Seções Cônicas

Ricardo Bianconi

Fevereiro de 2015

Uma parte importante da Geometria Analítica é o estudo das curvas planas e, em particular, das cônicas. Neste texto estudamos algumas propriedades das cônicas.

Notação: Pontos são denotados por letras maiúsculas e retas por letras minúsculas. Dados os pontos P e Q, $\overline{PQ}$ denota o segmento de extremidades P e Q, e PQ denota sua medida (assumindo a escolha de alguma unidade de medida); $\overline{PQ} \perp r$ indica que o segmento $\overline{PQ}$ é perpendicular à reta r, etc.

1 Seções Cônicas

Uma *superfície cônica circular*, ou simplesmente *cone circular*, é o conjunto dos pontos do espaço pertencentes às retas que ligam os pontos de uma circunferência $\mathcal{C}$ a um ponto V fora do plano que contém $\mathcal{C}$. O ponto V é o *vértice* e cada reta ligando V a um ponto de $\mathcal{C}$ é uma *geratriz*. A reta que liga V ao centro de $\mathcal{C}$ é o *eixo* da superfície cônica.

Se o eixo do cone for perpendicular ao plano da circunferência $\mathcal{C}$, então chamaremos o cone de *superfície cônica circular reta*, ou *cone circular reto*.

O vértice divide o cone em duas partes, que chamaremos de *faces*.

A curva obtida da intersecção do cone com um plano que não contenha o vértice V é chamada de *seção cônica*, ou simplesmente de *cônica*. Podem ser de três tipos: parábola (quando o plano é paralelo a uma geratriz), hipérbole (quando o plano intersecta as duas faces do cone, formando duas curvas) e elipse (quando intersectar só uma das faces e não for uma parábola). Veja a Figura 1.

Vamos explorar algumas das propriedades métricas dessas curvas, deduzindo suas equações.

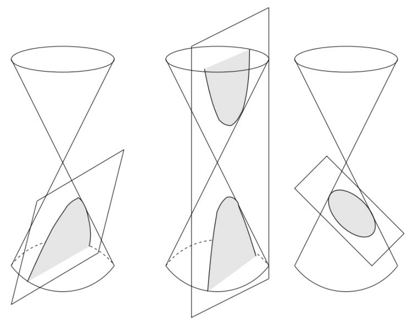

Figura 1: Seções cônicas: parábola, hipérbole e elipse.

2 Propriedades métricas

2.1 Esferas de Dandelin

Agora vamos obter propriedades métricas das cônicas. Para isto, primeiro vamos fazer umas construções, devidas ao matemático francês naturalizado belga Germinal Pierre Dandelin (1794-1847).

Trabalhamos com um cone circular reto, intersectado por um plano que não contenha o vértice do cone e que não seja perpendicular a seu eixo (pois, neste caso, teríamos uma circunferência).

Primeiro, inscrevemos uma esfera no cone (tangente a todas as geratrizes) e tangente ao plano da cônica.

No caso da parábola, existe uma única esfera com tal propriedade, e nos casos da elipse e da hipérbole, existem duas destas esferas. No diagrama da Figura 2 temos uma visão em perspectiva do caso da elipse.

Nas Figuras 3, 4 e 5 vemos seções transversais dos três casos, contendo as duas esferas nos casos da elipse e hipérbole, e apenas uma no caso da parábola.

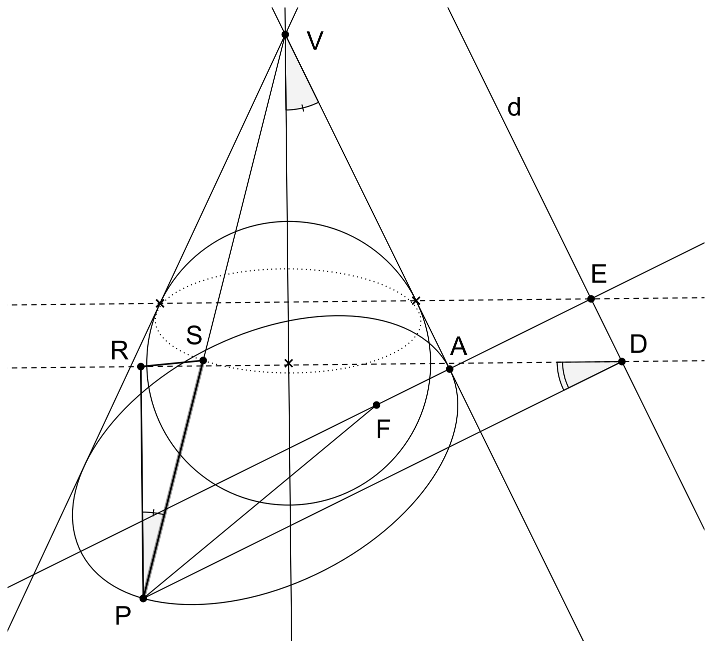

Figura 2: Esferas de Dandelin.

No caso da elipse (Figura 3) ambas as esferas tangenciam a mesma face do cone.

No caso da hipérbole, (Figura 4), as esferas tangenciam faces opostas do cone.

No caso da parábola (Figura 5), como o plano é paralelo a uma geratriz, há somente uma esfera tangente ao cone e ao plano da seção.

Considere a Figura 2. Uma das esferas tangencia o plano da cônica no ponto F; o plano da cônica não é, por hipótese, perpendicular ao eixo do cone e, assim, tem intersecção com o plano que contém os pontos de tangência da esfera com o cone (o qual chamamos de *plano horizontal*, para futura referência), uma reta que chamamos de d. O ponto F e a reta d têm um papel importante no estudo métrico das cônicas. São um *foco* e uma *diretriz*, respectivamente.

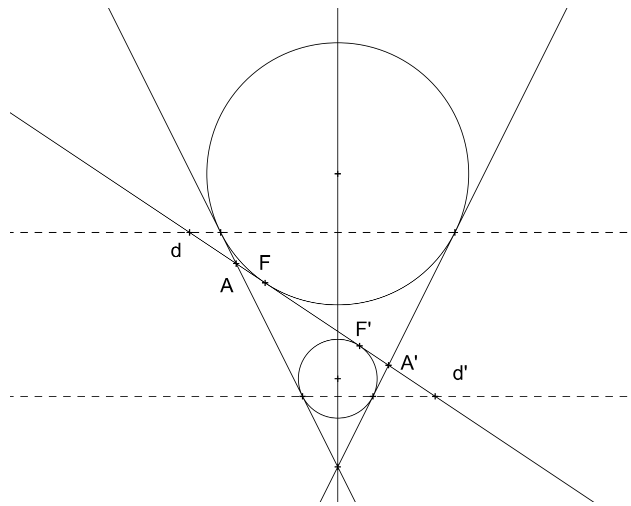

Figura 3: Esferas de Dandelin para elipses, em seção transversal. Ambas as esferas tangenciam a mesma face do cone.

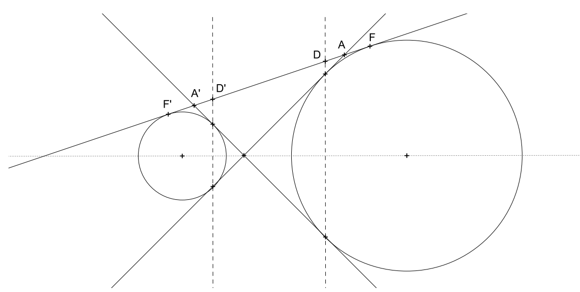

Figura 4: Esferas de Dandelin para hipérboles, em seção transversal. As esferas tangenciam faces opostas do cone.

Seja P um ponto qualquer da cônica. Sejam S o ponto de interseção do plano horizontal com o segmento $\overline{PV}$, ligando o ponto P com o vértice V do cone; D o ponto da diretriz d, tal que o segmento $\overline{PD}$ seja perpendicular a d; e R o ponto do plano horizontal, tal que o segmento $\overline{PR}$ seja perpendicular

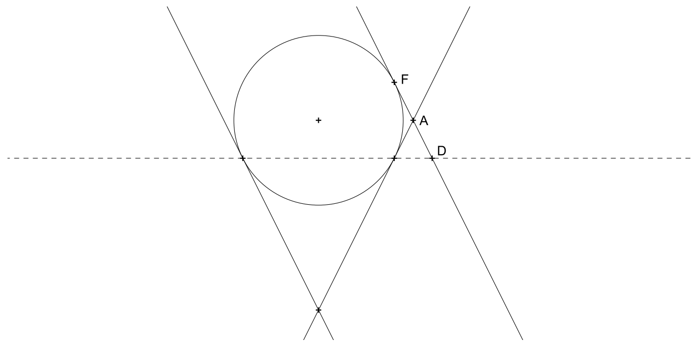

Figura 5: Esfera de Dandelin para parábolas, em seção transversal. Somente há uma esfera tangente ao cone e ao plano da seção.

a esse plano.

O ângulo $R\hat{P}S$ tem a mesma medida ϕ que o ângulo (agudo) que cada geratriz do cone faz com eixo do mesmo. Seja ψ a medida do ângulo $P\hat{D}R$. Esses ângulos estão destacados na figura.

Como as retas contendo os segmentos $\overline{PF}$ e $\overline{PS}$ são tangentes à esfera, os segmentos $\overline{PF}$ e $\overline{PS}$ são congruentes.

Dado que os triângulos $\triangle PRS$ e $\triangle PRD$ são retângulos, temos que

$$\cos\phi = \frac{PR}{PS} = \frac{PR}{PF}, \text{ e } \operatorname{sen}\psi = \frac{PR}{PD},$$

de onde tiramos que

$$PF = \frac{\operatorname{sen}\psi}{\cos\phi} PD.$$

O número $e = \operatorname{sen}\psi / \cos\phi = \cos(\pi/2 - \psi)/\cos\phi$ é chamado de *excentricidade* da cônica , onde o ângulo $\pi/2 - psi$ é o ângulo (agudo) que o plano da cônica forma com o eixo do cone.

Analisando os ângulos ϕ e ψ (na verdade, ϕ e $\pi/2 - \psi$, sendo que este último é o ângulo que o plano daq cônica faz com o eixo do cone), vemos que

1. se $0 < e < 1$, temos que $\phi < \pi/2 - \psi$ e a cônica será uma elipse,

2. se $e = 1$, $\phi = \pi/2 - \psi$, ou seja, o plano da cônica será paralelo a uma geratriz, e a cônica será uma parábola e

3. se $e > 1$, $\phi > \pi/2 - \psi$, e a cônica será uma hipérbole.

Observe que a excentricidade será a mesma, qualquer que seja a esfera tangente usada, nos casos da elipse e da hipérbole (os dois planos horizontais serão paralelos).

Vamos usar essa relação no estudo das propriedades métricas das cônicas a seguir.

2.2 Propriedades Métricas e Equações

A relação $PF = e\,PD$ tem consequências interessantes para o estudo métrico das cônicas. Vejamos, caso a caso.

2.2.1 Elipse

Acompanhe a Figura 6. Sejam F e F' os dois focos da elipse, d e d' as respectivas diretrizes, e e sua excentricidade. Se P for um ponto qualquer da elipse, sejam D em d e D' em d', os pontos, tais que os segmentos $\overline{PD}$ e $\overline{PD'}$ sejam perpendiculares a d e d', respectivamente.

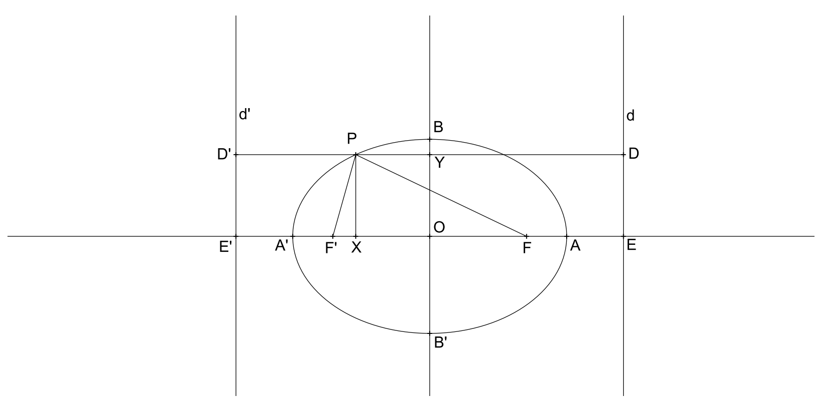

Figura 6: Propriedades métricas da elipse.

Como $PF = e\,PD$ e $PF' = e\,PD'$, e como as diretrizes d e d' são paralelas, temos que

$$PF + PF' = e(PD + PD') = e\,\mathrm{dist}\,(d, d'),$$

ou seja, a soma das distâncias do ponto P aos focos da elipse é uma constante.

A reta que contém os dois focos é perpendicular às diretrizes e intersecta a elipse nos pontos A e A' (posicionados como na Figura 6). Observe que $PF + PF' = AF + AF' = AF' + A'F' = AA'$.

Podemos concluir daí que

$$\boxed{AA' = e\,\mathrm{dist}\,(d, d').}$$

Considere a relação $FF' = A'F - A'F' = AF' - AF = e\,\mathrm{dist}\,(A, d') - e\,\mathrm{dist}\,(A, d)$. Daí tiramos que $AF + AF' = AF + (AF + FF') = A'F + A'F' = A'F' + (A'F' + FF')$, ou seja, $AF = A'F'$, de onde concluímos que as distâncias de cada foco à sua correspondente diretriz coincidem, uma primeira simetria da elipse.

Dado que $\mathrm{dist}\,(A, d') - \mathrm{dist}\,(A, d) = AA'$, obtemos

$$FF' = e\,AA'.$$

Seja O o ponto médio do segmento $\overline{AA'}$, que é chamado de *centro* da elipse. A reta perpendicular ao segmento $\overline{AA'}$ e contendo o ponto O intersecta a elipse nos pontos B e B'. Observe que $BB' < AA'$.

Os segmentos $\overline{AA'}$ e $\overline{BB'}$ são chamados respectivamente de *eixo maior* e *eixo menor* da elipse.

Observe que $BF + BF' = 2\,BF = AA' = 2\,OA$, ou seja, $BF = OA$. Como $BF^2 = OB^2 + OF^2$ e como $OF = e\,OA$, obtemos a relação $(1 - e^2)OA^2 = OB^2$, ou

$$e = \sqrt{1 - \frac{OB^2}{OA^2}}.$$

Dado um ponto P qualquer da elipse, obtemos os pontos X em $\overline{AA'}$ e Y em $\overline{BB'}$, tais que $\overline{PX} \perp \overline{AA'}$ e $\overline{PY} \perp \overline{BB'}$. Vamos chamar os comprimentos $OX = x$, $OY = y$, $OA = a$ e $OB = b$.

Considere a equação $PF = e\,\mathrm{dist}\,(P, d)$, ou melhor, elevando ambos os membros ao quadrado, $PF^2 = e^2 \mathrm{dist}^2(P, d)$. Observe que $\mathrm{dist}\,(P, d) =$

$\text{dist}\,(O,d) - OX = (OA/e) - OX$, $PF^2 = (OF - OX)^2 + OY^2 = (e\,OA - OX)^2 + OY^2$, e que $(1-e^2) = b^2/a^2$. Juntando toda essa informação, obtemos $e^2a^2 - 2eax + x^2 + y^2 = a^2 - 2eax + e^2x^2$, ou seja, $(1-e^2)x^2 + y^2 = b^2$, ou, na forma mais conhecida,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Resumo das Propriedades da Elipse: dada a elipse de focos F e F', respectivas diretrizes d e d', excentricidade e, eixo maior $\overline{AA'}$, eixo menor $\overline{BB'}$, e centro O, escrevendo $a = OA$ e $b = OB$ (os tamanhos dos semi-eixos), temos:

1. para cada ponto P da elipse, $PF = e\,\text{dist}\,(P,d)$ e $PF' = e\,\text{dist}\,(P,d')$;
2. para cada ponto P da elipse, $PF + PF' = AA'$;
3. em particular, para o ponto B, $BF = BF' = OA = a$;
4. $AA' = e\,\text{dist}\,(d,d')$ e $FF' = e\,AA'$;
5. $e^2 = 1 - (b/a)^2$;
6. para cada ponto P da elipse, se X em AA' e Y em BB' forem tais que $\overline{PX} \perp \overline{AA'}$ e $\overline{PY} \perp \overline{BB'}$, $x = OX$, $y = OY$, então

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

2.2.2 Parábola

Acompanhe a Figura 7. A parábola tem apenas um foco F e uma diretriz d, sendo sua excentricidade $e = 1$. A relação $PF = e\,PD$ torna-se $PF = \text{dist}\,(P,d)$.

Vamos usar essa relação para deduzir uma equação da parábola. Seja r a reta que contém o foco F e que é perpendicular à diretriz d. Essa reta intersecta a parábola em um ponto A, chamado de *vértice* da parábola. Seja s a reta contendo o ponto A e paralela à diretriz d.

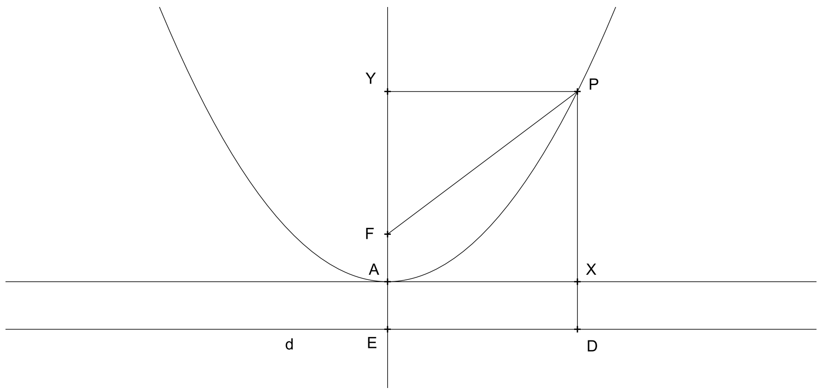

Figura 7: Propriedades métricas da parábola.

Seja P um ponto qualquer da parábola. Marcamos em r o ponto Y, e em s o ponto X, tais que $\overline{PY} \perp r$ e $\overline{PX} \perp s$, e seja D o ponto de d, tal que $\overline{PD} \perp d$.

Como $XD = \text{dist}\,(d,s) = \text{dist}\,(A,d) = AF$, $\text{dist}\,(P,d) = AY + AF$, e como $PF^2 = AX^2+(AY-AF)^2$, obtemos $(AY+AF)^2 = AX^2+(AY-AF)^2$ ou, simplificando, $4AF\,AY = AX^2$. Chamando $AF = a$, $AX = x$ e $AY = y$, obtemos a expressão mais conhecida

$$4ay = x^2.$$

Resumo das Propriedades das Parábolas: sejam F o foco e d a diretriz da parábola, e seja $a = \text{dist}\,(F,d)/2$.

1. a parábola tem somente um foco e uma diretriz;
2. a equação da parábol é da forma $4ay = x^2$ (com eixos descritos acima), sendo que $2a$ é a distância entre o foco e a diretriz.

2.2.3 Hipérbole

Acompanhe a Figura 8. Sejam F e F' os dois focos da hipérbole, d e d' as respectivas diretrizes, e e sua excentricidade. A hipérbole sempre será composta de duas componentes disjuntas, que chamamos de $\mathbb{H}$ e $\mathbb{H}'$, sendo que a escolha é feita de modo que a componente $\mathbb{H}$ fique do mesmo lado da diretriz d que o foco F, e analogamente para $\mathbb{H}'$

Se P for um ponto qualquer da hipérbole, sejam D em d e D' em d', os pontos, tais que os segmentos $\overline{PD}$ e $\overline{PD'}$ sejam perpendiculares a d e d', respectivamente.

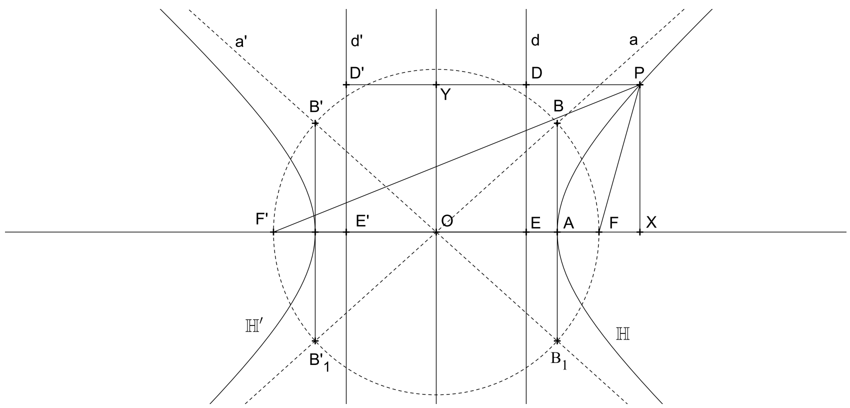

Figura 8: Propriedades métricas da hipérbole.

Se P estiver na componente $\mathbb{H}$, então o ponto D estará no interior do segmento $\overline{PD'}$. Das relações $PF = e\,PD$ e $PF' = e\,PD'$, obtemos $PF' - PF = e(PD' - PD) = e\,D'D$, ou seja, a excentricidade vezes a distância entre as diretrizes.

Se P estiver na componente $\mathbb{H}'$, então o ponto D' estará no interior do segmento $\overline{PD}$. Das relações $PF = e\,PD$ e $PF' = e\,PD'$, obtemos $PF - PF' = e(PD' - PD) = e\,DD'$, ou seja, a excentricidade vezes a distância entre as diretrizes.

Nos dois casos temos que, em valores absolutos, $|PF - PF'| = e\,DD'$, isto é, a diferença entre as distâncias entre o ponto P e os focos é constante, em valores absolutos.

Assíntotas da Hipérbole

Acompanhe ainda a Figura 8. A reta que contém os focos intersecta a hipérbole nos pontos A e A' (estes são os *vértices* da hipérbole). Seja O o ponto médio do segmento $\overline{AA'}$ (o ponto O é o *centro* da hipérbole); sejam B e B_1 os pontos da reta perpendicular ao segmento $\overline{AA'}$, tais que $OB = OB_1 = OF$. As retas a (que contém os pontos O e B) e a' (que contém os pontos O e B_1) são chamadas de *assíntotas* da hipérbole, que têm uma propriedade importante, como veremos a seguir.

Colocamos o eixo x contendo os dois focos, com origem no ponto O e o eixo y perpendicular ao eixo x e contendo a origem O. Nesses eixos, a equação da hipérbole é $(x/a)^2 - (y/b)^2 = 1$; a equação da reta a é $y = (b/a)x$; e a de a' é $y = -(b/a)x$.

Se $y = cx$ for uma reta qualquer, para achar pontos de interseção dessa reta com a hipérbole, basta substituir $y = cx$ na equação da hipérbole, obtendo

$$x = \pm\frac{ab}{b^2 - c^2}.$$

Essa relação somente será válida se $|c| < b$, ou seja, se $|c| \geq b$, a reta $y = cx$ não intersecta a hipérbole e, se $|c| < b$ ela a intersecta. As retas $y = \pm(b/a)x$ separam as retas que passam pela origem e que intersectam a hipérbole daquelas que passam pela origem e não a intersectam.

Exemplo: Vejamos agora que o gráfico da função $f(x) = 1/x$ é uma hipérbole.

Considere, agora, a hipérbole de focos $F = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$ e $F' = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, e diretrizes dadas pelas retas $d\colon x+y = \sqrt{2}$ e $d'\colon x+y = -\sqrt{2}$, e excentricidade $e = \sqrt{2}$ (veja a Figura 9).

Usando o foco F e correspondente diretriz d, vamos obter a equação dessa hipérbole. Para isso, observe que a reta d faz um ângulo de $-45°$, ou $-\pi/4$ em radianos. Portanto, retas perpendiculares a d têm equações do tipo $x - y = c$, e se $P = (x_0, y_0)$ pertencer a essa reta, então $c = x_0 - y_0$. O ponto

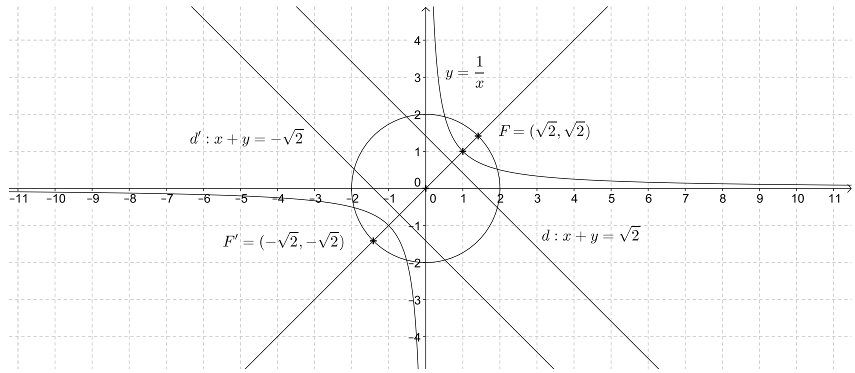

Figura 9: A hipérbolde de equação $xy = 1$, ou seja, o gráfico de $y = 1/x$.

de interseção entre as duas retas pode ser obtido, resolvendo o sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x+y & = & \sqrt{2} \\ x-y & = & c, \end{array} \right.$$

cuja solução é $Q = ((c+\sqrt{2})/2, (-c+\sqrt{2})/2)$ (resolva o sistema). A distância entre o ponto $P = (x_0, y_0)$ e a reta d é a distância entre P e Q, que é

$$PQ = \frac{\sqrt{(x_0 - y_0 + \sqrt{2})^2 + (y_0 - x_0 + \sqrt{2})^2}}{2} = \frac{\sqrt{2x_0^2 + 2y_0^2 - 4x_0y_0 + 4}}{2}.$$

Se P pertencer à hipérbole, então vale a relação $PF = e\,PQ$, ou seja, elevando ao quadrado, $PF^2 = e^2PQ^2$, o que, em coordenadas, produz $x_0y_0 = 1$ (faça as contas). Ou seja, a hipérbole tem por equação $xy = 1$, ou $y = 1/x$. Observe que os eixos x e y são suas assíntotas.

Resumo das Propriedades da Hipérbole: dada a elipse de focos F e F', respectivas diretrizes d e d', excentricidade e, eixo maior $\overline{AA'}$, eixo menor $\overline{BB'}$, e centro O, escrevendo $a = OA$ e $b = OB$ (os tamanhos dos semi-eixos), temos:

1. para cada ponto P da hipérbole, $PF = e\,\mathrm{dist}\,(P, d)$ e $PF' = e\,\mathrm{dist}\,(P, d')$;

2. para cada ponto P da hipérbole, $|PF - PF'| = AA'$;

3. em particular, para o ponto B, $BF = OA = a$;

4. $AA' = e\,\mathrm{dist}\,(d, d')$ e $FF' = e\,AA'$;

5. $e^2 = 1 + (b/a)^2$;

6. para cada ponto P da hipérbole, se X na reta contendo os focos e Y na reta r contendo O e perpendicular a $\overline{FF'}$ forem tais que $\overline{PX} \perp \overline{AA'}$ e $\overline{PY} \perp r$, $x = OX$, $y = OY$, então
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

7. as retas contendo o centro O e os pontos B e B_1 (como descritos acima - veja a Figura 8) são as assíntotas da hipérbole.
