graus de Liberdade | Soma dos Quadrados | Média dos Quadrados | *F* | Valor-*p* |
|---|---|---|---|---|---|
| Entre cadeias | 4 | 22.860,09 | 5.715,02 | 43,76 | 0,0000 |
| Dentro das cadeias | 95 | 12.407,00 | 130,60 | | |

No nível de significância de 0,05, existem evidências de uma diferença na média aritmética dos tempos de espera nos guichês de atendimento do tipo *drive-through* para as cinco cadeias de lanchonetes?

**SOLUÇÃO**

$H_0$: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5$ em que 1 = Wendy's, 2 = Burger King, 3 = Taco Bell, 4 = McDonald's, 5 = KFC

$H_1$: Nem todas as $\mu_j$ são iguais em que $j = 1, 2, 3, 4, 5$

Regra de decisão: Se o valor-*p* < 0,05, rejeitar $H_0$. Uma vez que o valor-*p* é praticamente igual a 0, o que corresponde a um valor mais baixo do que $\alpha = 0{,}05$, rejeitar $H_0$.

Você tem evidências suficientes para concluir que as médias aritméticas dos tempos de espera nos guichês de atendimento do tipo *drive-through* para as cinco cadeias de lanchonetes não são todas iguais.



Para determinar quais dentre as médias aritméticas são significativamente diferentes umas das outras, utilize o procedimento de Tukey-Kramer [Equação (11.6)] para estabelecer o intervalo crítico:

Valor crítico de $Q$ com 5 e 95 graus de liberdade $\approx 3{,}92$

$$\text{Intervalo crítico} = Q_\alpha\sqrt{\left(\frac{MQD}{2}\right)\left(\frac{1}{n_j}+\frac{1}{n_{j'}}\right)} = (3{,}92)\sqrt{\left(\frac{130{,}6}{2}\right)\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{20}\right)}$$
$$= 10{,}02$$

Qualquer diferença observada superior a 10,02 é considerada significativa. As médias aritméticas para os tempos de espera nos guichês de atendimento do tipo *drive-through* são diferentes entre a Wendy's (média aritmética de 131,08 segundos) e cada uma das outras quatro cadeias de lanchonetes. Do mesmo modo, a média aritmética do tempo de espera no guichê de *drive-through* do KFC é diferente das médias aritméticas para as outras quatro cadeias. Assim, com 95% de confiança, você pode concluir que a média aritmética dos tempos de espera nos guichês de atendimento *drive-through* da Wendy's é mais rápida do que para o Burger King, a Taco Bell, o McDonald's e o KFC. Além disso, a média aritmética do tempo de espera nos guichês do KFC é mais lenta do que a média aritmética para a Wendy's, o Burger King, a Taco Bell e o McDonald's.

## Problemas para a Seção 11.1

### APRENDENDO O BÁSICO

**11.1** Um determinado experimento possui um único fator, com cinco grupos e sete valores em cada grupo.

a. Quantos graus de liberdade existem para a determinação da variação entre os grupos?
b. Quantos graus de liberdade existem para a determinação da variação dentro dos grupos?
c. Quantos graus de liberdade existem na determinação da variação total?

**11.2** Você está trabalhando com o mesmo experimento apresentado no Problema 11.1.

a. Se $SQE = 60$ e $STQ = 210$, qual o valor de $SQD$?
b. Qual o valor de $MQE$?
c. Qual o valor de $MQD$?
d. Qual é o valor da estatística do teste $F_{ESTAT}$?

**11.3** Você está trabalhando com o mesmo experimento apresentado nos Problemas 11.1 e 11.2.

a. Construa uma tabela resumida de ANOVA e preencha todos os valores no corpo da tabela.
b. No nível de significância de 0,05, qual é o valor crítico da cauda superior, a partir da distribuição *F*?
c. Defina a regra de decisão para testar a hipótese nula de que todos os cinco grupos possuem iguais médias aritméticas de população.
d. Qual é a sua decisão estatística?

**11.4** Considere um experimento contendo três grupos, com sete valores em cada um deles.

a. Quantos graus de liberdade existem para a determinação da variação entre os grupos?
b. Quantos graus de liberdade existem para a determinação da variação dentro dos grupos?
c. Quantos graus de liberdade existem na determinação da variação total?

**11.5** Considere um experimento contendo quatro grupos, com oito valores em cada um deles. Para a tabela resumida de ANOVA apresentada a seguir, preencha todos os resultados que estão faltando:

| Fonte | Graus de Liberdade | Soma dos Quadrados | Média dos Quadrados (Variância) | *F* |
|---|---|---|---|---|
| Entre grupos | $c - 1 = ?$ | $SQE = ?$ | $MQE = 80$ | $F_{ESTAT} = ?$ |
| Dentro dos grupos | $n - c = ?$ | $SQD = 560$ | $MQD = ?$ | |
| *Total* | $n - 1 = ?$ | $STQ = ?$ | | |

**11.6** Você está trabalhando com o mesmo experimento apresentado no Problema 11.5.

a. No nível de significância de 0,05, expresse a regra de decisão para testar a hipótese nula de que todos os quatro grupos apresentam iguais médias aritméticas de população.
b. Qual é a sua decisão estatística?
c. No nível de significância de 0,05, qual é o valor crítico para a cauda superior, a partir da distribuição do intervalo de Student?
d. Para realizar o procedimento de Tukey-Kramer, qual é o intervalo crítico?

### APLICANDO OS CONCEITOS

**11.7** A CARS – Computer Anxiety Rating Scale mede o nível de ansiedade de um indivíduo causado por computadores, em uma escala que vai de 20 (nenhuma ansiedade) até 100 (nível mais alto de ansiedade). Pesquisadores na Miami University administraram a CARS a 172 estudantes da área de administração. Um dos objetivos do estudo era determinar se existem diferenças em termos do nível de ansiedade causado por computadores entre os alunos das diferentes áreas de especialização. Eles descobriram o seguinte:

| Fonte | Graus de Liberdade | Soma dos Quadrados | Média dos Quadrados | *F* |
|---|---|---|---|---|
| Entre grupos | 5 | 3,172 | | |
| Dentro dos grupos | 166 | 21,246 | | |
| Total | 171 | 24,418 | | |

| Especialização | $n$ | Média Aritmética |
|---|---|---|
| Marketing | 19 | 44,37 |
| Administração | 11 | 43,18 |
| Outra | 14 | 42,21 |
| Finanças | 45 | 41,80 |
| Contabilidade | 36 | 37,56 |
| SIG | 47 | 32,21 |

Fonte: *Extraída de T. Broome and D. Havelka, "Determinants of Computer Anxiety in Business Students"*, The Review of Business Information Systems, *primavera de 2002, 6(2), pp. 9-16.*

**a.** Complete a tabela resumida de ANOVA.
**b.** No nível de significância de 0,05, existem evidências de diferenças na média aritmética da ansiedade causada por computadores, tomando-se como base as diferentes especializações?
**c.** Se os resultados em (b) indicarem ser apropriado, utilize o procedimento de Tukey-Kramer para determinar quais especializações diferem em termos da média aritmética da ansiedade causada por computadores. Argumente sobre as suas descobertas.

AUTO-AVALIAÇÃO **11.8** Alunos de um curso de estatística para executivos realizaram um projeto completamente aleatório para testar a resistência de quatro marcas de sacos de lixo. Pesos correspondentes a uma libra (aproximadamente 454 gramas) foram colocados em um dos sacos de lixo, um de cada vez, até que o saco se rompesse. Foi utilizado um total de 40 sacos, 10 para cada uma das marcas. Os dados no arquivo **SacosLixo** fornecem o peso (em libras) necessário para que os sacos de lixo venham a se romper.
**a.** No nível de significância de 0,05, existem evidências de alguma diferença em termos da média aritmética correspondente à resistência das quatro marcas de sacos de lixo?
**b.** Caso seja apropriado, determine quais marcas diferem em termos da média aritmética da resistência.
**c.** No nível de significância de 0,05, existem evidências de alguma diferença em termos da variação na resistência das quatro marcas de sacos de lixo?
**d.** Que marca(s) você deveria comprar, e que marca(s) deveria evitar? Explique.

**11.9** Um hospital conduziu um estudo sobre o tempo de espera em seu departamento de emergência. O hospital possui um edifício central e três localizações satélites. A administração tem como objetivo estratégico reduzir o tempo de espera de casos no departamento de emergência que não requeiram atenção imediata. Para estudar essa estratégia, foi selecionada, em um determinado dia, uma amostra aleatória de 15 casos no departamento de emergência que não exigiam atenção imediata, em cada uma das localizações, e mensurou-se o tempo de espera (medido desde o momento em que o paciente dá entrada no hospital até o momento em que é chamado para atendimento clínico). Os resultados estão armazenados no arquivo **EsperaEmerg**.
**a.** No nível de significância de 0,05, existem evidências de alguma diferença em termos da média aritmética para os tempos de espera, entre as quatro localizações?
**b.** Caso seja apropriado, determine quais localizações diferem em termos da média aritmética para o tempo de espera.
**c.** No nível de significância de 0,05, existem evidências de alguma diferença em termos da variação nos tempos de espera, entre as quatro localizações?

**11.10** Uma agência de propaganda foi contratada por um fabricante de canetas para desenvolver uma campanha publicitária para a próxima temporada de férias. Para se preparar para esse projeto, o diretor de pesquisa decide iniciar um estudo sobre o efeito da propaganda na percepção do produto. Um experimento é projetado no sentido de comparar cinco propagandas diferentes. A propaganda *A* subestima consideravelmente as características da caneta. A propaganda *B* subestima sutilmente as características da caneta. A propaganda *C* superestima sutilmente as características da caneta. A propaganda *D* superestima consideravelmente as características da caneta. A propaganda *E* tenta expressar corretamente as características da caneta. Uma amostra de 30 respondentes adultos, extraída de um grupo de foco mais amplo, é designada aleatoriamente para as cinco propagandas (de modo tal que existam seis respondentes em cada um dos grupos). Depois de ler a propaganda e desenvolver um senso de "expectativa para o produto", todos os respondentes, incognitamente, recebem a mesma caneta para ser avaliada. É permitido que os respondentes testem a caneta e a veracidade do anúncio. Solicita-se então aos respondentes que classifiquem a caneta de 1 a 7 (da menor para a maior), em termos das escalas para as características do produto relacionadas a aparência, durabilidade e desempenho de escrita. As classificações *combinadas* dessas três características (aparência, durabilidade e desempenho de escrita) para os 30 respondentes (armazenadas em **Caneta**) são as seguintes:

| A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|
| 15 | 16 | 8 | 5 | 12 |
| 18 | 17 | 7 | 6 | 19 |
| 17 | 21 | 10 | 13 | 18 |
| 19 | 16 | 15 | 11 | 12 |
| 19 | 19 | 14 | 9 | 17 |
| 20 | 17 | 14 | 10 | 14 |

**a.** No nível de significância de 0,05, existem evidências de alguma diferença em termos da média aritmética para a classificação no que concerne às cinco propagandas?
**b.** Caso seja apropriado, determine quais propagandas diferem em termos da média aritmética da classificação.
**c.** No nível de significância de 0,05, existem evidências de alguma diferença em termos da variação entre as classificações correspondentes às cinco propagandas?
**d.** Que propaganda(s) você deve utilizar e que propaganda(s) você deve evitar? Explique.

**11.11** O arquivo **RendimentoCD** contém os rendimentos de uma conta do mercado monetário, um certificado de depósito (CD) com vencimento em 1 ano e um CD com vencimento em 5 anos de 23 bancos na área de metropolitana de Nova York, para 28 de maio de 2009 ( dados extraídos de **www.bankrate.com**, 28 de maio de 2009):
**a.** No nível de significância de 0,05, existem evidências de alguma diferença em termos da média aritmética para os rendimentos das diferentes contas?
**b.** Caso seja apropriado, determine quais contas diferem em termos da média aritmética dos rendimentos.
**c.** No nível de significância de 0,05, existem evidências de alguma diferença na variação nos rendimentos das diferentes contas?
**d.** Que efeito o seu resultado em (c) exerce sobre a validade dos resultados em (a) e (b)?



**11.12** Circuitos integrados são fabricados em pastilhas de silício, por meio de um processo que envolve uma série de etapas. Foi conduzido um experimento para estudar o efeito de três métodos da etapa de limpeza sobre o resultado final (codificado de modo a manter a confidencialidade). Os resultados (armazenados em **Resultado-FatorÚnico**) foram os seguintes:

| Novo1 | Novo2 | Tradicional |
|---|---|---|
| 38 | 29 | 31 |
| 34 | 35 | 23 |
| 38 | 34 | 38 |
| 34 | 20 | 29 |
| 19 | 35 | 32 |
| 28 | 37 | 30 |

Fonte: *Extraída de J. Ramirez and W. Team "An Autologistic Model for Integrated Circuit Manufacturing"*, Journal of Quality Technology, *2000, 32, pp. 254-262.*

**a.** No nível de significância de 0,05, existem evidências de uma diferença em termos da média aritmética para o resultado final, por entre os métodos utilizados na etapa de limpeza?
**b.** Caso seja apropriado, determine quais métodos diferem em termos da média aritmética para o resultado final
**c.** No nível de significância de 0,05, existem evidências de alguma diferença em termos da variação nos resultados finais, por entre os diferentes métodos?
**d.** Que efeito o seu resultado em (c) exerce sobre a validade dos resultados em (a) e (b)?

**11. 13** Uma empresa que fabrica ração para gatos tem como objetivo expandir sua linha de produtos para algo mais do que os alimentos enlatados feitos a base de rim bovino e camarão. A empresa desenvolveu dois novos produtos, um à base de fígado de frango e outro à base de salmão. A empresa conduziu um experimento para comparar os dois novos produtos com os dois já existentes, e também com o produto genérico, feito à base de carne, vendido em uma cadeia de supermercados.

Para o experimento, foi selecionada uma amostra de 50 gatos, de uma população de um abrigo de animais local. Dez gatos foram designados aleatoriamente a cada um dos cinco produtos que estavam sendo testados. Foi então oferecido a cada um dos gatos aproximadamente 100 gramas do alimento selecionado em uma tigela na hora da alimentação. Os pesquisadores definiram a variável a ser mensurada como o número de gramas de alimento que o gato consumia dentro de um intervalo de tempo de 10 minutos que começava quando a tigela era abastecida e oferecida. Os resultados para esse experimento estão resumidos na tabela a seguir e armazenados em **RaçãoGato**.

| Rim | Camarão | Fígado de Frango | Salmão | Carne |
|---|---|---|---|---|
| 2,37 | 2,26 | 2,29 | 1,79 | 2,09 |
| 2,62 | 2,69 | 2,23 | 2,33 | 1,87 |
| 2,31 | 2,25 | 2,41 | 1,96 | 1,67 |
| 2,47 | 2,45 | 2,68 | 2,05 | 1,64 |
| 2,59 | 2,34 | 2,25 | 2,26 | 2,16 |
| 2,62 | 2,37 | 2,17 | 2,24 | 1,75 |
| 2,34 | 2,22 | 2,37 | 1,96 | 1,18 |
| 2,47 | 2,56 | 2,26 | 1,58 | 1,92 |
| 2,45 | 2,36 | 2,45 | 2,18 | 1,32 |
| 2,32 | 2,59 | 2,57 | 1,93 | 1,94 |

**a.** No nível de significância de 0,05, existem evidências de alguma diferença em termos da média aritmética da quantidade de alimento ingerido entre os vários produtos?
**b.** Caso seja apropriado, determine quais produtos aparentam diferir significativamente em termos da média aritmética da quantidade de alimento ingerido.
**c.** No nível de significância de 0,05, existem evidências de alguma diferença significativa em termos da variação na quantidade de alimento ingerido entre os vários produtos?
**d.** O que a empresa que fabrica ração para gatos deve concluir? Descreva integralmente as opções dessa empresa com relação aos produtos.

**11.14** Uma empresa que fabrica material esportivo queria comparar a distância percorrida por bolas de golfe produzidas com cada um de quatro diferentes modelos. Dez bolas foram fabricadas com cada um dos modelos e então levadas ao campo de golfe local para que fossem testadas pelo especialista em tacos de golfe. A ordem em que as bolas foram lançadas pelo mesmo taco, a partir da primeira baliza, foi aleatória, de modo tal que o especialista não soubesse qual tipo de bola seria lançado. Todas as 40 bolas foram lançadas em um curto período de tempo, com condições ambientais essencialmente iguais. Os resultados (distância percorrida, em jardas) para os quatro modelos foram os seguintes (e armazenados em **BolaGolfe**):

| Modelo | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 206,32 | 217,08 | 226,77 | 230,55 |
| 207,94 | 221,43 | 224,79 | 227,95 |
| 206,19 | 218,04 | 229,75 | 231,84 |
| 204,45 | 224,13 | 228,51 | 224,87 |
| 209,65 | 211,82 | 221,44 | 229,49 |
| 203,81 | 213,90 | 223,85 | 231,10 |
| 206,75 | 221,28 | 223,97 | 221,53 |
| 205,68 | 229,43 | 234,30 | 235,45 |
| 204,49 | 213,54 | 219,50 | 228,35 |
| 210,86 | 214,51 | 233,00 | 225,09 |

**a.** No nível de significância de 0,05, existem evidências de alguma diferença em termos da média aritmética das distâncias percorridas pelas bolas de golfe dos diferentes modelos?
**b.** Caso os resultados em (a) indiquem que é apropriado, utilize o procedimento de Tukey-Kramer para determinar quais modelos diferem em termos da média aritmética da distância percorrida.
**c.** Quais pressupostos são necessários em (a)?
**d.** No nível de significância de 0,05, existem evidências de alguma diferença na variação das distâncias percorridas pelas bolas de golfe de diferentes modelos?
**e.** Qual o modelo de bola de golfe que o gerente de vendas deve escolher? Explique.

# 11.2 O Modelo Fatorial: Análise da Variância de Dois Fatores

Na Seção 11.1, você aprendeu sobre o modelo completamente aleatório. Nesta seção, o modelo completamente aleatório com um único fator é estendido para o **modelo fatorial de dois fatores**, no qual dois fatores são avaliados simultaneamente. Cada um dos fatores é avaliado em dois ou mais níveis. Por exemplo, no cenário da Perfect Parachutes, no início do capítulo, a empresa se depara com o problema empresarial de avaliar simultaneamente quatro fornecedores e dois tipos de teares, de modo a determinar qual fornecedor e qual tear produzem os paraquedas mais fortes. Embora esta seção utilize somente dois fatores, modelos fatoriais para três ou mais fatores são também possíveis (veja as referências 4, 5, 6, 7 e 9).

Para analisar dados de um modelo fatorial de dois fatores, você utiliza **ANOVA de dois fatores**. As definições a seguir são necessárias para o desenvolvimento do procedimento ANOVA de dois fatores.

$r$ = número de níveis do fator $A$

$c$ = número de níveis do fator $B$

$n'$ = número de valores (réplicas) para cada célula (combinação de um determinado nível do fator $A$ e um determinado nível do fator $B$)

$n$ = número de valores em todo o experimento (em que $n = rcn'$)

$X_{ijk}$ = valor da $k$-ésima observação para o nível $i$ do fator $A$ e para o nível $j$ do fator $B$

$$\bar{\bar{X}} = \frac{\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\sum_{k=1}^{n'} X_{ijk}}{rcn'} = \text{grande média}$$

$$\bar{X}_{i..} = \frac{\sum_{j=1}^{c}\sum_{k=1}^{n'} X_{ijk}}{cn'} = \text{média aritmética do } i\text{-ésimo nível do fator } A \text{ (em que } i = 1, 2, ..., r)$$

$$\bar{X}_{.j.} = \frac{\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{n'} X_{ijk}}{rn'} = \text{média aritmética do } j\text{-ésimo nível do fator } B \text{ (em que } j = 1, 2, ..., c)$$

$$\bar{X}_{ij.} = \frac{\sum_{k=1}^{n'} X_{ijk}}{n'} = \text{média aritmética da célula } ij\text{, a combinação entre o } i\text{-ésimo nível do fator } A \text{ com o } j\text{-ésimo nível do fator } B$$

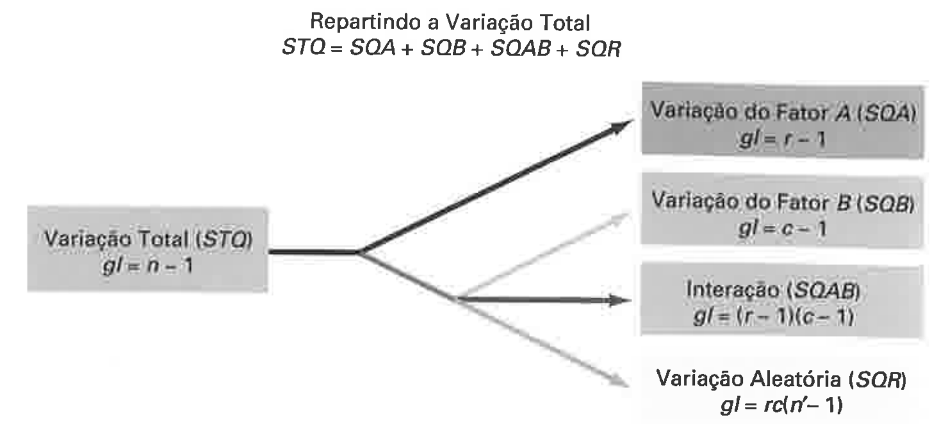
Devido à complexidade desses cálculos, você deve utilizar somente métodos informatizados ao realizar essa análise. Entretanto, para ajudar a explicar ANOVA de dois fatores, é ilustrada a decomposição da variação total calculada com o uso desse método. Nessa discussão, serão considerados somente casos em que existe um número igual de **repetições** (tamanhos de amostras $n'$) para cada uma das combinações entre os níveis do fator $A$ e os níveis do fator $B$. (Veja as referências 1 e 6 para uma discussão sobre modelos fatoriais de dois fatores com diferentes tamanhos de amostras.)

## Testando os Efeitos dos Fatores e os Efeitos da Interação

Existe uma **interação** entre os fatores $A$ e $B$ se o efeito do fator $A$ for dependente do nível do fator $B$. Consequentemente, ao dividir a variação total em diferentes fontes de variação, você precisa levar em consideração um possível efeito de interação, assim como para o fator $A$, o fator $B$ e o erro aleatório. Para isso, a variação total ($STQ$) é subdividida entre a soma dos quadrados decorrente do fator $A$ ($SQA$), a soma dos quadrados decorrente do fator $B$ ($SQB$), a soma dos quadrados decorrente do efeito da interação do fator $A$ com o fator $B$ ($SQAB$) e a soma dos quadrados decorrente da variação aleatória ($SQR$). Essa decomposição da variação total ($STQ$) é apresentada na Figura 11.9.



**FIGURA 11.9**
Repartindo a variação total em um modelo fatorial de dois fatores




A **soma total dos quadrados ($STQ$)** representa a variação total entre todos os valores em torno da grande média. A Equação (11.7) mostra o cálculo para a variação total.

VARIAÇÃO TOTAL EM ANOVA DE DOIS FATORES

$$STQ = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\sum_{k=1}^{n'}(X_{ijk} - \bar{\bar{X}})^2 \qquad \textbf{(11.7)}$$

A **soma dos quadrados decorrente do fator $A$ ($SQA$)** representa as diferenças entre os vários níveis do fator $A$ e a grande média. A Equação (11.8) mostra os cálculos para a variação decorrente do fator $A$.

VARIAÇÃO DO FATOR A

$$SQA = cn'\sum_{i=1}^{r}(\bar{X}_{i..} - \bar{\bar{X}})^2 \qquad \textbf{(11.8)}$$

A **soma dos quadrados decorrente do fator $B$ ($SQB$)** representa as diferenças entre os vários níveis do fator $B$ e a grande média. A Equação (11.9) mostra os cálculos para a variação decorrente do fator $B$.

VARIAÇÃO DO FATOR B

$$SQB = rn'\sum_{j=1}^{c}(\bar{X}_{.j.} - \bar{\bar{X}})^2 \qquad \textbf{(11.9)}$$

A **soma dos quadrados decorrente da interação ($SQAB$)** representa o efeito decorrente da interação entre combinações específicas do fator $A$ e do fator $B$. A Equação (11.10) demonstra os cálculos correspondentes à variação decorrente da interação.

VARIAÇÃO DECORRENTE DA INTERAÇÃO

$$SQAB = n'\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}(\bar{X}_{ij.} - \bar{X}_{i..} - \bar{X}_{.j.} + \bar{\bar{X}})^2 \qquad \textbf{(11.10)}$$

A **soma dos quadrados dos erros ($SQR$)**, representa a variação aleatória, ou seja, as diferenças entre os valores dentro de cada uma das células e a correspondente média aritmética da célula. A Equação (11.11) mostra os cálculos para a variação aleatória.

ERRO ALEATÓRIO EM ANOVA DE DOIS FATORES

$$SQR = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\sum_{k=1}^{n'}(X_{ijk} - \bar{X}_{ij.})^2 \quad \textbf{(11.11)}$$

Em razão de existirem $r$ níveis do fator $A$, existem $r - 1$ graus de liberdade associados a $SQA$. De modo semelhante, uma vez que existem $c$ níveis do fator $B$, existem $c - 1$ graus de liberdade associados a $SQB$. Como existem $n'$ réplicas em cada uma das $rc$ células, existem $rc(n' - 1)$ graus de liberdade associados ao termo $SQR$. Levando isso mais adiante, existem $n - 1$ graus de liberdade associados à soma total dos quadrados ($STQ$), uma vez que você está comparando cada um dos valores $X_{ijk}$ à grande média, $\bar{\bar{X}}$, baseada em todos os $n$ valores. Por conseguinte, como a soma dos graus de liberdade para cada uma das fontes de variação deve ser igual ao número de graus de liberdade correspondentes à variação total ($STQ$), você pode calcular os graus de liberdade para o componente de interação ($SQAB$) por meio de uma subtração. Os graus de liberdade para a interação correspondem a $(r - 1)(c - 1)$.

Se dividir cada uma das somas dos quadrados por seus respectivos graus de liberdade associados, você terá as quatro variâncias ou termos correspondentes à média dos quadrados (ou seja, $MQA$, $MQB$, $MQAB$ e $MQR$). As Equações (11.12a-d) fornecem os termos de média dos quadrados necessários para a tabela ANOVA de dois fatores.

MÉDIA DOS QUADRADOS EM ANOVA DE DOIS FATORES

$$MQA = \frac{SQA}{r - 1} \quad \textbf{(11.12a)}$$

$$MQB = \frac{SQB}{c - 1} \quad \textbf{(11.12b)}$$

$$MQAB = \frac{SQAB}{(r - 1)(c - 1)} \quad \textbf{(11.12c)}$$

$$MQR = \frac{SQR}{rc(n' - 1)} \quad \textbf{(11.12d)}$$

Existem três testes diferentes para serem realizados em uma ANOVA com dois fatores:

1. Para testar a hipótese de nenhuma diferença decorrente do fator $A$:

$$H_0: \mu_{1..} = \mu_{2..} = \cdots = \mu_{r..}$$

contra a hipótese alternativa:

$$H_1: \text{Nem todas as } \mu_{i..} \text{ são iguais}$$

você utiliza a estatística $F_{ESTAT}$ na Equação (11.13).

TESTE *F* PARA O EFEITO DO FATOR *A*

$$F_{ESTAT} = \frac{MQA}{MQR} \quad \textbf{(11.13)}$$

Você rejeita a hipótese nula no nível $\alpha$ de significância se

$$F_{ESTAT} = \frac{MQA}{MQR} > F_\alpha$$

em que $F_\alpha$ representa o valor crítico da cauda superior, a partir de uma distribuição $F$, com $r - 1$ e $rc(n' - 1)$ graus de liberdade.

2. Para testar a hipótese de nenhuma diferença decorrente do fator $B$:

$$H_0: \mu_{.1.} = \mu_{.2.} = \cdots = \mu_{.c.}$$



contra a hipótese alternativa:

$$H_1: \text{Nem todas as } \mu_{.j.} \text{ são iguais}$$

você utiliza a estatística $F_{ESTAT}$ na Equação (11.14).

TESTE *F* PARA O EFEITO DO FATOR *B*

$$F_{ESTAT} = \frac{MQB}{MQR} \quad \textbf{(11.14)}$$

Você rejeita a hipótese nula no nível $\alpha$ de significância, se

$$F_{ESTAT} = \frac{MQB}{MQR} > F_\alpha$$

em que $F_\alpha$ representa o valor crítico da cauda superior de uma distribuição $F$, com $c - 1$ e $rc(n' - 1)$ graus de liberdade.

3. Para testar a hipótese de nenhuma interação entre os fatores $A$ e $B$:

$$H_0: \text{A interação entre } A \text{ e } B \text{ é igual a zero}$$

contra a hipótese alternativa:

$$H_1: \text{A interação entre } A \text{ e } B \text{ não é igual a zero}$$

você utiliza a estatística $F_{ESTAT}$ na Equação (11.15).

TESTE *F* PARA O EFEITO DA INTERAÇÃO

$$F_{ESTAT} = \frac{MQAB}{MQR} \quad \textbf{(11.15)}$$

Você rejeita a hipótese nula no nível $\alpha$ de significância se:

$$F_{ESTAT} = \frac{MQAB}{MQR} > F_\alpha$$

em que $F_\alpha$ representa o valor crítico da cauda superior de uma distribuição $F$, com $(r - 1)(c - 1)$ e $rc(n' - 1)$ graus de liberdade.

A Tabela 11.6 apresenta a tabela inteira para uma ANOVA de dois fatores.

**TABELA 11.6**
Tabela de Análise da Variância para o Modelo Fatorial de Dois Fatores

| Fonte | Graus de Liberdade | Soma dos Quadrados | Média dos Quadrados (Variância) | F |
|---|---|---|---|---|
| $A$ | $r - 1$ | $SQA$ | $MQA = \frac{SQA}{r - 1}$ | $F_{ESTAT} = \frac{MQA}{MQR}$ |
| $B$ | $c - 1$ | $SQB$ | $MQB = \frac{SQB}{c - 1}$ | $F_{ESTAT} = \frac{MQB}{MQR}$ |
| $AB$ | $(r - 1)(c - 1)$ | $SQAB$ | $MQAB = \frac{SQAB}{(r - 1)(c - 1)}$ | $F_{ESTAT} = \frac{MQAB}{MQR}$ |
| Erro | $rc(n' - 1)$ | $SQR$ | $MQR = \frac{SQR}{rc(n' - 1)}$ | |
| Total | $n - 1$ | $STQ$ | | |

Para examinar uma ANOVA de dois fatores, retorne ao cenário da Perfect Parachutes no início deste capítulo. Como gerente de produção da Perfect Parachutes, o problema empresarial que você decidiu examinar envolvia não somente avaliar os diferentes fornecedores, mas também determinar se os paraquedas tecidos com os teares da marca Jetta seriam tão resistentes quanto aqueles tecidos com os teares da marca Turk. Além disso, você precisa determinar se quaisquer diferenças entre os quatro fornecedores, em termos de resistência dos paraquedas, são dependentes do tipo de tear utilizado. Assim, você decidiu coletar os dados realizando um experimento no qual cinco diferentes paraquedas de cada um dos fornecedores são fabricados com cada um dos dois diferentes teares. Os resultados são apresentados na Tabela 11.7 e estão armazenados no arquivo **Paraquedas2**.

**TABELA 11.7**
Resistência à Tensão dos Paraquedas Tecidos em Dois Tipos de Teares, com Fibras Sintéticas de Quatro Fornecedores

| | FORNECEDOR | | | |
|---|---|---|---|---|
| **TEAR** | **1** | **2** | **3** | **4** |
| Jetta | 20,6 | 22,6 | 27,7 | 21,5 |
| Jetta | 18,0 | 24,6 | 18,6 | 20,0 |
| Jetta | 19,0 | 19,6 | 20,8 | 21,1 |
| Jetta | 21,3 | 23,8 | 25,1 | 23,9 |
| Jetta | 13,2 | 27,1 | 17,7 | 16,0 |
| Turk | 18,5 | 26,3 | 20,6 | 25,4 |
| Turk | 24,0 | 25,3 | 25,2 | 19,9 |
| Turk | 17,2 | 24,0 | 20,8 | 22,6 |
| Turk | 19,9 | 21,2 | 24,7 | 17,5 |
| Turk | 18,0 | 24,5 | 22,9 | 20,4 |

A Figura 11.10 apresenta em uma planilha os resultados para esse exemplo. Nessa planilha, as fontes de variação $A$, $B$ e Erro, apresentadas na Tabela 11.6, estão com as legendas Amostra, Colunas e Dentro, respectivamente, na tabela de ANOVA.

**FIGURA 11.10**
Planilha para ANOVA de dois fatores, para o experimento que trata do fornecedor e do tear para os paraquedas

*A Figura 11.10 exibe a **planilha CÁLCULO** da pasta de trabalho **ANOVA Dois Fatores**. Crie essa planilha utilizando as instruções da Seção GE11.2. Leia as instruções do* Excel Avançado *para essa planilha para aprender sobre as fórmulas utilizadas na planilha.*

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ANOVA: Fator Duplo com Repetição | | | | | | |
| 2 | | | | | | | |
| 3 | **RESUMO** | **Fornecedor 1** | **Fornecedor 2** | **Fornecedor 3** | **Fornecedor 4** | **Total** | |
| 4 | ***Jetta*** | | | | | | |
| 5 | Contagem | 5 | 5 | 5 | 5 | 20 | |
| 6 | Soma | 92,1 | 117,7 | 109,9 | 102,5 | 422,2 | |
| 7 | Média | 18,42 | 23,54 | 2198 | 20,5 | 21,11 | |
| 8 | Variância | 10,2020 | 7,5680 | 18,3970 | 8,3550 | 13,1283 | |
| 9 | | | | | | | |
| 10 | ***Turk*** | | | | | | |
| 11 | Contagem | 5 | 5 | 5 | 5 | 20 | |
| 12 | Soma | 97,6 | 121,3 | 114,2 | 105,8 | 438,9 | |
| 13 | Média | 19,52 | 24,26 | 22,84 | 21,16 | 21,945 | |
| 14 | Variância | 7,2370 | 3,6830 | 4,5530 | 8,9030 | 8,4626 | |
| 15 | | | | | | | |
| 16 | ***Total*** | | | | | | |
| 17 | Contagem | 10 | 10 | 10 | 10 | | |
| 18 | Soma | 189,7 | 239 | 224,1 | 208,3 | | |
| 19 | Média | 18,97 | 23,9 | 22,41 | 20,83 | | |
| 20 | Variância | 8,0868 | 5,1444 | 10,4054 | 7,7912 | | |
| 21 | | | | | | | |
| 22 | | | | | | | |
| 23 | **ANOVA** | | | | | | |
| 24 | ***Fonte da Variação*** | ***SQ*** | ***gl*** | ***MQ*** | ***F*** | ***Valor-p*** | ***F crítico*** |
| 25 | Amostra | 6,9722 | 1 | 6,9722 | 0,8096 | 0,3750 | 4,1491 |
| 26 | Colunas | 134,3488 | 3 | 44,7829 | 5,1999 | 0,0049 | 2,9011 |
| 27 | Interação | 0,2868 | 3 | 0,0956 | 0,0111 | 0,9984 | 2,9011 |
| 28 | Dentro | 275,5920 | 32 | 8,6123 | | | |
| 29 | | | | | | | |
| 30 | Total | 417,1998 | 39 | | | | |
| 31 | | | | | Nível de Significância | | 0,05 |



Para interpretar os resultados, você inicia testando se existe um efeito de interação entre o fator $A$ (tear) e o fator $B$ (fornecedor). Se o efeito da interação for significativo, análises posteriores se concentrarão nessa interação. Se o efeito da interação não for significativo, você pode se concentrar nos **efeitos principais** — potenciais diferenças nos teares (fator $A$) e potenciais diferenças nos fornecedores (fator $B$).

Ao utilizar o nível de significância de 0,05 para determinar se existem evidências de um efeito de interação, você rejeita a hipótese nula de nenhuma interação entre tear e fornecedor, caso o valor da estatística $F_{ESTAT}$ calculada seja maior do que 2,9011, o valor crítico da cauda superior da distribuição $F$, com 3 e 32 graus de liberdade (veja as Figuras 11.10 e 11.11).[1]

[1]A Tabela E.5 não apresenta os valores críticos da cauda superior da distribuição $F$ com 32 graus de liberdade no denominador. Quando os graus de liberdade desejados não são apresentados na tabela, utilize o valor calculado em uma planilha ou utilize a abordagem do valor-$p$.

**FIGURA 11.11**
Regiões de rejeição e regiões de não rejeição, no nível de significância de 0,05, com 3 e 32 graus de liberdade


Uma vez que $F_{ESTAT} = 0{,}0111 < F_\alpha = 2{,}9011$, ou o valor-$p$ = 0,9984 > 0,05, você não rejeita $H_0$. Você conclui que não existem evidências suficientes de um efeito de interação entre tear e fornecedor. Você pode agora se concentrar nos efeitos principais.

Ao utilizar o nível de significância de 0,05 e testar em relação a uma diferença entre os dois teares (fator $A$), você rejeita a hipótese nula se a estatística do teste $F_{ESTAT}$ calculada for maior do que 4,1491, o valor crítico da cauda superior a partir da distribuição $F$, com 1 e 32 graus de liberdade (veja as Figuras 11.10 e 11.12). Como $F_{ESTAT} = 0{,}8096 < F_\alpha = 4{,}1491$, ou o valor-$p$ = 0,3750 > 0,05, você não rejeita $H_0$. Você conclui que não existem evidências suficientes de uma diferença entre os dois teares, em termos da média aritmética para a resistência à tensão dos paraquedas fabricados.

**FIGURA 11.12**
Regiões de rejeição e regiões de não rejeição, no nível de significância de 0,05, com 1 e 32 graus de liberdade


Ao utilizar o nível de significância de 0,05 e testar em relação a uma diferença entre os fornecedores (fator $B$), você rejeita a hipótese nula de nenhuma diferença se a estatística do teste $F_{ESTAT}$ calculada for maior do que 2,9011, o valor crítico da cauda superior da distribuição $F$, com 3 graus de liberdade no numerador e 32 graus de liberdade no denominador (veja as Figuras 11.10 e 11.11). Uma vez que $F_{ESTAT} = 5{,}1999 > F_\alpha = 2{,}9011$, ou o valor-$p$ = 0,0049 < 0,05, você rejeita $H_0$. Você conclui que existem evidências de uma diferença entre os fornecedores, em termos da média aritmética da resistência à tensão dos paraquedas.

## Múltiplas Comparações: O Procedimento de Tukey

Se um ou ambos os efeitos dos fatores forem significativos e não existir nenhum efeito significativo, quando existirem mais de dois níveis de um determinado fator você pode determinar os níveis específicos que sejam significativamente diferentes utilizando o **procedimento de múltiplas comparações de Tukey para ANOVA de dois fatores** (vejas as referências 6 e 9). A Equação (11.16) fornece o intervalo crítico para o fator $A$.

INTERVALO CRÍTICO PARA O FATOR *A*

$$\text{Intervalo crítico} = Q_\alpha\sqrt{\frac{MQR}{cn'}} \quad (11.16)$$

em que $Q_\alpha$ corresponde ao valor crítico da cauda superior, a partir de uma distribuição de intervalos de Student, com $r$ e $rc(n' - 1)$ graus de liberdade. (Os valores relativos à distribuição de intervalos de Student são encontrados na Tabela E.7.)

A Equação (11.17) apresenta o intervalo crítico para o fator *B*.

INTERVALO CRÍTICO PARA O FATOR *B*

$$\text{Intervalo crítico} = Q_\alpha\sqrt{\frac{MQR}{rn'}} \quad (11.17)$$

em que $Q_\alpha$ corresponde ao valor crítico da cauda superior, a partir de uma distribuição de intervalos de Student, com $c$ e $rc(n' - 1)$ graus de liberdade. (Os valores relativos à distribuição de intervalos de Student são encontrados na Tabela E.7.)

Para utilizar o procedimento de Tukey, retorne aos dados da Tabela 11.7, seguintes à fabricação dos paraquedas. Na tabela resumida de ANOVA na Figura 11.10, o efeito da interação não é significativo. Utilizando $\alpha = 0{,}05$, não existe nenhuma evidência de uma diferença significativa entre os dois teares (Jetta e Turk) que compõem o fator *A*, mas existem evidências de uma diferença significativa entre os quatro fornecedores que compõem o fator *B*. Assim, você pode utilizar o procedimento de múltiplas comparações de Tukey para determinar quais, dentre os quatro fornecedores, diferem entre si.

Uma vez que existem quatro fornecedores, existem $4(4 - 1)/2 = 6$ comparações em pares. Utilizando os cálculos apresentados na Figura 11.10, as diferenças absolutas entre as médias aritméticas são as seguintes:

1. $|\bar{X}_{.1.} - \bar{X}_{.2.}| = |18{,}97 - 23{,}90| = 4{,}93$
2. $|\bar{X}_{.1.} - \bar{X}_{.3.}| = |18{,}97 - 22{,}41| = 3{,}44$
3. $|\bar{X}_{.1.} - \bar{X}_{.4.}| = |18{,}97 - 20{,}83| = 1{,}86$
4. $|\bar{X}_{.2.} - \bar{X}_{.3.}| = |23{,}90 - 22{,}41| = 1{,}49$
5. $|\bar{X}_{.2.} - \bar{X}_{.4.}| = |23{,}90 - 20{,}83| = 3{,}07$
6. $|\bar{X}_{.3.} - \bar{X}_{.4.}| = |22{,}41 - 20{,}83| = 1{,}58$

Para determinar o intervalo crítico, reporte-se à Figura 11.10 para encontrar $MQR = 8{,}6123$, $r = 2$, $c = 4$ e $n' = 5$. Com base na Tabela E.7 [para $\alpha = 0{,}05$, $c = 4$ e $rc(n' - 1) = 32$], $Q_\alpha$, o valor crítico da cauda superior para a distribuição de intervalos de Student, com 4 e 32 graus de liberdade, é aproximado para 3,84. Utilizando a Equação (11.17):

$$\text{Intervalo crítico} = 3{,}84\sqrt{\frac{8{,}6123}{10}} = 3{,}56$$

Tendo em vista que $4{,}93 > 3{,}56$, somente as médias aritméticas dos Fornecedores 1 e 2 são diferentes. Você pode concluir que a média aritmética para a resistência à tensão é mais baixa para o Fornecedor 1 do que para o Fornecedor 2, sendo que não existem diferenças estatisticamente significativas entre os Fornecedores 1 e 3, os Fornecedores 1 e 4, os Fornecedores 2 e 3, os Fornecedores 2 e 4 e os Fornecedores 3 e 4. Observe que, ao utilizar $\alpha = 0{,}05$, você pode realizar todas as seis comparações com uma taxa geral de erro de somente 5%.

## Visualizando Efeitos da Interação: O Gráfico para Médias Aritméticas das Células

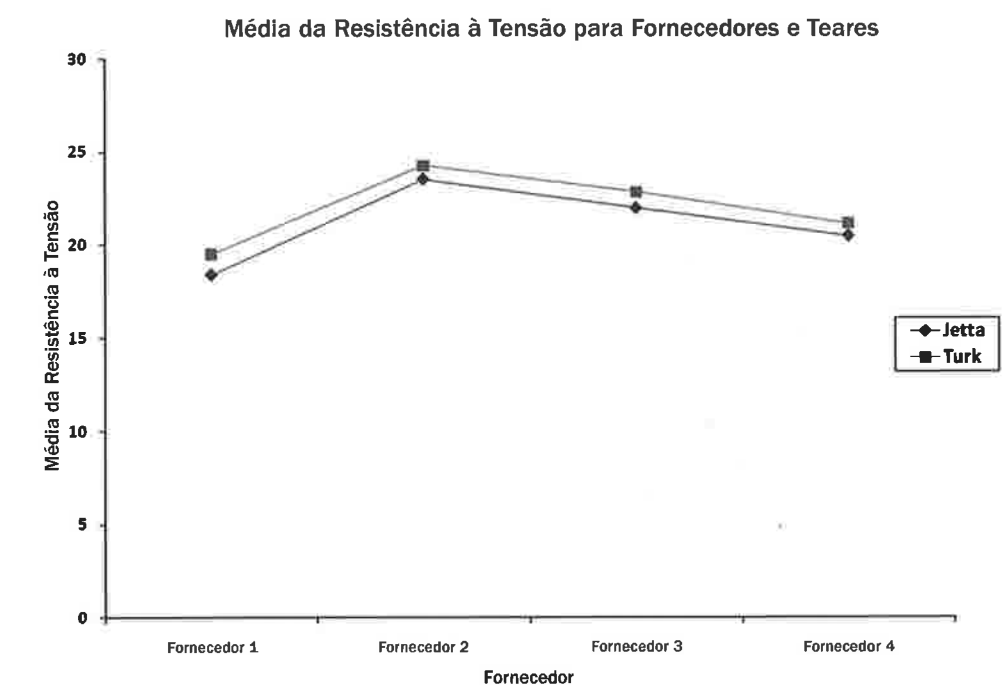
Você consegue obter um melhor entendimento sobre o efeito da interação ao inserir em um gráfico as **médias aritméticas das células**, as médias aritméticas relativas a todas as combinações possíveis entre níveis de fatores. A Figura 11.13 apresenta um gráfico para médias aritméticas de células que utiliza as médias aritméticas das células relativas às combinações entre tear e fornecedor, ilustradas na Figura 11.10. Com base no gráfico para a média aritmética da resistência à tensão, em relação a cada uma das combinações entre tear e fornecedor, observe que as duas linhas (representando os dois teares) são aproximadamente paralelas. Isso indica que a *diferença* entre as médias aritméticas correspondentes às resistências à tensão dos dois teares é praticamente igual para os quatro fornecedores. Em outras palavras, não existe nenhum tipo de *interação* entre esses dois fatores, conforme indicado pelo teste *F*.



**FIGURA 11.13**

Gráfico para as médias aritméticas das células para a resistência à tensão, tendo como base tear e fornecedor

*Crie um gráfico para médias aritméticas das células utilizando as instruções da Seção GE11.2.*




## Interpretando Efeitos da Interação

Qual seria a interpretação, caso houvesse uma interação? Nesse tipo de situação, alguns níveis do fator *A* reagiriam melhor a certos níveis do fator *B*. Por exemplo, no que diz respeito à resistência à tensão, suponha que alguns fornecedores fossem melhores para o tear da marca Jetta, enquanto outros fossem melhores para o tear da marca Turk. Caso isso fosse verdadeiro, as linhas da Figura 11.13 não seriam, nem de perto, tão paralelas, e o efeito da interação poderia ser estatisticamente significativo. Nesse tipo de situação, as diferenças entre os teares passam a não ser mais as mesmas para todos os fornecedores. Esse tipo de resultado também complicaria a interpretação para os *efeitos principais*, uma vez que as diferenças em um dos fatores (o tear) não seriam condizentes com o outro fator (o fornecedor).

O Exemplo 11.2 ilustra uma situação em que o efeito de interação é significativo.

**EXEMPLO 11.2**

**Interpretando Efeitos de Interação Significativos**

Uma empresa de âmbito nacional especializada em preparar alunos para exames de ingresso em faculdades norte-americanas, tais como o SAT, o ACT e o LSAT, tinha como objetivo estratégico aperfeiçoar o seu Curso Preparatório para o ACT. Dois fatores de interesse para a empresa são a duração do curso (um período condensado de 10 dias ou um período regular de 30 dias) e o tipo de curso (aprendizado tradicional em sala de aula ou ensino a distância). A empresa coletou dados designando aleatoriamente 10 clientes a cada uma das quatro células que representam uma combinação entre duração do curso e tipo de curso. Os resultados estão organizados no arquivo ACT e são apresentados na Tabela 11.8.

Quais são os efeitos do tipo de curso e da duração do curso nos resultados do ACT?

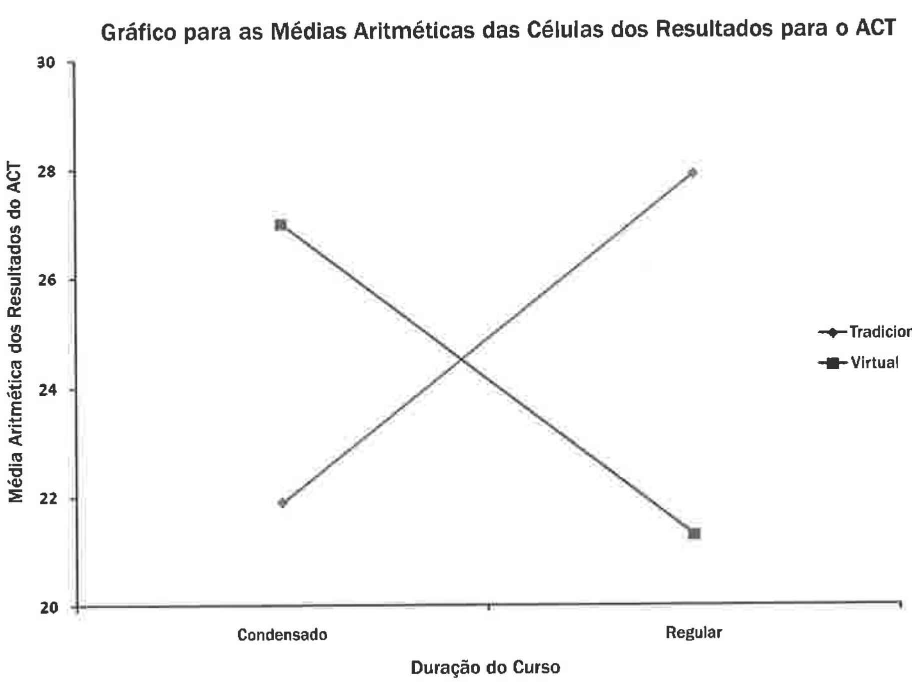
**TABELA 11.8**
Resultados do ACT para Diferentes Tipos e Durações de Cursos

| | DURAÇÃO DO CURSO | | | |
|---|---|---|---|---|
| **TIPO DE CURSO** | **Condensado** | | **Regular** | |
| **Tradicional** | 26 | 18 | 34 | 28 |
| **Tradicional** | 27 | 24 | 24 | 21 |
| **Tradicional** | 25 | 19 | 35 | 23 |
| **Tradicional** | 21 | 20 | 31 | 29 |
| **Tradicional** | 21 | 18 | 28 | 26 |
| **Virtual** | 27 | 21 | 24 | 21 |
| **Virtual** | 29 | 32 | 16 | 19 |
| **Virtual** | 30 | 20 | 22 | 19 |
| **Virtual** | 24 | 28 | 20 | 24 |
| **Virtual** | 30 | 29 | 23 | 25 |

**SOLUÇÃO** O gráfico para as médias aritméticas das células, apresentado na Figura 11.14, ilustra uma forte interação entre o tipo de curso e a duração do curso. As linhas não paralelas indicam que o efeito de condensar o curso depende de o curso ser administrado pelo método tradicional, em sala de aula, ou virtualmente, por ensino a distância. A média aritmética dos resultados para o método virtual é mais alta quando o curso é condensado para um período correspondente a 10 dias, enquanto a média aritmética do resultado para o método tradicional é mais alta quando o curso ocorre ao longo do período regular de 30 dias.

**FIGURA 11.14**
Gráfico para as médias aritméticas das células para os resultados do ACT

*Crie um gráfico para as médias aritméticas das células utilizando as instruções da Seção GE11.2.*




Para verificar a análise um tanto subjetiva proporcionada pela interpretação do gráfico para as médias aritméticas das células, você inicia testando se existe uma interação estatisticamente significativa entre o fator $A$ (duração do curso) e o fator $B$ (tipo de curso). Utilizando um nível de significância de 0,05, você rejeita a hipótese nula, uma vez que $F_{ESTAT} = 24{,}2569 > 4{,}1132$ ou o valor-$p$ é igual a $0{,}000 < 0{,}05$ (veja a Figura 11.15). Por conseguinte, o teste de hipóteses confirma a interação evidente no gráfico para as médias aritméticas das células. A existência desse efeito de interação significativo complica a interpretação dos testes de hipóteses com relação aos dois efeitos principais. Você não pode concluir diretamente que não existe nenhum efeito com relação à duração do curso e ao tipo de curso, apesar de ambos apresentarem valores-$p > 0{,}05$.

Considerando que a interação seja significativa, você pode analisar novamente os dados, com os dois fatores desmembrados em quatro grupos de um único fator, em vez de uma ANOVA de dois fatores com dois níveis para cada um dos dois fatores (veja **ACT-FatorÚnico**). O Grupo 1 é tradicional condensado. O Grupo 2 é tradicional regular. O Grupo 3 é virtual condensado. O Grupo 4 é virtual regular.

Com base na Figura 11.16, uma vez que $F_{ESTAT} = 8{,}2239 > 2{,}8663$ ou o valor-$p$ é igual a $0{,}0003 < 0{,}05$, existem evidências de uma diferença significativa entre os quatro grupos (tradicional condensado, tradicional regular, virtual condensado e virtual regular). Tradicional condensado é diferente de tradicional regular e de virtual condensado. Tradicional regular é também diferente de virtual regular, e virtual condensado é também diferente de virtual regular. Consequentemente, condensar um curso é, ou não, uma boa ideia dependendo de o curso ser oferecido em uma sala de aula tradicional ou como um curso virtual com ensino a distância. Para assegurar as médias aritméticas mais altas para os resultados do teste ACT, a empresa deve utilizar o método tradicional para cursos que sejam administrados ao longo de um período de 30 dias, mas deve utilizar um método virtual para cursos que sejam condensados em um período de 10 dias.



**FIGURA 11.15**
Resultados da planilha para ANOVA de dois fatores, relativa aos resultados para o ACT

*Crie essa planilha utilizando as instruções da Seção GE11.2. A subseção que trata do Excel Avançado, na Seção 11.2, discorre sobre as fórmulas utilizadas nessa planilha.*

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ANOVA: Fator Duplo com Repetição | | | | | | |
| 2 | | | | | | | |
| 3 | **RESUMO** | **Condensado** | **Regular** | **Total** | | | |
| 4 | ***tradicional*** | | | | | | |
| 5 | Contagem | 10 | 10 | 20 | | | |
| 6 | Soma | 219 | 279 | 498 | | | |
| 7 | Média | 21,9 | 27,9 | 24,9 | | | |
| 8 | Variância | 11,2111 | 20,9889 | 24,7263 | | | |
| 9 | | | | | | | |
| 10 | ***virtual*** | | | | | | |
| 11 | Contagem | 10 | 10 | 20 | | | |
| 12 | Soma | 270 | 213 | 483 | | | |
| 13 | Média | 27 | 21,3 | 24,15 | | | |
| 14 | Variância | 16,2222 | 8,0111 | 20,0289 | | | |
| 15 | | | | | | | |
| 16 | ***Total*** | | | | | | |
| 17 | Contagem | 20 | 20 | | | | |
| 18 | Soma | 489 | 492 | | | | |
| 19 | Média | 24,45 | 24,6 | | | | |
| 20 | Variância | 19,8395 | 25,2000 | | | | |
| 21 | | | | | | | |
| 22 | | | | | | | |
| 23 | **ANOVA** | | | | | | |
| 24 | ***Fonte da Variação*** | ***SQ*** | ***gl*** | ***MQ*** | ***F*** | ***Valor-p*** | ***F crítico*** |
| 25 | Amostra | 5,6250 | 1 | 5,6250 | 0,3987 | 0,5318 | 4,1132 |
| 26 | Colunas | 0,2250 | 1 | 0,2250 | 0,0159 | 0,9002 | 4,1132 |
| 27 | Interação | 342,2250 | 1 | 342,2250 | 24,2569 | 0,0000 | 4,1132 |
| 28 | Dentro | 507,9000 | 36 | 14,1083 | | | |
| 29 | | | | | | | |
| 30 | Total | 855,9750 | 39 | | | | |
| 31 | | | | | *Nível de significância* | | 0,05 |

**FIGURA 11.16**
Planilhas de resultados de ANOVA de fator único e Tukey-Kramer para os resultados do ACT

*Crie essa planilha de resultados para Tukey-Kramer utilizando as instruções da Seção GE11.1.*

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ANOVA: Fator Único | | | | | | | | Cálculos | |
| 2 | | | | | | | | | c | 4 |
| 3 | **RESUMO** | | | | | | | | n | 40 |
| 4 | ***Grupos*** | ***Contagem*** | ***Soma*** | ***Média*** | ***Variância*** | | | | | |
| 5 | Grupo 1 | 10 | 219 | 21,9 | 11,2111 | | | | | |
| 6 | Grupo 2 | 10 | 279 | 27,9 | 20,9889 | | | | | |
| 7 | Grupo 3 | 10 | 270 | 27 | 16,2222 | | | | | |
| 8 | Grupo 4 | 10 | 213 | 21,3 | 8,0111 | | | | | |
| 9 | | | | | | | | | | |
| 10 | | | | | | | | | | |
| 11 | **ANOVA** | | | | | | | | | |
| 12 | ***Fonte da Variação*** | ***SQ*** | ***gl*** | ***MQ*** | ***F*** | ***Valor-p*** | ***F crítico*** | | | |
| 13 | Entre Grupos | 348,075 | 3 | 116,0250 | 8,2239 | 0,0003 | 2,8663 | | | |
| 14 | Dentro dos Grupos | 507,9 | 36 | 14,1083 | | | | | | |
| 15 | | | | | | | | | | |
| 16 | Total | 855,975 | 39 | | | | | | | |
| 17 | | | | | Nível de significância | | 0,05 | | | |

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Comparações Múltiplas de Tukey-Kramer | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | |
| 3 | | Média | Tamanho | | | Diferença | Erro-padrão da | Intervalo | |
| 4 | Grupo | da Amostra | da Amostra | | Comparação | Absoluta | Diferença | Crítico | Resultados |
| 5 | 1: Grupo 1 | 21,9 | 10 | | Grupo 1 com Grupo 2 | 6 | 1,187785054 | 4,5017 | Médias aritméticas são diferentes |
| 6 | 2: Grupo 2 | 27,9 | 10 | | Grupo 1 com Grupo 3 | 5,1 | 1,187785054 | 4,5017 | Médias aritméticas são diferentes |
| 7 | 3: Grupo 3 | 27 | 10 | | Grupo 1 com Grupo 4 | 0,6 | 1,187785054 | 4,5017 | Médias aritméticas não são diferentes |
| 8 | 4: Grupo 4 | 21,3 | 10 | | Grupo 2 com Grupo 3 | 0,9 | 1,187785054 | 4,5017 | Médias aritméticas não são diferentes |
| 9 | | | | | Grupo 2 com Grupo 4 | 6,6 | 1,187785054 | 4,5017 | Médias aritméticas são diferentes |
| 10 | Outros Dados | | | | Grupo 3 com Grupo 4 | 5,7 | 1,187785054 | 4,5017 | Médias aritméticas são diferentes |
| 11 | Nível de significância | 0,05 | | | | | | | |
| 12 | g.l. do numerador | 4 | | | | | | | |
| 13 | g.l. do denominador | 36 | | | | | | | |
| 14 | MQD | 14,10833 | | | | | | | |
| 15 | Estatística Q | 3,79 | | | | | | | |

## Problemas para a Seção 11.2

### APRENDENDO O BÁSICO

**11.15** Considere um modelo fatorial de dois fatores, com três níveis no fator $A$, três níveis no fator $B$ e quatro repetições em cada uma das nove células.

**a.** Quantos graus de liberdade existem na determinação da variação do fator $A$ e na determinação da variação do fator $B$?
**b.** Quantos graus de liberdade existem na determinação da variação decorrente da interação?
**c.** Quantos graus de liberdade existem na determinação da variação decorrente do erro aleatório?
**d.** Quantos graus de liberdade existem na determinação da variação total?

**11.16** Considere que você está trabalhando com os resultados para o Problema 11.15.

**a.** Se $SQA = 120$, $SQB = 110$, $SQR = 270$ e $STQ = 540$, qual é o valor correspondente a $SQAB$?
**b.** Quais são os valores para $MQA$ e $MQB$?
**c.** Qual é o valor para $MQAB$?
**d.** Qual é o valor para $MQR$?

**11.17** Considere que você esteja trabalhando com os resultados dos Problemas 11.15 e 11.16.

**a.** Qual é o valor da estatística do teste $F_{ESTAT}$ para o efeito decorrente da interação?
**b.** Qual é o valor da estatística do teste $F_{ESTAT}$ para o efeito decorrente do fator $A$?
**c.** Qual é o valor da estatística do teste $F_{ESTAT}$ para o efeito decorrente do fator $B$?
**d.** Construa a tabela resumida de ANOVA e preencha todos os valores no corpo da tabela.

**11.18** Considerados os resultados dos Problemas 11.15 a 11.17,

**a.** no nível de significância de 0,05, existe um efeito decorrente do fator $A$?
**b.** no nível de significância de 0,05, existe um efeito decorrente do fator $B$?
**c.** no nível de significância de 0,05, existe algum efeito decorrente da interação?

**11.19** Considerando uma tabela ANOVA de dois fatores com dois níveis para o fator $A$, cinco níveis para o fator $B$ e quatro repetições em cada uma das 10 células, com $SQA = 18$, $SQB = 64$, $SQR = 60$ e $STQ = 150$,

**a.** construa a tabela resumida de ANOVA e preencha todos os valores no corpo da tabela.
**b.** no nível de significância de 0,05, existe um efeito decorrente do fator $A$?
**c.** no nível de significância de 0,05, existe um efeito decorrente do fator $B$?
**d.** no nível de significância de 0,05, existe um efeito decorrente da interação?

**11.20** Considerando um experimento fatorial de dois fatores e a tabela resumida de ANOVA apresentada a seguir, preencha todos os resultados que estão faltando:

| Fonte | Graus de Liberdade | Soma dos Quadrados | Média Aritmética dos Quadrados (Variância) | $F$ |
|---|---|---|---|---|
| $A$ | $r - 1 = 2$ | $SQA = ?$ | $MQA = 80$ | $F_{ESTAT} = ?$ |
| $B$ | $c - 1 = ?$ | $SQB = 220$ | $MQB = ?$ | $F_{ESTAT} = 11{,}0$ |
| Interação $AB$ | $(r - 1)(c - 1) = 8$ | $SQAB = ?$ | $MQAB = 10$ | $F_{ESTAT} = ?$ |
| Erro | $rc(n' - 1) = 30$ | $SQR = ?$ | $MQR = ?$ | |
| Total | $n - 1 = ?$ | $STQ = ?$ | | |

**11.21** Com base nos resultados do Problema 11.20,

**a.** no nível de significância de 0,05, existe algum efeito decorrente do fator $A$?
**b.** no nível de significância de 0,05, existe algum efeito decorrente do fator $B$?
**c.** no nível de significância de 0,05, existe algum efeito decorrente da interação?

### APLICANDO OS CONCEITOS

**11.22** Os efeitos da potência do revelador (fator $A$) e do tempo de revelação (fator $B$) em relação à densidade de chapas fotográficas estavam sendo estudados. Duas potências e dois tempos de revelação foram utilizados, e foram avaliadas quatro repetições para cada uma das quatro células. Os resultados (com o maior sendo considerado o melhor) estão armazenados no arquivo **Foto** e são apresentados na tabela a seguir:

| | TEMPO PARA REVELAÇÃO (MINUTOS) | |
|---|---|---|
| **POTÊNCIA DO REVELADOR** | **10** | **14** |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 5 | 4 |
| 1 | 2 | 3 |
| 1 | 4 | 2 |
| 2 | 4 | 6 |
| 2 | 7 | 7 |
| 2 | 6 | 8 |
| 2 | 5 | 7 |

No nível de significância de 0,05,

**a.** existe alguma interação entre a potência do revelador e o tempo de revelação?
**b.** existe algum efeito decorrente da potência do revelador?
**c.** existe algum efeito decorrente do tempo de revelação?
**d.** Desenhe um gráfico da média aritmética da densidade de cada uma das potências do revelador em relação ao tempo de revelação de cada um dos reveladores.
**e.** O que você pode concluir em relação ao efeito da potência do revelador e do tempo de revelação sobre a densidade?

**11.23** A chefe de cozinha de um restaurante especializado em massas estava tendo dificuldades em encontrar marcas de massas especiais para pratos *al dente* – ou seja, massas cozidas o suficiente para não ficarem pegajosas ou duras mas com a consistência firme ao serem mordidas. Ela decidiu conduzir um experimento no qual duas marcas de massa, uma americana e uma italiana, passaram por cocção de 4 ou de 8 minutos. A variável de interesse era o peso da massa, uma vez que o seu cozimento faz com que ela absorva água. Uma massa com uma taxa mais rápida de absorção de água pode fornecer um intervalo de tempo mais curto para que se torne *al dente*, aumentando assim a chance de vir a ultrapassar o ponto de cozimento. O experimento foi realizado com o uso de 150 gramas de massa crua. Cada tentativa teve início levando uma panela com 6 litros de água fria sem sal em fogo médio até o ponto de fervura moderada. Os 150 gramas de massa crua foram adicionados e, em seguida, pesados depois de um determinado período de tempo, com a sua retirada da panela em um escorredor apropriado. Os resultados (em termos de peso em gramas) de duas repetições para cada uma das marcas de massa e tempo de cozimento estão armazenados no arquivo **Massa**, e são os seguintes:



| | TEMPO DE COZIMENTO (MINUTOS) | |
|---|---|---|
| **TIPO DE MASSA** | **4** | **8** |
| **Americana** | 265 | 310 |
| **Americana** | 270 | 320 |
| **Italiana** | 250 | 300 |
| **Italiana** | 245 | 305 |

No nível de significância de 0,05,

**a.** existe alguma interação entre o tipo de massa e o tempo de cozimento?
**b.** existe algum efeito decorrente do tipo de massa?
**c.** existe algum efeito decorrente do tempo de cozimento?
**d.** Desenhe um gráfico para a média aritmética do peso para cada um dos tipos de massa em relação a cada um dos tempos de cozimento.
**e.** A que conclusões você pode chegar no que se refere à importância de cada um desses dois fatores em relação ao peso da massa?

AUTO-AVALIAÇÃO **11.24** Uma equipe de alunos de um curso de estatística para executivos realizou um experimento fatorial com o objetivo de investigar o tempo necessário para que comprimidos analgésicos se dissolvessem em um copo com água. Os dois fatores de interesse eram a marca (Equate, Kroger ou Alka-Seltzer) e a temperatura da água (quente ou fria). O experimento consistiu em quatro repetições para cada uma das seis combinações entre os fatores. Os dados a seguir (armazenados em **Comprimido**) mostram o tempo necessário para que um comprimido se dissolvesse (em segundos) para os 24 comprimidos utilizados no experimento:

| | MARCA DO ANALGÉSICO | | |
|---|---|---|---|
| **ÁGUA** | **Equate** | **Kroger** | **Alka-Seltzer** |
| **Fria** | 85,87 | 75,98 | 100,11 |
| **Fria** | 78,69 | 87,66 | 99,65 |
| **Fria** | 76,42 | 85,71 | 100,83 |
| **Fria** | 74,43 | 86,31 | 94,16 |
| **Quente** | 21,53 | 24,10 | 23,80 |
| **Quente** | 26,26 | 25,83 | 21,29 |
| **Quente** | 24,95 | 26,32 | 20,82 |
| **Quente** | 21,52 | 22,91 | 23,21 |

No nível de significância de 0,05,

**a.** existe alguma interação entre a marca do comprimido analgésico e a temperatura da água?
**b.** existe algum efeito decorrente da marca?
**c.** existe algum efeito decorrente da temperatura da água?
**d.** Desenhe um gráfico para a média aritmética do tempo necessário para dissolver o comprimido de cada uma das marcas em relação a cada uma das temperaturas da água.
**e.** Discuta os resultados de (a) a (d).

**11.25** Circuitos integrados são fabricados em pastilhas de silício, por meio de um processo que envolve uma série de etapas. Foi conduzido um experimento para estudar o efeito das etapas de limpeza e de gravação com ácido na produção final (codificado para manter a confidencialidade). Os resultados (armazenados em **Resultado**) foram os seguintes:

| | ETAPA DE GRAVAÇÃO COM ÁCIDO | |
|---|---|---|
| **ETAPA DE LIMPEZA** | **Nova** | **Tradicional** |
| **Nova 1** | 38 | 34 |
| **Nova 1** | 34 | 19 |
| **Nova 1** | 38 | 28 |
| **Nova 2** | 29 | 20 |
| **Nova 2** | 35 | 35 |
| **Nova 2** | 34 | 37 |
| **Tradicional** | 31 | 29 |
| **Tradicional** | 23 | 32 |
| **Tradicional** | 38 | 30 |

Fonte: *Extraída de J. Ramirez and W. Taam "An Autologistic Model for Integrated Circuit Manufacturing"*, Journal of Quality Technology, *2000, 32, pp. 254-262.*

No nível de significância de 0,05,

**a.** existe alguma interação entre a etapa de limpeza e a etapa da gravação com ácido?
**b.** existe algum efeito decorrente da etapa de limpeza?
**c.** existe algum efeito decorrente da etapa de gravação com ácido?
**d.** Desenhe um gráfico para a média aritmética do resultado para cada uma das etapas de limpeza em relação a cada uma das etapas de gravação com ácido.
**e.** Discuta os resultados de (a) a (d).

**11.26** Foi conduzido um experimento para estudar a distorção de engrenagens motrizes em automóveis. Dois fatores foram estudados – o tamanho do dente da engrenagem e o posicionamento da peça. Os resultados (armazenados em **Engrenagem**) foram os seguintes:

| | POSICIONAMENTO DA PEÇA | |
|---|---|---|
| **TAMANHO DO DENTE DA ENGRENAGEM** | **Baixo** | **Alto** |
| **Baixo** | 18,0 | 13,5 |
| **Baixo** | 16,5 | 8,5 |
| **Baixo** | 26,0 | 11,5 |
| **Baixo** | 22,5 | 16,0 |
| **Baixo** | 21,5 | –4,5 |
| **Baixo** | 21,0 | 4,0 |
| **Baixo** | 30,0 | 1,0 |
| **Baixo** | 24,5 | 9,0 |

| TAMANHO DO DENTE DA ENGRENAGEM | POSICIONAMENTO DA PEÇA | |
|---|---|---|
| | Baixo | Alto |
| Alto | 27,5 | 17,5 |
| Alto | 19,5 | 11,5 |
| Alto | 31,0 | 10,0 |
| Alto | 27,0 | 1,0 |
| Alto | 17,0 | 14,5 |
| Alto | 14,0 | 3,5 |
| Alto | 18,0 | 7,5 |
| Alto | 17,5 | 6,5 |

Fonte: *Extraída de D. R. Bingham and R. R. Sitter, "Design Issues in Fractional Factorial Split-Plot Experiments"*, Journal of Quality Technology, *33, 2001, pp. 2-15.*

No nível de significância de 0,05,

**a.** existe alguma interação entre o tamanho do dente da engrenagem e o posicionamento da peça?
**b.** existe algum efeito decorrente do tamanho do dente da engrenagem?
**c.** existe algum efeito decorrente do posicionamento da peça?
**d.** Desenhe um gráfico para a média aritmética do resultado correspondente a cada um dos tamanhos de dente da engrenagem em relação a cada uma das posições da peça.
**e.** Discuta os resultados de (a) a (d).

## 11.3 *Tópico Online:* O Modelo do Bloco Aleatório

O modelo do bloco aleatório é uma extensão do teste *t* em pares abordado na Seção 10.2. Para estudar esse tópico, leia o arquivo com o tópico online **Seção 11.3,** que está disponível no site da LTC Editora destinado a este livro (veja a Seção D.8 do Apêndice para aprender a acessar os arquivos correspondentes aos tópicos *online*).

## UTILIZANDO A ESTATÍSTICA @ Perfect Parachutes Revisitada

No cenário Utilizando a Estatística, você era o gerente de produção da Perfect Parachutes Company. Você realizou um experimento para determinar se existia uma diferença na resistência dos paraquedas tecidos com as fibras sintéticas de quatro diferentes fornecedores. Utilizando ANOVA de fator único, você pôde determinar se existia uma diferença na média aritmética da resistência dos paraquedas dos diferentes fornecedores. Depois disso, você pôde concluir que a média aritmética da resistência dos paraquedas tecidos com fibras sintéticas do Fornecedor 1 era menor do que a média aritmética do Fornecedor 2. Experimentos suplementares foram conduzidos no intuito de estudar o efeito do tear. Você determinou que não existia nenhuma interação entre o fornecedor e o tear, e que não havia nenhuma diferença entre os teares em termos da média aritmética da resistência. Sua próxima etapa como gerente de produção é investigar as razões pelas quais a média aritmética da resistência dos paraquedas tecidos com as fibras sintéticas do Fornecedor 1 era menor do que a média aritmética do Fornecedor 2 e, possivelmente, reduzir o número de fornecedores.

## RESUMO

Neste capítulo, foram utilizados vários procedimentos estatísticos para analisar o efeito de um ou dois fatores de interesse. Foram discutidos em detalhes os pressupostos necessários para utilizar esses procedimentos. Tenha em mente que você precisa investigar criteriosamente a validade dos pressupostos subjacentes aos procedimentos do teste de hipóteses. A Tabela 11.9 apresenta um resumo dos tópicos abordados neste capítulo.

**TABELA 11.9**
Resumo dos Tópicos do Capítulo 11

| Tipo de Análise (Somente Dados Numéricos) | Número de Fatores |
|---|---|
| Comparando mais de dois grupos (um fator) | Análise da variância de fator único (Seção 11.1)<br>Análise da variância de dois fatores (Seção 11.2) |



## EQUAÇÕES-CHAVE

**Variação Total em ANOVA de Fator Único**

$$STQ = \sum_{j=1}^{c}\sum_{i=1}^{n_j}(X_{ij} - \bar{\bar{X}})^2 \qquad \textbf{(11.1)}$$

**Variação Entre Grupos em ANOVA de Fator Único**

$$SQE = \sum_{j=1}^{c} n_j(\bar{X}_j - \bar{\bar{X}})^2 \qquad \textbf{(11.2)}$$

**Variação Dentro do Grupo em ANOVA de Fator Único**

$$SQD = \sum_{j=1}^{c}\sum_{i=1}^{n_j}(X_{ij} - \bar{X}_j)^2 \qquad \textbf{(11.3)}$$

**Média dos Quadrados em ANOVA de Fator Único**

$$MQE = \frac{SQE}{c - 1} \qquad \textbf{(11.4a)}$$

$$MQD = \frac{SQD}{n - c} \qquad \textbf{(11.4b)}$$

$$MTQ = \frac{STQ}{n - 1} \qquad \textbf{(11.4c)}$$

**Estatística do Teste $F_{ESTAT}$ em ANOVA de Fator Único**

$$F_{ESTAT} = \frac{MQE}{MQD} \qquad \textbf{(11.5)}$$

**Intervalo Crítico para o Procedimento de Tukey-Kramer**

$$\text{Intervalo crítico} = Q_\alpha\sqrt{\frac{MQD}{2}\left(\frac{1}{n_j} + \frac{1}{n_{j'}}\right)} \qquad \textbf{(11.6)}$$

**Variação Total em ANOVA de Dois Fatores**

$$STQ = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\sum_{k=1}^{n'}(X_{ijk} - \bar{\bar{X}})^2 \qquad \textbf{(11.7)}$$

**Variação do Fator *A***

$$SQA = cn'\sum_{i=1}^{r}(\bar{X}_{i..} - \bar{\bar{X}})^2 \qquad \textbf{(11.8)}$$

**Variação do Fator *B***

$$SQB = rn'\sum_{j=1}^{c}(\bar{X}_{.j.} - \bar{\bar{X}})^2 \qquad \textbf{(11.9)}$$

**Variação da Interação**

$$SQAB = n'\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}(\bar{X}_{ij.} - \bar{X}_{i..} - \bar{X}_{.j.} + \bar{\bar{X}})^2 \qquad \textbf{(11.10)}$$

**Erro (Variação) Aleatório(a) em ANOVA de Dois Fatores**

$$SQR = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\sum_{k=1}^{n'}(X_{ijk} - \bar{X}_{ij.})^2 \qquad \textbf{(11.11)}$$

**Média Aritmética dos Quadrados em ANOVA de Dois Fatores**

$$MQA = \frac{SQA}{r - 1} \qquad \textbf{(11.12a)}$$

$$MQB = \frac{SQB}{c - 1} \qquad \textbf{(11.12b)}$$

$$MQAB = \frac{SQAB}{(r - 1)(c - 1)} \qquad \textbf{(11.12c)}$$

$$MQR = \frac{SQR}{rc(n' - 1)} \qquad \textbf{(11.12d)}$$

**Teste *F* para o Efeito do Fator *A***

$$F_{ESTAT} = \frac{MQA}{MQR} \qquad \textbf{(11.13)}$$

**Teste *F* para o Efeito do Fator *B***

$$F_{ESTAT} = \frac{MQB}{MQR} \qquad \textbf{(11.14)}$$

**Teste *F* para o Efeito da Interação**

$$F_{ESTAT} = \frac{MQAB}{MQR} \qquad \textbf{(11.15)}$$

**Intervalo Crítico para o Fator *A***

$$\text{Intervalo crítico} = Q_\alpha\sqrt{\frac{MQR}{cn'}} \qquad \textbf{(11.16)}$$

**Intervalo Crítico para o Fator *B***

$$\text{Intervalo crítico} = Q_\alpha\sqrt{\frac{MQR}{rn'}} \qquad \textbf{(11.17)}$$

## TERMOS-CHAVE

aleatoriedade e independência
análise da variância (ANOVA)
ANOVA de dois fatores
ANOVA de fator único
distribuição de intervalos de Student
distribuição *F*
efeitos principais
fator
grande média, $\bar{\bar{X}}$
grupo
homogeneidade de variâncias
interação
intervalo crítico
média dos quadrados
médias aritméticas de células
modelo completamente aleatório
modelo fatorial de dois fatores
múltiplas comparações

nível
normalidade
procedimento de múltiplas comparações de Tukey para ANOVA de dois fatores
procedimento de múltiplas comparações de Tukey-Kramer para ANOVA de fator único
repetições
soma dos quadrados da interação (*SQAB*)
soma dos quadrados dentro dos grupos (*SQD*)
soma dos quadrados do fator A (*SQA*)
soma dos quadrados do fator B (*SQB*)
soma dos quadrados dos erros (*SQR*)
soma dos quadrados entre grupos (*SQE*)
soma total dos quadrados (*STQ*)
tabela resumida de ANOVA
teste de Levene
variação dentro dos grupos
variação entre grupos
variação total

# PROBLEMAS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 11

## AVALIANDO O SEU ENTENDIMENTO

**11.27** Em uma ANOVA de fator único, qual é a diferença entre a variação entre grupos, *MQE*, e a variância dentro dos grupos, *MQD*?

**11.28** Quais são as características que distinguem o modelo completamente aleatório do modelo fatorial de dois fatores?

**11.29** Quais são os pressupostos para ANOVA?

**11.30** Sob que condições você deve selecionar o teste *F* de ANOVA de fator único para examinar possíveis diferenças entre as médias aritméticas de *c* grupos independentes?

**11.31** Quando e de que modo você deve utilizar procedimentos de múltiplas comparações para avaliar combinações em pares entre médias aritméticas de grupos?

**11.32** Qual é a diferença entre o teste *F* de ANOVA de fator único e o teste de Levene?

**11.33** Sob que condições você deve utilizar o teste *F* de ANOVA de dois fatores para examinar possíveis diferenças entre as médias aritméticas de cada um dos fatores em um modelo fatorial?

**11.34** Qual é o significado do conceito de interação em um modelo fatorial de dois fatores?

**11.35** Como você pode determinar se existe alguma interação no modelo fatorial de dois fatores?

## APLICANDO OS CONCEITOS

**11.36** O gerente de operações de um fabricante de produtos eletrônicos deseja determinar a extensão ideal de tempo para um ciclo de lavagem em uma máquina de lavar roupas de uso doméstico. Foi projetado um experimento para medir o efeito da marca do sabão em pó e do tempo do ciclo de lavagem sobre o volume de sujeira removido de um cesto padronizado de roupas sujas de uso doméstico. Quatro marcas de sabão em pó (*A*, *B*, *C* e *D*) e quatro níveis de ciclos de lavagem (18, 20, 22 e 24 minutos) são selecionados especificamente para fins de análise. Para realizar o experimento, 32 cestos padronizados com roupas de uso doméstico (com iguais pesos e índices de sujeira) são designados aleatoriamente, 2 de cada, para as 16 combinações entre sabão em pó e tempo do ciclo de lavagem. Os resultados, em termos do peso, em libras, de sujeira removida (armazenados em Lavadora), são os seguintes:

| MARCA DO SABÃO EM PÓ | TEMPO DE DURAÇÃO DO CICLO DE LAVAGEM (EM MINUTOS) | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 18 | 20 | 22 | 24 |
| A | 0,11 | 0,13 | 0,17 | 0,17 |
| A | 0,09 | 0,13 | 0,19 | 0,18 |
| B | 0,12 | 0,14 | 0,17 | 0,19 |
| B | 0,10 | 0,15 | 0,18 | 0,17 |
| C | 0,08 | 0,16 | 0,18 | 0,20 |
| C | 0,09 | 0,13 | 0,17 | 0,16 |
| D | 0,11 | 0,12 | 0,16 | 0,15 |
| D | 0,13 | 0,13 | 0,17 | 0,17 |

No nível de significância de 0,05,

a. existe uma interação entre a marca do sabão em pó e o tempo de duração do ciclo de lavagem?
b. existe um efeito decorrente da marca do sabão em pó?
c. existe um efeito decorrente do tempo de duração do ciclo de lavagem?
d. Desenhe um gráfico para a média aritmética da quantidade de sujeira removida (em libras) para cada uma das marcas de sabão em pó em relação a cada um dos tempos do ciclo de lavagem.
e. Se julgar apropriado, utilize o procedimento de Tukey para determinar diferenças entre as marcas de sabão em pó e entre os tempos de duração do ciclo de lavagem.
f. Que tempo de duração do ciclo de lavagem deve ser utilizado para esse tipo de máquina de lavar roupas de uso doméstico?
g. Repita a análise, utilizando o tempo do ciclo de lavagem como o único fator. Compare os seus resultados com os de (c), (e) e (f).

**11.37** O diretor de controle da qualidade de uma fábrica de tecidos deseja estudar o efeito decorrente de operadores e equipamentos sobre a resistência ao rompimento (em libras) de tecidos fabricados com lã. Um lote do material é cortado em pedaços de uma jarda quadrada; esses pedaços são designados aleatoriamente, 3 de cada, para todas as 12 combinações de 4 operadores e 3 equipamentos, escolhidos especificamente para o experimento. Os resultados (armazenados em Resistla) são os seguintes:



| OPERADOR | EQUIPAMENTO | | |
|---|---|---|---|
| | I | II | III |
| A | 115 | 111 | 109 |
| A | 115 | 108 | 110 |
| A | 119 | 114 | 107 |
| B | 117 | 105 | 110 |
| B | 114 | 102 | 113 |
| B | 114 | 106 | 114 |
| C | 109 | 100 | 103 |
| C | 110 | 103 | 102 |
| C | 106 | 101 | 105 |
| D | 112 | 105 | 108 |
| D | 115 | 107 | 111 |
| D | 111 | 107 | 110 |

No nível de significância de 0,05,

a. existe uma interação entre operador e equipamento?
b. existe algum efeito decorrente do operador?
c. existe algum efeito decorrente do equipamento?
d. Elabore um gráfico correspondente à média aritmética da resistência ao rompimento para cada um dos operadores em relação a cada um dos equipamentos.
e. Caso julgue apropriado, utilize o procedimento de Tukey para examinar as diferenças entre os operadores e entre os equipamentos.
f. O que você pode concluir em relação aos efeitos dos operadores e dos equipamentos sobre a resistência ao rompimento? Explique.
g. Repita a análise, utilizando equipamentos como o único fator. Compare os seus resultados com aqueles encontrados em (c), (e) e (f).

**11.38** Um gerente de produção deseja examinar o efeito decorrente da pressão do jato de ar [em psi – *pounds per square inch* (libras por polegada quadrada)] sobre a resistência ao rompimento de linhas de tecer. Três diferentes níveis de pressão do jato de ar devem ser considerados: 30 psi, 40 psi e 50 psi. É selecionada uma amostra aleatória contendo 18 linhas de algodão, extraídas do mesmo lote, e as linhas são designadas aleatoriamente, 6 de cada, para cada um dos 3 níveis de pressão do jato de ar. Os resultados em relação à resistência ao rompimento estão contidos no arquivo Linha.

a. Existem evidências de uma diferença significativa em termos das variâncias para as resistências ao rompimento em relação às três pressões do jato de ar? (Utilize $\alpha = 0{,}05$.)
b. No nível de significância de 0,05, existem evidências de uma diferença entre as médias aritméticas das resistências ao rompimento para as três pressões do jato de ar?
c. Caso julgue apropriado, utilize o procedimento de Tukey-Kramer para determinar quais das pressões do jato de ar diferem significativamente com respeito à média aritmética das resistências ao rompimento. (Utilize $\alpha = 0{,}05$.)
d. O que o gerente de produção deve concluir?

**11.39** Suponha que, ao elaborar seu experimento no Problema 11.38, o gerente de produção possa estudar os efeitos dos aspectos paralelos além da pressão do jato de ar. Por conseguinte, em vez do modelo completamente aleatório de um único fator, apresentado no Problema 11.38, foi utilizado um modelo fatorial de dois fatores; o primeiro fator, aspectos paralelos, possui dois níveis (bocal e oposto), e o segundo fator, pressão do jato de ar, possui três níveis (30 psi, 40 psi e 50 psi). Uma amostra com 18 linhas é designada aleatoriamente, 3 para cada uma das 6 combinações entre aspectos paralelos e níveis de pressão do jato de ar. Os resultados correspondentes à resistência ao rompimento (armazenados em Linha) são os seguintes:

| ASPECTO PARALELO | PRESSÃO DO JATO DE AR | | |
|---|---|---|---|
| | 30 psi | 40 psi | 50 psi |
| Bocal | 25,5 | 24,8 | 23,2 |
| Bocal | 24,9 | 23,7 | 23,7 |
| Bocal | 26,1 | 24,4 | 22,7 |
| Oposto | 24,7 | 23,6 | 22,6 |
| Oposto | 24,2 | 23,3 | 22,8 |
| Oposto | 23,6 | 21,4 | 24,9 |

No nível de significância de 0,05,

a. existe uma interação entre os aspectos paralelos e a pressão do jato de ar?
b. existe algum efeito decorrente dos aspectos paralelos?
c. existe algum efeito decorrente da pressão do jato de ar?
d. Desenhe um gráfico para a média aritmética da resistência ao rompimento da linha para os dois níveis de aspectos paralelos em relação a cada um dos níveis de pressão do jato de ar.
e. Se julgar apropriado, utilize o procedimento de Tukey para estudar as diferenças entre as pressões do jato de ar.
f. Com base nos resultados de (a) a (e), a que conclusões você pode chegar no que concerne à resistência ao rompimento da linha? Discuta.
g. Compare os seus resultados para (a) a (f) com os resultados correspondentes ao modelo completamente aleatório no Problema 11.38. Discuta em detalhes.

**11.40** Um hotel queria desenvolver um novo sistema para serviço de entrega de café da manhã no quarto. No sistema atual, um formulário de pedido é deixado em cima da cama em cada um dos quartos. Caso o hóspede queira receber o serviço de café da manhã no quarto, ele coloca esse formulário na maçaneta da porta antes das 11 horas da noite. O sistema atual requer que o hóspede selecione um intervalo de 15 minutos em relação ao horário de entrega solicitado (6h30–6h45, 6h45–7h, e assim sucessivamente). O novo sistema é projetado de modo a permitir que o hóspede solicite um horário específico para o serviço. O hotel deseja mensurar a diferença entre o horário real da entrega e o horário solicitado para a entrega do serviço. (Um horário negativo significa que o pedido foi atendido antes do horário solicitado. Um horário positivo significa que o pedido foi atendido depois do horário solicitado.) Os fatores incluídos foram opção de menu (americano ou continental) e o horário desejado para que o pedido fosse entregue (Primeiro Período [6h30-8h] ou Segundo Período [8h00-9h30]). Foram estudados 10 pedidos para cada uma das combinações entre opção de menu e período desejado, em um determinado dia. Os dados (armazenados em CafédaManhã) são os seguintes:

| TIPO DE CAFÉ DA MANHÃ | HORÁRIO DESEJADO | |
|---|---|---|
| | Primeiro Período Mais Cedo | Segundo Período Mais Tarde |
| Continental | 1,2 | −2,5 |
| Continental | 2,1 | 3,0 |
| Continental | 3,3 | −0,2 |
| Continental | 4,4 | 1,2 |
| Continental | 3,4 | 1,2 |
| Continental | 5,3 | 0,7 |
| Continental | 2,2 | −1,3 |
| Continental | 1,0 | 0,2 |
| Continental | 5,4 | −0,5 |
| Continental | 1,4 | 3,8 |
| Americano | 4,4 | 6,0 |
| Americano | 1,1 | 2,3 |
| Americano | 4,8 | 4,2 |
| Americano | 7,1 | 3,8 |
| Americano | 6,7 | 5,5 |
| Americano | 5,6 | 1,8 |
| Americano | 9,5 | 5,1 |
| Americano | 4,1 | 4,2 |
| Americano | 7,9 | 4,9 |
| Americano | 9,4 | 4,0 |

No nível de significância de 0,05,

**a.** existe alguma interação entre o tipo de café da manhã e o período desejado?
**b.** existe algum efeito decorrente do tipo de café da manhã?
**c.** existe algum efeito decorrente do período desejado?
**d.** Desenhe um gráfico para a média aritmética da diferença correspondente ao tempo de entrega para cada um dos períodos desejados em relação a cada um dos tipos de café da manhã.
**e.** Com base nos resultados de (a) a (d), a que conclusões você chega no que diz respeito à diferença entre os tempos de entrega? Discuta.

**11.41** Reporte-se ao experimento que trata do serviço de entrega de café da manhã nos quartos do hotel. Suponha agora que os resultados se apresentem conforme a tabela adiante (e armazenados em CafédaManhã2). Repita (a) até (e) utilizando esses dados e compare os resultados com os resultados de (a) a (e) do Problema 11.40.

| TIPO DE CAFÉ DA MANHÃ | HORÁRIO DESEJADO | |
|---|---|---|
| | Mais Cedo | Mais Tarde |
| Continental | 1,2 | −0,5 |
| Continental | 2,1 | 5,0 |
| Continental | 3,3 | 1,8 |
| Continental | 4,4 | 3,2 |
| Continental | 3,4 | 3,2 |
| Continental | 5,3 | 2,7 |
| Continental | 2,2 | 0,7 |
| Continental | 1,0 | 2,2 |
| Continental | 5,4 | 1,5 |
| Continental | 1,4 | 5,8 |
| Americano | 4,4 | 6,0 |
| Americano | 1,1 | 2,3 |
| Americano | 4,8 | 4,2 |
| Americano | 7,1 | 3,8 |
| Americano | 6,7 | 5,5 |
| Americano | 5,6 | 1,8 |
| Americano | 9,5 | 5,1 |
| Americano | 4,1 | 4,2 |
| Americano | 7,9 | 4,9 |
| Americano | 9,4 | 4,0 |

**11.42** Aplicações de *softwares* modernos requerem a capacidade de rápido acesso aos dados. Foi conduzido um experimento para testar o efeito que o tamanho do arquivo de dados exerce sobre a capacidade de acessar os arquivos (medido com base no tempo de leitura, em milissegundos). Três diferentes níveis de tamanhos de arquivos de dados foram considerados: pequeno — 50.000 caracteres; médio — 75.000 caracteres; e grande — 100.000 caracteres. Foi avaliada uma amostra com oito arquivos de cada um dos tamanhos. Os tempos de acesso para leitura, em milissegundos, estão armazenados no arquivo Acesso.

**a.** Existem evidências de uma diferença significativa em termos da variância para os tempos de acesso para leitura em relação aos três tamanhos de arquivo? (Utilize $\alpha = 0{,}05$.)
**b.** No nível de significância de 0,05, existem evidências de uma diferença entre as médias aritméticas dos tempos de acesso para leitura em relação aos três tamanhos de arquivo?
**c.** Se julgar apropriado, utilize o procedimento de múltiplas comparações de Tukey-Kramer para determinar quais tamanhos de arquivos diferem significativamente em termos da média aritmética relativa aos tempos de acesso para leitura. (Utilize $\alpha = 0{,}05$.)
**d.** Que conclusões você consegue tirar?

**11.43** Suponha, ao projetar o experimento no Problema 11.42, que o efeito decorrente do tamanho da memória intermediária de entrada/saída tenha sido também estudado, além dos efeitos do tamanho do arquivo de dados. Assim, em vez do modelo completamente aleatório de fator único, apresentado no Problema 11.42, o experimento utilizou um modelo fatorial de dois fatores, com o primeiro fator, tamanho da memória intermediária, com dois níveis (20 quilobytes e 40 quilobytes) e o segundo fator, tamanho do arquivo de dados, com três níveis (pequeno, médio e grande). Ou seja, existem dois fatores sendo avaliados: tamanho da memória intermediária e tamanho do arquivo de dados. Foi avaliada uma amostra com quatro programas (repetições) para cada uma das combinações entre tamanho da memória intermediária e tamanho do arquivo de dados. Os tempos de acesso para leitura, em milissegundos, são apresentados no arquivo Acesso.

No nível de significância de 0,05,

**a.** existe uma interação entre o tamanho da memória intermediária e o tamanho do arquivo de dados?
**b.** existe um efeito decorrente do tamanho da memória intermediária?
**c.** existe um efeito decorrente do tamanho do arquivo de dados?
**d.** Desenhe um gráfico para a média aritmética dos tempos de acesso para leitura (em milissegundos) para cada um dos níveis de tamanho da memória intermediária em relação a cada um dos três níveis de tamanho do arquivo de dados. Descreva a interação e discuta a razão pela qual você consegue, ou não, interpretar os principais efeitos em (b) e (c).



**e.** Com base nos resultados de (a) a (d), a que conclusões você pode chegar sobre o tempo de acesso para leitura? Discuta.
**f.** Compare e contraponha os seus resultados em (a) até (e) com os resultados oriundos do modelo completamente aleatório no Problema 11.42. Discuta em detalhes.

**11.44** Quando uma equipe que estava estudando o peso de ração enlatada para gatos percebeu que o tamanho dos pedaços de carne que havia nas latas e a altura relativa ao preenchimento da lata poderiam impactar o peso da lata, eles conjecturaram se os maiores pedaços atuais de carne poderiam produzir maior peso para a lata e maior variabilidade. Assim, foi estudado um tamanho de corte mais fino, juntamente com o tamanho atual. Além disso, a meta estabelecida para o mecanismo do sensor que determina a altura relativa ao preenchimento foi ligeiramente baixada, de maneira a determinar o seu efeito sobre o peso da lata. Vinte latas foram abastecidas para cada uma das quatro combinações entre tamanho do pedaço de carne (fino e atual) e a altura para o preenchimento da lata (baixo e atual). O conteúdo de cada uma das latas estabelecido no rótulo foi registrado como a variável Peso Codificado. Por exemplo, uma lata que contivesse 2,90 onças recebeu um Peso Codificado correspondente a −0,10. Os resultados estão armazenados em RaçãoGatos2.

Analise esses dados e escreva um relatório para fins de apresentação à equipe. Indique a importância do tamanho do pedaço de carne e da altura do preenchimento para o peso da ração enlatada para gatos. Não deixe de incluir uma recomendação para o nível de cada um dos fatores que virá a se colocar mais próximo do cumprimento da meta estabelecida para o peso e as limitações desse experimento, juntamente com recomendações para futuros experimentos que possam vir a ser realizados.

## PROJETO DE GRUPO

O arquivo Fundos de Títulos contém informações relativas a oito variáveis, extraídas de uma amostra de 180 fundos mútuos. As variáveis são:

Tipo — Tipos de títulos que compõem o fundo mútuo (governo de médio prazo e corporativos de curto prazo)
Ativos — Em milhões de dólares
Comissões — Taxas cobradas sobre vendas (não ou sim)
Proporção de despesas — Proporção entre despesas incorridas e ativos líquidos, em percentagens
Retorno 2008 — Retorno de 12 meses em 2008
Retorno de 3 anos — Retorno ano a ano, 2006-2008
Retorno de 5 anos — Retorno ano a ano, 2004-2008
Risco — Fator de risco de perdas do fundo mútuo de títulos (abaixo da média, médio ou acima da média)

**11.45** Analise integralmente as diferenças entre os fundos mútuos de títulos com risco abaixo da média, com risco médio e com risco acima da média, em termos do retorno em 2008, do retorno de 3 anos, do retorno de 5 anos e da proporção de despesas. Escreva um relatório sintetizando suas descobertas.

## BANCO DE DADOS DE PESQUISA REALIZADOS JUNTO A ALUNOS

**11.46** O Problema 2.117, nos Problemas de Revisão do Capítulo 2, descreve uma pesquisa realizada junto a 50 alunos de graduação (dados armazenados em PesquisaGrad). Para esses dados,

**a.** no nível de significância de 0,05, existem evidências de uma diferença baseada na especialização acadêmica, em termos da média final, do salário inicial esperado, do salário esperado em cinco anos, da idade e do gasto com livros didáticos e material escolar?
**b.** no nível de significância de 0,05, existem evidências de uma diferença baseada na intenção de graduação, em termos da média final, do salário inicial esperado, do salário esperado em cinco anos, da idade e do gasto com livros didáticos e material escolar?
**c.** no nível de significância de 0,05, existem evidências de uma diferença baseada na situação de emprego, em termos da média final, do salário inicial esperado, do salário esperado em cinco anos, da idade e do gasto com livros didáticos e material escolar?

**11.47** O Problema 2.117, nos Problemas de Revisão do Capítulo 2, descreve uma pesquisa realizada junto a 50 alunos de graduação (dados armazenados em PesquisaGrad).

**a.** Selecione uma amostra de 50 alunos da graduação em sua faculdade e conduza uma pesquisa semelhante junto a eles.
**b.** No tocante aos dados coletados em (a), repita os itens de (a) a (c) do Problema 11.46.
**c.** Compare os resultados do item (b) com os resultados do Problema 11.46.

**11.48** O Problema 2.119, nos Problemas de Revisão do Capítulo 2, descreve uma pesquisa realizada junto a 40 alunos de MBA (dados armazenados em PesquisaGrad). Em relação a esses dados, para um nível de significância de 0,05,

**a.** existem evidências de uma diferença baseada na especialização da graduação, em termos da idade, da média final na graduação, da média final na pós-graduação, do resultado do GMAT, do salário esperado após a graduação, do salário esperado em cinco anos e do gasto com livros didáticos e material escolar?
**b.** existem evidências de uma diferença, com base na especialização da graduação, em termos da idade, da média final na graduação, da média final na pós-graduação, do resultado do GMAT, do salário esperado após a graduação, do salário esperado em cinco anos e do gasto com livros didáticos e material escolar?
**c.** existem evidências de uma diferença, com base na situação de emprego, em termos da idade, da média final na graduação, da média final na pós-graduação, do resultado do GMAT, do salário esperado após a graduação, do salário esperado em cinco anos e do gasto com livros didáticos e material escolar?

**11.49** O Problema 2.119, nos Problemas de Revisão do Capítulo 2, descreve uma pesquisa realizada junto a 40 alunos de MBA (dados armazenados em PesquisaGrad).

**a.** Selecione uma amostra de 40 alunos de MBA em sua faculdade e conduza uma pesquisa semelhante junto a eles.
**b.** No tocante aos dados coletados em (a), repita os itens de (a) a (c) do Problema 11.48.
**c.** Compare os resultados em (b) com os resultados do Problema 11.48.

# ADMINISTRANDO O *SPRINGVILLE HERALD*

## Fase 1

Ao estudar o processo de pedidos de assinaturas residenciais, o departamento de marketing determinou que as chamadas conhecidas como "mais tarde", realizadas entre 19h e 21h, eram significativamente mais propensas a se estender por um período mais longo do que aquelas realizadas mais cedo à noite (entre 17h e 19h).

Sabendo que no período entre 19h e 21h a duração da chamada era maior, a equipe buscava investigar o efeito do tipo de apresentação sobre a duração da chamada. Um grupo de 24 atendentes do sexo feminino foi designado aleatoriamente, 8 delas para cada um dos três planos de apresentação – estruturada, semiestruturada e não estruturada –, e foram treinadas para fazer a apresentação por telefone. Todas as chamadas foram realizadas entre 19h e 21h, o período mais tarde, e as atendentes deveriam fazer uma saudação pessoal, porém informal ("Oi, aqui é Leigh Richardson, do *Springville Herald*. Posso falar com Stuart Knoll?"). As atendentes sabiam que a equipe estava observando seu trabalho naquela noite, mas não sabiam quais chamadas específicas estavam sendo monitoradas. Foram feitas medições em relação ao tempo de duração da chamada (definido como a diferença, em segundos, entre o momento em que a pessoa atende ao telefone e o momento em que o desliga). A Tabela SH11.1 apresenta os resultados (armazenados em SH11-1).

### TABELA SH11.1
Duração da Chamada (em Segundos) com Base no Plano de Apresentação

| PLANO DE APRESENTAÇÃO | | |
|---|---|---|
| **Estruturado** | **Semiestrutudado** | **Não Estruturado** |
| 38,8 | 41,8 | 32,9 |
| 42,1 | 36,4 | 36,1 |
| 45,2 | 39,1 | 39,2 |
| 34,8 | 28,7 | 29,3 |
| 48,3 | 36,4 | 41,9 |
| 37,8 | 36,1 | 31,7 |
| 41,1 | 35,8 | 35,2 |
| 43,6 | 33,7 | 38,1 |

## EXERCÍCIO

**SH11.1** Analise esses dados e escreva para a equipe um relatório que indique as suas descobertas. Não deixe de incluir suas recomendações, com base nessas descobertas. Inclua também um apêndice no qual você discuta as razões pelas quais selecionou um determinado teste estatístico para comparar os três grupos independentes de atendentes.

SÓ CONTINUE DEPOIS DE TER CONCLUÍDO O EXERCÍCIO DA FASE 1.

## Fase 2

Ao analisar os dados da Tabela SH11.1, o departamento de marketing observou que o plano de apresentação estruturada resultou em uma chamada telefônica significativamente mais longa do que no plano de apresentação semiestruturada ou no plano de apresentação não estruturada. A equipe decidiu, a título de tentativa, recomendar que todas as solicitações fossem de chamadas completamente estruturadas, feitas no período mais tarde da noite, entre 19h e 21h. A equipe decidiu, também, estudar o efeito de dois outros fatores sobre o tempo de duração da chamada:

- Gênero do atendente: masculino *versus* feminino.
- Tipo de saudação: pessoal porém formal (por exemplo, "Alô, meu nome é Leigh Richardson, do *Springville Herald*. Posso falar com o senhor Knoll?"); pessoal porém informal (por exemplo, "Oi, aqui é Leigh Richardson, do *Springville Herald*. Posso falar com Stuart Knoll?"); ou impessoal (por exemplo, "Eu represento o *Springville Herald*...").

A equipe reconheceu que em seus estudos anteriores havia controlado essas variáveis. Somente atendentes do sexo feminino foram selecionadas para participar nos estudos e treinadas no sentido de utilizar um estilo de saudação pessoal porém informal. No entanto, a equipe ponderou se essa opção entre gênero e tipo de saudação seria, de fato, a melhor.

A equipe projetou um estudo em que um total de 30 atendentes, 15 homens e 15 mulheres, foi escolhido para participar. Os atendentes foram designados aleatoriamente a um dos três grupos de treinamento dos estilos de saudação, de modo a que houvesse cinco atendentes em cada uma das seis combinações entre os dois fatores – gênero e estilo de saudação (pessoal porém formal — PF; pessoal porém informal — PI; e impessoal). Os atendentes sabiam que a equipe estaria observando seu trabalho naquela noite, mas não sabiam quais chamadas específicas estariam sendo monitoradas.

Foram realizadas medições do tempo de duração da chamada (definido como a diferença, em segundos, entre o momento em que a pessoa atendeu ao telefone e o momento em que o desligou). A Tabela SH11.2 faz um resumo dos resultados (armazenados em SH11-2).

### TABELA SH11.2
Duração da Chamada (em Segundos) com Base no Gênero e no Tipo de Saudação

| | SAUDAÇÃO | | |
|---|---|---|---|
| **GÊNERO** | **PF** | **PI** | **Impessoal** |
| **Masculino** | 45,6 | 41,7 | 35,3 |
| **Masculino** | 49,0 | 42,8 | 37,7 |
| **Masculino** | 41,8 | 40,0 | 41,0 |
| **Masculino** | 35,6 | 39,6 | 28,7 |
| **Masculino** | 43,4 | 36,0 | 31,8 |
| **Feminino** | 44,1 | 37,9 | 43,3 |
| **Feminino** | 40,8 | 41,1 | 40,0 |
| **Feminino** | 46,9 | 35,8 | 43,1 |
| **Feminino** | 51,8 | 45,3 | 39,6 |
| **Feminino** | 48,5 | 40,2 | 33,2 |



## EXERCÍCIOS

**SH11.2** Analise em detalhes esses dados e escreva para a equipe um relatório que indique a importância de cada um dos dois fatores e/ou a interação entre eles em relação à duração da chamada telefônica. Inclua recomendações para futuros experimentos que possam vir a ser realizados.

**SH11.3** Você acha que a duração da chamada telefônica seria o resultado mais apropriado a ser estudado? Que outras variáveis deveriam ser investigadas em seguida? Discuta.

# CASO DE INTERNET

*Aplique os seus conhecimentos sobre ANOVA neste Caso de Internet, que dá continuidade ao Caso de Internet dos Capítulos 7, 9 e 10, que trata do litígio em relação à quantidade abastecida em embalagens de cereais.*

Depois de rever o último pronunciamento da CCACC (veja o Caso de Internet para o Capítulo 10), a Oxford Cereals está culpando o grupo de utilizar dados seletivos. Utilizando o seu navegador na Web, acesse o site da LTC Editora para este livro e entre no Caso de Internet do Capítulo 11, ou abra diretamente o arquivo **OC_DataSelective.htm**, caso já tenha baixado para o seu computador os arquivos da pasta Caso de Internet. Reexamine as objeções da Oxford Cereals em relação ao último pronunciamento divulgado pela CCACC e, depois, responda às seguintes perguntas:

1. O argumento da Oxford Cereals é legítimo? Por que sim ou por que não?
2. Pressupondo que as amostras que a empresa utilizou tenham sido selecionadas aleatoriamente, realize a análise apropriada para solucionar a questão do litígio em relação ao peso.
3. A que conclusões você pode chegar a partir de seus resultados? Caso você fosse chamado a testemunhar como perito, que declarações você defenderia, as da CCACC ou as da Oxford Cereals? Explique.

# REFERÊNCIAS


1. Berenson, M. L., D. M. Levine, and M. Goldstein, *Intermediate Statistical Methods and Applications: A Computer Package Approach* (Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1983).
2. Conover, W. J., *Practical Nonparametric Statistics*, 3rd ed. (New York: Wiley, 2000).
3. Daniel, W. W., *Applied Nonparametric Statistics*, 2nd ed. (Boston: PWS Kent, 1990).
4. Gitlow, H. S., and D. M. Levine, *Six Sigma for Green Belts and Champions: Foundations, DMAIC, Tools, Cases, and Certification* (Upper Saddle River, NJ: Financial Times/Prentice Hall, 2005).
5. Hicks, C. R., and K. V. Turner, *Fundamental Concepts in the Design of Experiments*, 5th ed. (New York: Oxford University Press, 1999).
6. Kutner, M. H., J. Neter, C. Nachtsheim, and W. Li, *Applied Linear Statistical Models*, 5th ed. (New York: McGraw-Hill-Irwin, 2005).
7. Levine, D. M., *Statistics for Six Sigma Green Belts* (Upper Saddle River, NJ: Financial Times/Prentice Hall, 2006).
8. *Microsoft Excel 2007* (Redmond, WA: Microsoft Corp., 2007).
9. Montgomery, D. M., *Design and Analysis of Experiments*, 6th ed. (New York: Wiley, 2005).