ANÁLISE ESTATÍSTICA DE MEDIDAS EM CIÊNCIAS EXATAS

Vito R. Vanin, Philippe Gouffon, Otaviano Helene

Março 2023

Conteúdo

Apresentação **vii**

1 Conceitos gerais **1**
1.1 Os conceitos de probabilidade e aleatoriedade 1
1.2 Erros estatísticos e erros sistemáticos 6
1.3 Valor verdadeiro de uma grandeza, erro e incerteza 7
1.4 Estatística e o problema da estimação 10
1.5 Função de probabilidade 11
1.6 A função densidade de probabilidade 12
1.7 Função densidade de probabilidade multidimensional 17
1.8 Teoria da probabilidade e estatística 19
1.9 Média, mediana, moda e desvio padrão 20
1.10 Estimativa do valor verdadeiro 23
1.11 Estimativas não-paramétricas 23
Exercicios 26

2 Funções de probabilidade comuns e transformações **31**
2.1 A função de probabilidade binomial 31
2.2 A função de probabilidade de Poisson 36
2.2.1 A Poisson como limite da Binomial 36
2.2.2 A Poisson a partir de principios básicos 39
2.2.3 Soma de eventos com f.p. de Poisson 42
2.3 A f.d.p. normal ou gaussiana 44
2.4 A f.d.p. multinormal 44
2.5 Função característica 49
2.6 A f.d.p. da média de dados gaussianos 50
2.7 Transformação de variável aleatória 52
2.7.1 Correspondência não biunívoca 53

2.7.2 Muitas variáveis 54
2.8 A f.d.p. de χ^2 (qui-quadrado) 55
2.8.1 Caso $N = 1$ 56
2.8.2 Caso $N = 2$ 57
2.8.3 Caso $N = 3$ 57
2.8.4 Caso geral 58
2.9 O desvio-padrão do desvio-padrão 61
2.10 Quando as f.p.s e f.d.p.s. tendem à normal 65
2.10.1 Binomial 65
2.10.2 Poisson 67
2.10.3 Qui-quadrado 67
2.11 A f.d.p. uniforme 68
Exercícios 69

3 Significado e interpretação da variância 73
3.1 Fórmula aproximada para a variância 73
3.2 Covariância – um exemplo 79
3.3 Cálculo de variâncias e covariâncias: formalismo matricial 82
3.4 Qui-quadrado quando as variáveis são correlacionadas 84
3.5 A f.d.p. de t de Student 85
3.6 Intervalos de confiança 89
3.7 Critérios de arredondamento 91
Exercícios 93

4 Inferência estatística e ajuste de parâmetros 99
4.1 O Método da Máxima Verossimilhança 99
4.2 Estimativas da média e do desvio padrão 102
4.3 Correção da tendenciosidade da estimativa da variância 103
4.4 Exemplos de aplicação do Método da Máxima Verossimilhança . 105
4.4.1 Dados normais correlacionados 105
4.4.2 Grandezas distribuídas como Poisson 106
4.5 O Método dos Mínimos Quadrados 107
4.6 Dados normais: equivalência entre Máxima Verossimilhança e Mínimos Quadrados 112
4.7 Propriedades das estimativas dos parâmetros ajustados no exemplo da reta 113
4.8 Funções lineares nos parâmetros e dados estatisticamente independentes, em geral 115

4.9 Desvios padrão das estimativas . . . 117
4.10 Interpretação estatística dos parâmetros ajustados . . . 119
4.10.1 Geral . . . 119
4.10.2 Exemplo da reta . . . 120
4.11 Análise de previsão . . . 121
4.12 Análise de previsão—parâmetros da reta . . . 121
Exercícios . . . 123

5 Inferência estatística e teste de hipótese **129**
5.1 O teste z . . . 130
5.2 O teste t . . . 132
5.3 Erro tipo I e erro tipo II . . . 137
5.4 O teste t na comparação de duas médias . . . 143
5.5 O teste t na comparação de duas médias com variâncias diferentes 144
5.6 Distribuição da razão de variâncias e F de Fisher . . . 146
5.7 Comparação de duas estimativas da variância com o teste F . . . 150
5.8 Teste qualitativo do ajuste de parâmetros . . . 154
5.9 O teste de χ^2 . . . 156
5.9.1 χ^2 "alto" . . . 158
5.9.2 χ^2 "baixo" . . . 160
5.10 Qui-quadrado reduzido . . . 163
Exercícios . . . 164

6 Teoria da probabilidade **171**
6.1 Espaço amostral e evento . . . 171
6.2 Relações entre eventos . . . 174
6.3 Probabilidade – regras e propriedades . . . 176
6.4 Probabilidade condicional . . . 178
6.5 Independência estatística . . . 179
6.6 Variáveis aleatórias . . . 182
6.7 Distribuição cumulativa de probabilidade . . . 184
6.8 Funções de duas variáveis aleatórias, densidades condicional e marginal . . . 185
6.9 Valor esperado de uma variável aleatória . . . 186
6.10 Momentos de uma função densidade de probabilidade . . . 188
6.11 Momentos de funções de várias variáveis . . . 190
6.12 Função geratriz . . . 192
6.13 Soma de variáveis aleatórias . . . 194

6.14 Soma de um número aleatório de variáveis aleatórias 197
6.15 Função característica – cumulantes 200
6.16 O Teorema Central do Limite 204
6.17 Desigualdade de Chebyshev 207
6.18 A lei dos grandes números 209
Exercícios 209

7 Probabilidade e estimação 213
7.1 Algumas definições de probabilidade 214
7.1.1 Eventos Equiprováveis 214
7.1.2 Probabilidade como frequência relativa 216
7.1.3 Probabilidade como grau de confiança ou crença relativa 216
7.2 Teorema de Bayes 217
7.3 Teorema de Bayes: interpretação bayesiana 218
7.4 Procedimento que adotaremos 220
7.5 Estimadores e estimativas 220
7.6 O critério da consistência 223
7.7 O estimador consistente não é único 224
7.8 O critério da não-tendenciosidade 225
7.9 Eficiência 226
7.10 Limite Mínimo de Variância 227
7.11 Limite Mínimo de Variância de θ 230
7.12 Unicidade do estimador de variância mínima 233
7.13 F.d.p.s que permitem estimadores com variância igual ao LMV . 234
7.14 Critério da eficiência 234
7.15 Estatística suficiente 236
Exercícios 237

8 O Método dos Mínimos Quadrados 239
8.1 O modelo linear 240
8.2 Exemplos de ajustes de parâmetros 245
8.2.1 Exemplo A. Determinação do volume específico v a partir da medição de volume e massa de fragmentos 245
8.2.2 Exemplo B. Inclinações de um plano $y_i = a_1 z_i + a_2 x_i$ . . 246
8.2.3 Exemplo C. Coeficientes da reta $y_i = a_1 + a_2 x_i$ 246
8.3 O estimador de mínimos quadrados não é tendencioso no modelo linear 248
8.4 As variâncias das estimativas 249

8.5 Exemplos: variâncias dos parâmetros 250
8.6 Variância mínima no modelo linear 252
8.7 A média como estimativa linear de variância mínima 255
8.8 Estimativas das variâncias 257
8.9 Exemplos: estimativa da variância dos dados 261
8.9.1 Análise de variância — duas variáveis 262
8.10 Variâncias e covariâncias dos resíduos 264
8.11 Generalização do modelo para dados covariantes 265
8.12 Interpretação dos parâmetros ajustados 267
8.12.1 f.d.p. dos dados normal 267
8.12.2 f.d.p. dos dados não normal 267
8.12.3 f.d.p. dos dados não normal e desconhecida e poucos dados 268
8.13 Teste de χ^2 268
8.14 A inversão de $\mathbf{X}^t\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}$ na prática 269
8.15 Exemplo: dados correlacionados 270
8.16 Média de dois dados correlacionados 273
8.17 A medida de uma grandeza pode alterar as estimativas de outras grandezas com as quais é covariante 275
8.18 Exemplo: vínculos entre parâmetros 277
8.19 Vínculo a priori ou a posteriori 283
Exercícios 285

9 Propriedades do estimador de Máxima Verossimilhança 291
9.1 A função verossimilhança no limite assintótico – um exemplo . . 292
9.2 Consistência do estimador de Máxima Verossimilhança 295
9.3 Tendência à normalidade da estimativa de Máxima Verossimilhança 298
9.4 Eficiência assintótica 300
9.5 Ajuste simultâneo de vários parâmetros 301
9.6 Dados com distribuição normal 304
9.6.1 O método de Gauss 305
9.6.2 O método de Gauss-Marquardt 307
9.7 Simulação do ajuste de parâmetros não lineares 309
9.7.1 Uma situação confortável 309
9.7.2 Uma situação limite 311
9.7.3 Discussão 313
9.8 Estimativa dos intervalos de confiança 314
Exercícios 317

Bibliografia **319**

A Tabelas diversas **323**

B Deducao da Poisson **347**
B.0.1 Outra dedução da Poisson 347

Índice Remissivo **349**

Apresentação

A origem deste livro encontra-se na disciplina *Tópicos Avançados em Tratamento Estatístico de Dados em Física Experimental*, do curso de pós-graduação do Instituto de Física da Universidade de São Paulo, oferecida desde 1989. Pós-graduandos de outras unidades da USP e de outras instituições também têm cursado essa disciplina, que tem a duração de um semestre com uma carga horária de 6 horas semanais, suficiente para explorar a totalidade do conteúdo que o texto abrange.

O livro foi escrito por físicos experimentais, como transparece em muitos dos exemplos e exercícios, mas foi elaborado de forma a servir aos pesquisadores experimentais de outras áreas, uma vez que não se supõe nenhum conhecimento específico de Física para sua leitura.

Embora o tratamento estatístico de dados seja bastante comum em diversas ciências experimentais, suas bases teóricas, as propriedades dos principais métodos de análise e suas limitações só são encontradas em livros avançados de Estatística, onde aparecem também diversos outros desenvolvimentos mais elaborados que o necessário na maior parte das situações práticas. Assim, neste livro procurou-se organizar o conhecimento necessário para o correto e completo tratamento estatístico de dados, aí incluídas as bases teóricas e as demonstrações mais importantes para um entendimento amplo do assunto, mas sem a intenção nem a pretensão de esgotá-lo. Espera-se, desta forma, contribuir para que os pesquisadores possam explorar mais e melhor as informações contidas em seus resultados experimentais.

O livro é rigoroso nas demonstrações, em particular das propriedades que fundamentam o Método dos Mínimos Quadrados e permitem a sua aplicação prática ao ajuste de parâmetros lineares, independentemente da distribuição de probabilidade dos dados, e de parâmetros não-lineares a dados normais, caso em que as propriedades ótimas decorrem do Método da Máxima Verossimilhança. Aliás, é esse último método que deve ser usado para o ajuste de parâmetros não lineares a dados não normais, como apresentaremos em detalhe. Quando necessário, há indicações de outros textos que complementam alguns assuntos tratados mais superficialmente. Procurou-se ser minucioso na notação, mas, quando o contexto em que um assunto é apresentado o permite, ela foi simplificada.

Os primeiros cinco capítulos do livro cobrem tópicos que são usados em laboratórios didáticos dos cursos de graduação em ciências exatas e engenharias, provavelmente de maneira mais abrangente. Nesses capítulos, a teoria da probabilidade é tratada de modo bastante intuitivo, ficando para os capítulos 6 e 7 formalizar as teorias da probabilidade e da estatística. Fizemos essa aparente inversão de ordem porque constatamos que a aplicação dos métodos de análise de dados suscita questões acerca do significado de probabilidade, de modo que os estudantes ficam muito mais motivados para o estudo dessa teoria que, no início do curso, parece não dar resposta a nada. Finalmente, nos capítulos 8 e 9 apresentam-se os métodos de Mínimos Quadrados e da Máxima verossimilhança da maneira que vimos usando em nossa vida profissional.

Capítulo 1

Conceitos gerais

A idéia básica no tratamento estatístico de dados, especialmente no contexto das ciências experimentais, é que os erros intervenientes no processo de medida são aleatórios, mas podem ser descritos por funções muito bem definidas, as *funções de probabilidade*.

Os conceitos que reveremos inicialmente são: probabilidade; aleatoriedade; erros estatísticos e erros sistemáticos; incerteza; o significado do *valor verdadeiro* de uma grandeza; estimativa da grandeza, incerteza associada à estimativa; o que é uma *estatística*; o procedimento geral da *estimação*; o que é uma **f**unção **d**ensidade de **p**robabilidade (f.d.p.); como podem ser tratadas grandezas que não têm um valor verdadeiro; distinção entre a Estatística e a Teoria da Probabilidade. Em seguida, lidaremos com a situação em que busca-se estimar uma grandeza que tem um valor verdadeiro por meio de um experimento de observação direta da grandeza — definiremos média, mediana, desvio padrão de um conjunto de dados e faremos estimativas paramétrica e não-paramétrica do valor verdadeiro da grandeza e do intervalo de confiança.

1.1 Os conceitos de probabilidade e aleatoriedade

Na medição experimental de uma grandeza, é muito comum que observações distintas forneçam resultados diferentes, embora a grandeza tenha um valor bem definido e constante durante o experimento. A figura 1.1, obtida do artigo [Helene 91], apresenta os valores de 87 observações do comprimento de uma barra de Alumínio por um grupo de 87 estudantes, cada um com uma régua escolar diferente. As leituras foram efetuadas subdividindo-se o milímetro em 3 partes iguais. A variação no valor do dado obtido é devida a flutuações incontroláveis do processo de medida, desde a fabricação do instrumento até o procedimento adotado na leitura do valor. A essas variações incontroláveis damos o nome de flutuação estatística e procuraremos, neste livro, extrair o máximo de informação contida nos dados obtidos exatamente nessa situação.

Quando a observação de uma grandeza está sujeita à flutuação estatística, não há nenhuma maneira de antecipar o valor do resultado. No entanto, podemos falar da *probabilidade* de obter um dado em uma certa faixa, dependente do valor da grandeza e da incerteza experimental. A fim de trazer elementos concretos para a definição de probabilidade, vamos construir um exemplo em que a *variável aleatória* é uma variável discreta.

Uma maneira de metalizar polietileno consiste em evaporar uma pequena quantidade do metal sobre uma folha do plástico. Neste exemplo, suporemos que os átomos formam pilhas da maneira mostrada na figura 1.2, que esquematiza o arranjo. As perguntas que desejamos responder, ao fim do exemplo, são "que fração da área da folha está recoberta por um átomo? por dois? ...? por nenhum?" Começamos a atacar o problema pela construção do histograma do número de átomos empilhados na pequena região da folha, que está representada de forma muito ampliada na figura 1.2. Vamos supor que a área da folha ocupada por cada pilha seja b^2, em que b é, aproximadamente, o diâmetro dos átomos do metal. A figura 1.3 exibe esse histograma.

Não é possível saber previamente quantos átomos vão ficar grudados numa determinada área b^2 da folha. Olhando para o histograma da figura 1.3 (ou para a figura 1.2) avaliamos que 1 ou 2 são mais *prováveis*, sendo que a *probabilidade* da área ficar descoberta ou ser recoberta por 4 ou 5 átomos é pequena. Da prática de realizar experimentos sabemos que a conclusão acima, a partir de tão poucos dados, é bastante arriscada. Normalmente, preferiríamos tomar mais dados para confirmar que a distribuição tem a aparência do histograma da figura 1.3 antes de avançar uma conclusão.

Embora o conceito de probabilidade seja central no tratamento estatístico de dados, não existe uma definição matemática adequada a todas as situações. Assim, apresentaremos aqui uma definição formal que se aplica a muitos casos e retornaremos ao assunto no capítulo 6.

Vamos chamar de N o número total de regiões observadas ($N = 15$ na figura 1.2) e de n, o número de ocorrências de um tipo definido, por exemplo, $n = 5$ é o número de regiões de área b^2 da folha revestidas por 2 átomos.

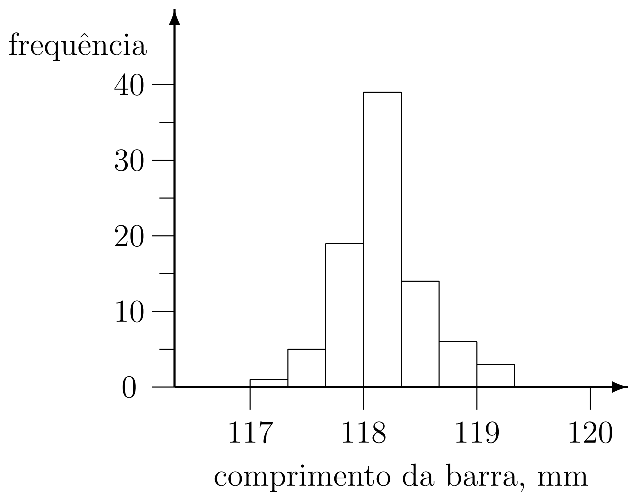

Figura 1.1: Histograma dos 87 valores obtidos para o comprimento da barra de Alumínio. A ordenada representa o número de vezes que o valor da abscissa foi observado [Helene 91].

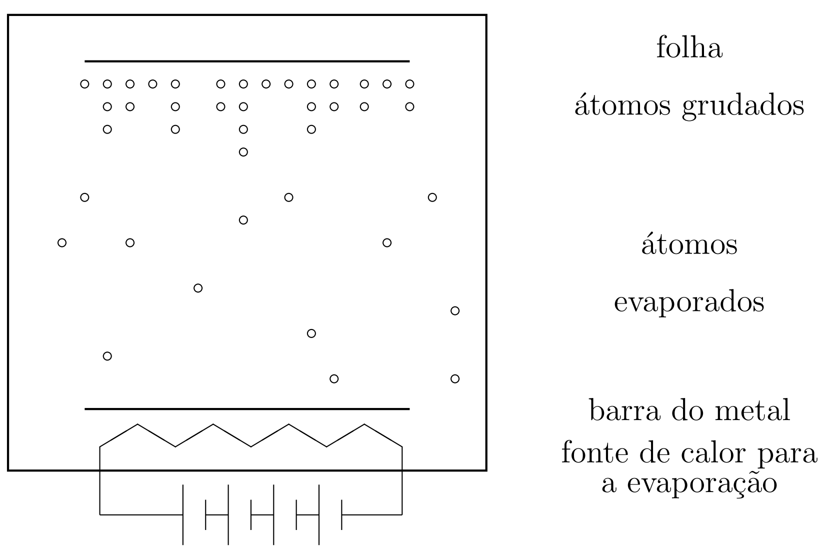

Figura 1.2: Esboço do dispositivo usado para metalizar um material. Faz-se vácuo na câmara para facilitar o trânsito dos átomos da barra de metal até a folha.

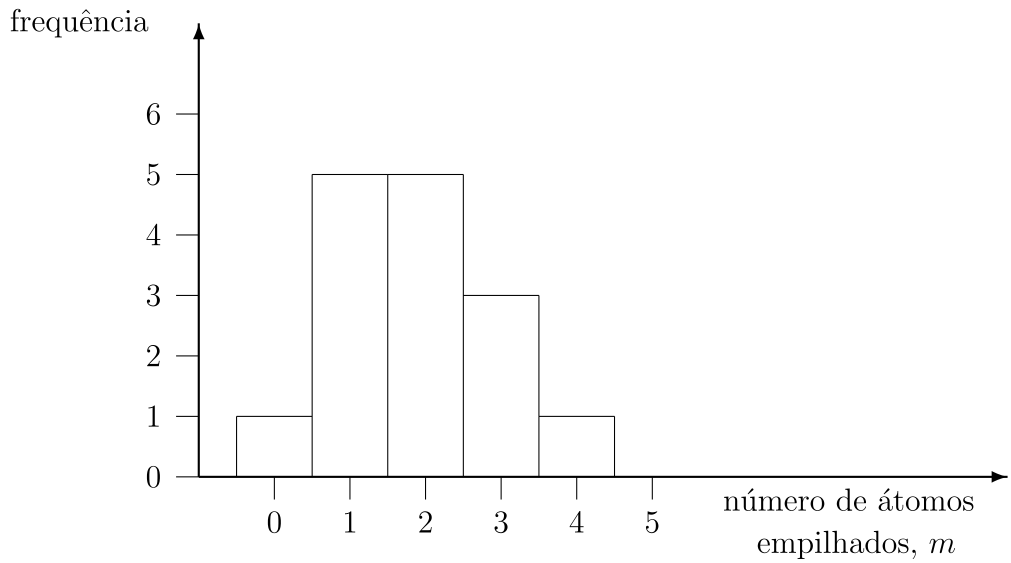

Figura 1.3: Histograma do número de átomos empilhados sobre uma área b^2 da folha. Corresponde ao que se vê na figura 1.2.

Usaremos como definição da probabilidade p de uma certa área b^2 ser recoberta por 2 átomos o limite da razão n/N quando o número total de regiões N vai a infinito,

$$p = \lim_{N \to \infty} \frac{n}{N} \quad . \tag{1.1}$$

Assim, probabilidade é a frequência relativa de ocorrência do evento em questão, quando o número de eventos observados é suficientemente grande para que a flutuação estatística de n seja, em termos relativos, pequena. Da figura 1.3, verificamos que, em 15 regiões, observou-se apenas uma "casa" de área b^2 vazia — se vimos somente uma, poderíamos muito bem não ter visto nenhuma, então dizer que a probabilidade é $1/15$ parece uma afirmação grosseira. Porém, se em 1500000 de eventos víssemos 75000 casas vazias, afirmaríamos, com muita convicção, que a probabilidade de uma casa ficar vazia é bem próxima de $75000/1500000 = 1/20$; uma probabilidade como essa nos diz que a chance de encontrar vazia uma das casas nas 15 observações efetuadas para construir o histograma da figura 1.3 é bastante grande, mas a chance de encontrar a casa vazia na observação de uma única casa é pequena.

Note que o limite na definição de probabilidade da equação (1.1) é necessário, mas nem toda grandeza cuja frequência relativa tem um limite é uma probabilidade. É imprescindível que o evento seja aleatório, portanto, resulte de fatores incontroláveis pelo observador. Vamos dar um exemplo que está detalhado no livro clássico de von Mises [Mises].

Imagine que todas as estradas que ligam as cidades tenham marcos de quilometragem de 1 em 1 km. A frequência relativa com que observaríamos o dígito 2 na última casa tenderia, rápida e precisamente, para o valor 1/10. No entanto, esse número "2" não está distribuído ao acaso nas estradas. Se selecionássemos as observações com o critério *o último dígito que observamos nas placas que seguem às placas de quilometragem indicando um número de km múltiplo de 10*, descobriríamos que a frequência do dígito 2 seria exatamente nula! Já se selecionássemos as placas seguintes àquelas que tem o último dígito 1, concluiríamos que a frequência do dígito 2 é 100%.[1]

Assim, a interpretação frequencista da probabilidade só tem sentido quando aplicada a eventos aleatórios, para os quais **qualquer seleção aplicada aos eventos observados** (exceto, é claro, utilizando-se critérios de incluir ou excluir o próprio dado em questão) **não altera o resultado**. Por exemplo, o histograma do número de átomos empilhados que estão ao lado esquerdo de uma casa onde há dois átomos continua tendo a mesma aparência geral daquele da figura 1.3 se o processo é aleatório, ou seja, o fato de haver dois átomos à direita não implica em qualquer mudança na probabilidade daquela casa ter nenhum ou 1, 2, 3, ..., n átomos. O conceito de aleatório contrapõe-se ao de determinado — não pode haver qualquer regra que permita certeza acerca do resultado.

A generalização da fórmula (1.1) a qualquer evento aleatório bem caracterizado é a definição frequencista de probabilidade e é suficiente para muitos dos nossos propósitos, mas necessitaremos de outras definições, que serão apresentadas à medida que forem necessárias. O que usaremos adiante dessa definição corresponde principalmente às suas consequências: jamais chegaremos a conhecer o valor exato de qualquer probabilidade, em função da impossibilidade de observar-se uma infinidade de eventos, por mais simples que ele seja; estimaremos as probabilidades pela razão n/N e, finalmente, se avaliamos (a partir de outras informações) que a probabilidade de observarmos um certo evento i é p_i, estimamos o número esperado de eventos i em N observações como Np_i. Além disso, a expressão (1.1) mostra que a probabilidade é uma

[1] Apesar do dígito da placa não ser aleatório, é possível tornar o número lido aleatório usando uma amostragem ao acaso. Por exemplo, se registrarmos a primeira placa encontrada a cada hora, com a velocidade do carro variando aleatoriamente, o número lido terá uma distribuição "uniforme".

grandeza definida positiva ou nula,

$$p_i \geq 0 \ , \ \forall i \in \Omega \tag{1.2}$$

e a soma das probabilidades de todos os eventos possíveis é 1,

$$\sum_{i \in \Omega} p_i = 1 \quad , \tag{1.3}$$

onde Ω é o conjunto de todos os eventos possíveis, chamado *espaço amostral*. Embora a definição 1.1 possa não se aplicar em todos os casos, essas duas últimas propriedades, relações 1.2 e 1.3, são válidas para *todas* as definições de probabilidade.

1.2 Erros estatísticos e erros sistemáticos

Erros estatísticos são aqueles causados por variações incontroláveis e aleatórias no processo de medida, o que inclui o sistema de medida e as grandezas intervenientes nos processos. Devemos incluir os instrumentos usados diretamente bem como aqueles que participam indiretamente da medição e não só os processos que controlamos, mas também os incontroláveis. Como exemplos de interferências indiretas e frequentemente impossíveis de controlar, podemos citar a tensão da rede de alimentação dos aparelhos elétricos e eletrônicos, que pode interferir no funcionamento dos instrumentos, e a umidade do ar, que pode alterar as características físicas dos materiais. Como é o caráter aleatório da parcela de erro introduzida por uma fonte que a qualifica como uma fonte de erro estatístico, as mesmas causas de erro podem ter consequência diferente; assim, retomando o exemplo da umidade do ar, ela pode causar um erro sistemático em medições efetuadas sempre ao meio-dia, quando o ar está quase sempre mais seco que à noite.

Já um *erro sistemático* está relacionado a deficiências no ajuste ou calibração dos equipamentos ou a limitações nos procedimentos de medida e análise dos dados. Pode ser devido, ainda, a ignorar algum processo interveniente que provoque alterações relevantes na medida. **O caráter não aleatório da parcela de erro introduzida por uma fonte na medida específica é que a qualifica como uma fonte de erro sistemático**. Erros sistemáticos podem ser introduzidos por métodos de análise inadequados, como por exemplo critérios de seleção tendenciosos, ou por modelos teóricos incompletos, por exemplo, medir a aceleração da gravidade g por queda livre ignorando a resistência do ar.

Muitos dos erros usualmente considerados como sistemáticos podem ser descritos estatisticamente. Por exemplo, uma régua, usada diversas vezes, fornece resultados com erros causados pelos desvios da calibração da escala — todas as medidas realizadas com aquela régua estarão afetadas pelo mesmo problema. Esse efeito, comum a todas medidas feitas com o mesmo instrumento, quando tem origem em uma variação aleatória, é caracterizado melhor como *covariâncias* entre os dados, assunto que discutiremos ao longo deste texto. Também alguns erros sistemáticos provenientes dos métodos de análise estatística (infelizmente, em muitas situações de interesse, as análises que fazemos produzem resultados tendenciosos...) podem ser contornados dentro da Estatística e serão objeto deste texto. Como regra geral, porém, devemos procurar escolher processos de medição que permitam uma análise estatística livre de erros sistemáticos ou que forneçam erros sistemáticos muito menores que os inevitáveis erros estatísticos.

1.3 Valor verdadeiro de uma grandeza, erro e incerteza

Quando o valor de uma grandeza não varia ou sua variação é pequena comparada aos erros estatísticos presentes na sua observação, dizemos que a grandeza possui um *valor verdadeiro.* Por exemplo, a carga de um elétron tem sempre o mesmo valor. Em casos como este, é mais fácil formalizar os conceitos de erro e incerteza.

Suponhamos uma grandeza que possua um valor verdadeiro x_0 e que possamos observar em um processo de medida que forneça valores x_i, com $x_i \cong x_0$. Nesse caso, *erro* ϵ_i é a diferença entre o dado particular e o valor verdadeiro,

$$x_i = x_0 + \epsilon_i \quad . \tag{1.4}$$

Veja que o erro associado a um dado jamais será conhecido, porque conhecê-lo corresponderia a conhecer o valor verdadeiro: bastaria calcular x_0 a partir da equação acima. No entanto, podemos saber o seu valor médio,

$$< \epsilon_i > \quad ,$$

e o seu valor quadrático médio, a que se dá o nome de *variância,* simbolizado por σ_0^2,

$$\sigma_0^2 =< \epsilon_i^2 > \quad , \tag{1.5}$$

onde o símbolo $< \alpha >$ significa o valor médio da grandeza α quando tomamos uma infinidade de dados.

Ao valor médio do erro se associa a idéia de erro sistemático. Assim, a ocorrência de erro sistemático faz com que o valor médio do erro seja não nulo,

$$< \epsilon_i > \neq 0 \quad , \tag{1.6}$$

quando dizemos que há erro sistemático na medida. Já se

$$< \epsilon_i >= 0 \quad , \tag{1.7}$$

dizemos que não há erro sistemático.

A idéia de *incerteza* é associada à raiz quadrada da variância, que tem o nome de *desvio padrão*, e que é simplesmente a raiz quadrada do erro quadrático médio,

$$\sigma_0 = \sqrt{\sigma_0^2} = \sqrt{< \epsilon^2 >} \quad . \tag{1.8}$$

Ao contrário do *erro*, o desvio padrão pode ser estimado, ou seja, acreditamos que a incerteza possa ser estimada.

> Na prática, é demais exigir que o valor médio do erro seja nulo para considerar a medida isenta de erro sistemático; basta que seu valor médio seja bem menor que o desvio padrão *do resultado final.* No caso particular da medida direta de uma grandeza, onde a melhor estimativa da grandeza é a média e o desvio padrão da média é $\sigma_{m_0} = \sigma_0/\sqrt{N}$, o erro sistemático pode ser ignorado quando
>
> $$< \epsilon_i > \ll \sigma_0/\sqrt{N} \quad .$$

Simplificando um pouco, podemos dizer que metade deste texto será dedicada a explicar como estimar o valor verdadeiro e a outra metade, dedicada a estimar a incerteza. Juntando a incerteza à estimativa do valor verdadeiro, poderemos determinar *intervalos de confiança*, que são intervalos que têm uma probabilidade definida de conter o valor verdadeiro — o máximo que é possível obter de uma medida. Nessa visão simplificada é preciso incluir os *testes de hipótese*, que estarão subjacentes nas discussões que efetuaremos — os métodos estatísticos sempre devem permitir usar as estimativas obtidas para testar uma hipótese objetiva acerca da grandeza medida.

Podemos agora voltar à questão do erro sistemático. Calculando o valor médio do dado experimental a partir da fórmula (1.4), obtemos

$$< x_i >=< x_0 + \epsilon_i >=< x_0 > + < \epsilon_i >= x_0 + < \epsilon_i > \quad ,$$

onde usamos os fatos que a média de uma soma é a soma das médias e que a média de uma constante é seu próprio valor. Conforme a equação (1.6), dizemos que há erro sistemático quando $< \epsilon_i > \neq 0$, ou seja, obtemos dados que em média diferem do valor verdadeiro. Note, porém, a dificuldade prática — não há como saber que houve erro sistemático, porque é impossível conhecer o valor verdadeiro.

Até aqui discutimos casos em que a grandeza medida tem um valor exato, verdadeiro. Já o tratamento dos dados referentes às grandezas que variam mais do que a incerteza de medida apresenta outras dificuldades conceituais. Por exemplo, a energia cinética de uma molécula em um gás não tem um valor verdadeiro, porque ela varia com o tempo, pelas colisões com as outras moléculas. Entretanto, há uma probabilidade definida da energia cinética estar numa certa faixa e essa *função de probabilidade* depende de uns poucos parâmetros que, eles sim, possuem valores bem definidos que podem ser determinados. O problema termina por recair, então, na determinação de *valores verdadeiros* desses parâmetros, como a temperatura do gás, diretamente proporcional à energia média das moléculas neste exemplo. Note também que a discussão sobre erro estatístico da seção anterior estava incompleta, porque há situações em que é preciso misturar aquela idéia com essa variação estatística intrínseca da grandeza.

Outro exemplo em que tanto a grandeza quanto a observação podem estar sujeitas a flutuações estatísticas corresponde ao da medida da vazão de um fluido. Se a vazão é inconstante, talvez pelo fluxo ser turbulento, e o aparelho tem boa precisão, a flutuação dos dados obtidos reflete principalmente a flutuação da vazão. Noutro extremo, quando a vazão é constante, a flutuação dos dados reflete as limitações do instrumento de medida. No caso intermediário, quando os desvios padrão da vazão e de medida pelo aparelho são comparáveis, os dados têm uma função de probabilidade que corresponde à convolução das funções de probabilidade da vazão e da observação pelo instrumento.

1.4 Estatística e o problema da estimação

Neste texto, procuramos definir os seguintes termos: um *dado*, por exempo x_2, é o resultado de uma única observação da grandeza e *medida* é um conjunto de dados, por exemplo $\{x_i, i = 1, 2, \ldots, N$ com $N \in \mathbf{N}^*\}$. A medida da grandeza pode ser apresentada em forma *reduzida*, por exemplo, por meio de um valor ajustado e seu desvio padrão.

> Veremos adiante que, se a função de probabilidade que governa a medida é gaussiana, a média e o desvio padrão da média resumem toda a informação contida em $\{x_i\}$, quando o número de dados, N, é grande.

Estatística é um substantivo que tem alguns significados distintos, embora relacionados. Um deles corresponde ao nome da ciência que procura extrair informações objetivas de experimentos a partir de estimativas de parâmetros e grandezas relacionadas aos dados. Outro é uma definicção: *estatística* é uma função dos dados. Por exemplo, se $\{x_i, i = 1, \ldots, N\}$ é uma medida de uma grandeza que tem um valor verdadeiro, x_0, podemos, muitas vezes, estimar x_0 por meio da *estatística* $\bar{x}$, que é a função

$$\bar{x} = \frac{x_1}{N} + \frac{x_2}{N} + \cdots + \frac{x_N}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \quad , \tag{1.9}$$

conhecida como *média*. Uma estatística depende *apenas* dos dados e, eventualmente, de parâmetros conhecidos, no sentido de não estarem sujeitos a variações aleatórias. Explicando essa definição de outra maneira, uma estatística é uma função que tem os dados da medida como únicas variáveis aleatórias. A dispersão dos dados experimentais — que mede essencialmente a precisão do arranjo experimental — pode ser estimada por outra estatística,

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2 \quad , \tag{1.10}$$

que é a estimativa da variância; o denominador $N - 1$, no lugar do intuitivo N, é convencional e será explicado na seção 4.3. Também é usual descrever-se a precisão dos dados tomados em um experimento pelo *desvio padrão* σ, a raiz quadrada da variância, chamada também de *desvio padrão da série.*

Da estimativa da variância ou do desvio padrão da série extrai-se o *desvio padrão da média*, σ_m,

$$\sigma_m = \sigma/\sqrt{N} \quad , \tag{1.11}$$

que é outra estatística. Assim, o problema geral da *estimação* de uma grandeza corresponderá à busca de uma estatística que a represente. Nosso estudo se concentrará em descobrir as propriedades dessas estatísticas e estudaremos alguns métodos padronizados de obtê-las que se aplicam a muitos casos. Chamamos esses métodos de *estimadores*.

Devemos fazer aqui uma observação sobre notação. Na seção 1.3, representamos por x_0 e σ_0 os valores verdadeiros e desconhecidos de uma grandeza e do desvio padrão dos dados da medida. Nesta seção, usamos as notações $\bar{x}$ e σ para as estimativas daquelas mesmas grandezas. Sempre que necessário, usaremos um sub-índice "0" para representar os valores verdadeiros. Quanto às estimativas, adotaremos as notações usuais em física experimental ($\bar{x}$, σ) ou as denotaremos pela inclusão de um til ou um acento circunflexo sobre a letra que a representa (por exemplo, $\tilde{x}$, $\tilde{\sigma}$ ou $\hat{x}$, $\hat{\sigma}$).

1.5 Função de probabilidade

Os assuntos desta e das próximas duas seções estão detalhados no capítulo 6. Aqui, apresentamos apenas o suficiente para a compreensão da primeira parte do texto, que forma a base para o material dos últimos capítulos.

Adotaremos sempre a hipótese de que as variáveis aleatórias com que lidamos obedecem regras fixas, que se consubstanciam em *funções de probabilidade* no caso de variáveis discretas, tais como a função de probabilidade da seção 1.1 — naquele caso, a função de probabilidade $P(m)$ dava diretamente a *probabilidade* de encontrar-se m átomos grudados numa região b^2 da folha.

Assim, conforme as equações (1.2) e (1.3), em geral, a função de probabilidade é uma grandeza semi definida positiva, ou seja

$$P(m) \geq 0\,,\ \forall m \in \Omega \quad , \tag{1.12}$$

e *normalizada*, no sentido que

$$\sum_{m \in \Omega} P(m) = 1 \quad , \tag{1.13}$$

onde Ω é o *espaço amostral*, ou seja, o conjunto de todos os valores m possíveis de serem observados. Para determinar-se quantas vezes um certo m é mais provável de ser observado que m', calcula-se a razão

$$\frac{P(m)}{P(m')} \quad . \tag{1.14}$$

Se $P(m)$ é a probabilidade de se observar m eventos em um experimento, então

$$m_0 = \sum_{m \in \Omega} m P(m)$$

é o *valor esperado* de m. O segundo momento pode ser calculado por

$$\mu_2' = \sum_{m \in \Omega} m^2 P(m) \quad ,$$

e a variância por

$$\sigma_0^2 = \sum_{m \in \Omega} (m - m_0)^2 P(m) \quad .$$

O valor esperado de uma função é calculado como

$$< t(m) >= \sum_{m \in \Omega} t(m) P(m) \quad .$$

1.6 A função densidade de probabilidade

Se a variável é contínua, o que é muito comum nas ciências experimentais, vamos precisar de uma função *densidade*, portanto com dimensão física, para descrever as probabilidades de observar os diferentes valores. Define-se então a *função densidade de probabilidade* $f(x)$ por meio da propriedade

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)\, dx \quad , \tag{1.15}$$

onde $P(a \leq x \leq b)$ representa a probabilidade de obter-se um dado no intervalo $[a, b]$. Como a probabilidade é uma grandeza definida positiva ou nula, deduz-se que

$$f(x) \geq 0, \forall x \in \Omega \quad , \tag{1.16}$$

onde Ω é o espaço amostral, agora uma partição dos números reais, um conjunto não enumerável. Convenciona-se definir a probabilidade de observar-se um evento qualquer como 1, ou seja, a *certeza* de um resultado é considerada como probabilidade 1, o que fornece

$$\int_\Omega f(x)\, dx = 1 \qquad . \tag{1.17}$$

Essas duas últimas propriedades são manifestações das propriedades gerais das probabilidades dadas pelas relações (1.2) e (1.3). Da definição (1.15) e do fato da probabilidade ser uma grandeza adimensional, resulta que a f.d.p. (**f**unção **d**ensidade de **p**robabilidade) *tem mesma dimensão* que $1/x$.

Note também que a função pontilhada desenhada na figura 1.7 é $Nf(x)\Delta x$ com $\Delta x = 1$, de modo que a sua integral em um certo intervalo dá o número provável de dados a serem obtidos nesse intervalo.

Exemplo 1.1

Considere a função densidade de probabilidade

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma_0^2}\right)$$

com x variando entre $-\infty$ e $+\infty$, representada na figura 1.4. Essa função é centrada em x_0 e tem uma semi-largura medida a 0,607 de sua altura máxima igual a σ_0.

Verificar que ela é normalizada, ou seja, obedece à equação (1.17), exige um cálculo com algumas etapas. Primeiro, faz-se a mudança de variável $y = (x - x_0)/\sigma_0$, que define uma variável adimensional. O espaço amostral infinito da variável x dá limites de integração para y que são $-\infty$ e $+\infty$. Com essa substituição, obtemos

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma_0^2}\right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy \quad .$$

Para calcular essa integral, podemos escrever

$$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \ \exp\left((-\frac{y^2}{2}\right) dy \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \ \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz$$

ou, ainda,

$$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{y^2+z^2}{2}\right) dy\, dz \quad .$$

As integrais em y e z são independentes, de modo que um plano cartesiano ortogonal yOz cobre todos os valores possíveis das variáveis aleatórias. Podemos proceder a uma mudança das coordenadas cartesianas y e z

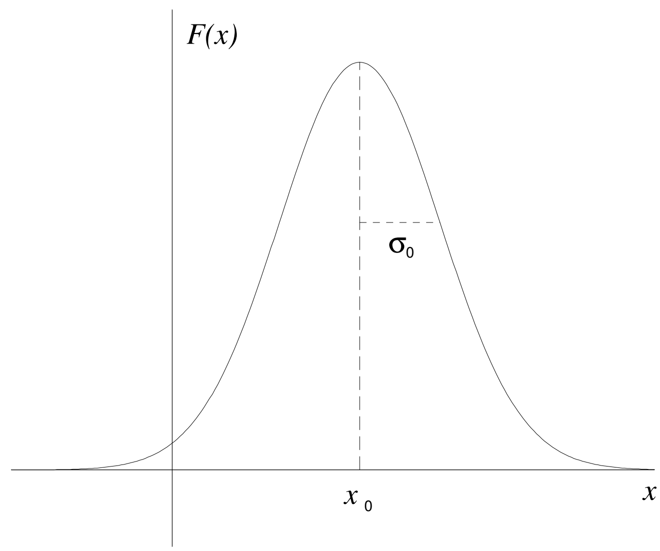

Figura 1.4: Função densidade de probabilidade gaussiana de média x_0 e variância σ_0^2 em função da variável aleatória x.

para as coordenadas polares r e θ, com $y = r\cos\theta$ e $z = r\sin\theta$. Escrevendo o elemento de área $dy\,dz$ como $r\,dr\,d\theta$, temos

$$I^2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) r\,dr\,d\theta \quad .$$

Integrando por partes, obtemos $I^2 = 1$. Como I é positivo, temos finalmente $I = 1$.

Uma complicação aparece quando tenta-se verificar a probabilidade relativa entre dois valores de x distintos, x_1 e x_2. É imediato que

$$P(x = x_1) = P(x = x_2) = 0 \quad ,$$

já que há infinitos valores possíveis de x. Se consideramos um intervalo Δx pequeno, mas finito, podemos estimar

$$P(x_1 \leq x \leq x_1 + \Delta x) = \int_{x_1}^{x_1+\Delta x} f(x)dx \cong f(x_1)\Delta x \quad .$$

Assim, podemos comparar

$$\frac{P(x_1 \leq x \leq x_1 + \Delta x)}{P(x_2 \leq x \leq x_2 + \Delta x)} \cong \frac{f(x_1)\Delta x}{f(x_2)\Delta x} = \frac{f(x_1)}{f(x_2)} \quad , \tag{1.18}$$

independente de Δx, portanto.

A partir da f.d.p. podem ser deduzidas diversas grandezas. Por enquanto, nos limitaremos a definir a média, x_0,

$$x_0 = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx \quad , \tag{1.19}$$

o segundo momento, μ_2', que é a média de x^2,

$$\mu_2' = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx \tag{1.20}$$

e a variância, σ^2, que é a média quadrática dos desvios,

$$\sigma_0^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - x_0)^2 f(x)dx \quad . \tag{1.21}$$

A rigor, nas expressões (1.19) a (1.21), deveríamos integrar em Ω ao invés de $]-\infty, \infty[$. Na prática, esta questão é resolvida definindo $f(x) = 0$ para $x \notin \Omega$.

A notação $< t >$ é usada para o valor médio da função $t(x)$ calculado usando a f.d.p. como peso,

$$< t(x) > = \int_{-\infty}^{\infty} t(x) f(x) dx \quad . \tag{1.22}$$

As definições anteriores podem ser reescritas

$$x_0 = < x > \quad ,$$

$$\mu_2' = < x^2 > \quad \text{e}$$

$$\sigma_0^2 = < (x - x_0)^2 > \quad .$$

Q1.1 *Mostre que*

$$< (x - x_0)^2 > = < x^2 > - x_0^2 \quad . \tag{1.23}$$

Em geral, as propriedades das estatísticas aplicadas a uma medição específica estão ligadas à f.d.p. dos dados. Na abordagem *paramétrica*[2] que estamos discutindo, é necessário conhecer ao menos a forma da f.d.p. para definir o comportamento das estimativas obtidas. Por exemplo, se a f.d.p. dos dados de uma medida $\{x_i, i = 1, 2, \ldots N\}$ de uma grandeza de valor verdadeiro x_0 é gaussiana centrada em x_0 com desvio padrão σ_0, então a média do conjunto dos dados, $\bar{x}$, tem f.d.p. gaussiana de média x_0 e desvio padrão $\sigma_{m_0} = \sigma_0/\sqrt{N}$, conforme demonstraremos na seção 2.6; além disso, o par de valores $\bar{x}$ e σ_{m_0} resume toda a informação contida no conjunto de dados originais. A dificuldade habitual vem do desconhecimento de σ_0, sendo muitas vezes necessário estimar-se $\sigma_0 \cong \sigma$ (eq. (1.10)) e aí a propriedade apresentada na frase anterior vale apenas como aproximação. Veremos nos próximos capítulos, porém, que o problema da análise estatística de uma medida com dados que seguem a f.d.p. gaussiana tem uma solução completa e exata.

[2]Esse nome provém da descrição das propriedades estatísticas da medida por parâmetros calculados dos dados, no caso a média e o desvio-padrão.

1.7 Função densidade de probabilidade multidimensional

Nas seções anteriores, discutimos alguns aspectos de funções de probabilidade e densidade de probabilidade de uma única variável. Quando existe mais do que uma variável aleatória, necessitamos de uma função que represente a densidade de probabilidade conjunta de todas as variáveis.

Se x e y representam duas grandezas, então representamos sua f.d.p. conjunta como $f(x, y)$. Analogamente à equação (1.15), podemos escrever a probabilidade de que x pertença ao intervalo $[a_x, b_x]$ e y ao intervalo $[a_y, b_y]$ como

$$p(a_x \leq x \leq b_x, a_y \leq y \leq b_y) = \int_{a_y}^{b_y} \int_{a_x}^{b_x} f(x, y)\, dx\, dy \quad . \tag{1.24}$$

Como em (1.16), $f(x, y) \geq 0$ e, como em (1.17),

$$\int \int_{\Omega} f(x, y)\, dx\, dy = 1 \quad . \tag{1.25}$$

Apesar de existirem duas (ou mais) variáveis, podemos estar interessados na f.d.p. de apenas uma delas, independentemente do valor que a outra possa assumir. Nesse caso, a f.d.p. da única variável de interesse, digamos x, pode ser determinada por

$$f_x(x) = \int_{\Omega_y} f(x, y) dy \quad , \tag{1.26}$$

onde Ω_y é o espaço amostral de y.

Q1.2 *Demonstre o resultado acima usando a equação (1.24) e a definição*

$$f_x(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x_1 \leq x \leq x_1 + \Delta x,\ \text{qualquer } y)}{\Delta x} \quad .$$

A função densidade de probabilidade de x independentemente do valor que y assuma, $f_x(x)$ (1.26), é chamada de *função densidade de probabilidade marginal de x*.

A expressão análoga à equação (1.26) para $f_y(y)$ é

$$f_y(y) = \int_{\Omega_x} f(x, y) dx \quad , \tag{1.27}$$

onde Ω_x representa o espaço amostral de x. De forma análoga à fórmula (1.19), podemos calcular

$$x_0 = \int_{\Omega_x} x f_x(x) dx \tag{1.28}$$

de onde, ao substituir a equação (1.26), obtemos

$$x_0 = \int_{\Omega_y} \int_{\Omega_x} x f(x,y) dx\, dy \quad . \tag{1.29}$$

A variância de x é

$$\sigma_{x0}^2 = \int_{\Omega_x} (x - x_0)^2 f_x(x) dx \tag{1.30}$$

e, usando a equação (1.26),

$$\sigma_{x0}^2 = \int_{\Omega_y} \int_{\Omega_x} (x - x_0)^2 f(x,y) dx\, dy \quad . \tag{1.31}$$

Q1.3 *Se*

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_{0x}\sigma_{0y}} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma_{0x}^2} - \frac{(y-y_0)^2}{2\sigma_{0y}^2} \right) \quad , \tag{1.32}$$

calcule $f_x(x)$, $f_y(y)$, $< x >$, $< y >$, $< (x-x_0)^2 >$ e $< (y-y_0)^2 >$.

Quando a f.d.p. conjunta fatora em funções que dependem de apenas uma das variáveis, ou seja, se

$$f(x,y) = f_x(x) f_y(y) \quad , \tag{1.33}$$

então diz-se que x e y são estatisticamente independentes, e podemos mostrar que a expressão

$$< (x-x_0)(y-y_0) > = \int \int (x-x_0)(y-y_0) f(x,y) dx\, dy \tag{1.34}$$

é nula, uma vez que, usando a equação (1.33), chega-se a

$$< (x-x_0)(y-y_0) > = \int_{\Omega_x} (x-x_0) f_x(x) dx \int_{\Omega_y} (y-y_0) f_y(y) dy \quad . \tag{1.35}$$

Pela definição de x_0 e y_0 (veja eq. (1.28)), cada uma das integrais do lado direito dessa última equação é nula, de modo que $< (x-x_0)(y-y_0) > = 0$.

Muito frequentemente, porém, as varivéis aleatórias não são estatisticamente independentes, e definimos a *covariância* entre x e y como

$$cov(x,y) =< (x-x_0)(y-y_0) > \quad . \tag{1.36}$$

Q1.4 *Obtenha expressões análogas às equações (1.24) e (1.36) para uma função de probabilidade $\rho(n,m)$ de duas variáveis aleatórias discretas n e m com espaços amostrais Ω_n e Ω_m, respectivamente.*

Os resultados acima podem ser generalizados para qualquer número n de variáveis aleatórias $x_1, x_2, ...x_n$, cuja f.d.p. conjunta pode ser definida de forma análoga à equação (1.24),

$$P(x_{1a} \leq x_1 \leq x_{1b}, x_{2a} \leq x_2 \leq x_{2b}, ...x_{na} \leq x_n \leq x_{nb}) = \\ \int_{x_{na}}^{x_{nb}} \cdots \int_{x_{1a}}^{x_{1b}} f(x_1, x_2, ...x_n) dx_1\, dx_2 ... dx_n \quad . \tag{1.37}$$

A f.d.p. de $x_1, x_2, ...x_m$, independente de $x_{m+1}, x_{m+2}, ...x_n$, é dada por

$$f(x_1, x_2, ...x_m) = \int ... \int f(x_1, x_2, ...x_m, x_{m+1}, ...x_n)\, dx_{m+1} ... dx_n \quad , \tag{1.38}$$

onde a integral é feita sobre o subespaço amostral do conjunto das variáveis $x_{m+1}, x_{m+2}, ...x_n$. Valores esperados, variâncias e covariâncias podem ser definidos de formas análogas às equações (1.28), (1.30) e (1.36), respectivamente.

1.8 Teoria da probabilidade e estatística

A figura 1.5 ilustra os dois tipos de raciocínio que faremos ao longo do texto. O caminho B pode ser trabalhado de maneira dedutiva e sua fundamentação é bem conhecida há um par de séculos, embora tenha havido discussão acerca dela até meados do século XX. Sobre as questões históricas veja o livro [Mises]. Já o caminho A é trilhado frequentemente em procedimentos científicos — um experimento é uma interrogação à natureza, e a ciência procura exprimir quantitativamente, através de uma linguagem matemática, as conclusões obtidas. Um caminho bastante parecido com B é cada vez mais usado para simular processos da natureza ou experimentos a partir das leis básicas e dos valores conhecidos das grandezas; a diferença está no fato de que nosso conhecimento das grandezas e leis físicas não é exato, mas sim aproximado, o que resulta em uma incerteza nos resultados obtidos.

Por muito tempo, resistiu-se a usar os métodos da Teoria da Probabilidade na avaliação de resultados experimentais, mas hoje é isto que fazemos, ou seja, a linguagem matemática escolhida para exprimir o resultado de um experimento é a da Teoria da Probabilidade. Estimaremos a grandeza medida e a incerteza devida ao comportamento aleatório dos erros intervenientes no processo experimental por meio de estimadores, cujo comportamento estudaremos na Estatística, e, a partir daí, avaliaremos a *probabilidade* de uma hipótese específica ser correta ou falsa. Por exemplo, estamos frequentemente interessados em saber com que probabilidade um certo intervalo, tal como $[\bar{x} - \sigma_m, \bar{x} + \sigma_m]$, contém o valor verdadeiro da grandeza, x_0. Embora apenas uma das alternativas: o intervalo contém o valor verdadeiro ou não o contém possa estar correta, como não é possível determinar qual delas é a certa, tudo o que podemos conhecer é a frequência com que os intervalos construídos de acordo com essa regra contém x_0.[3]

Embora também as bases da Estatística tenham sido lançadas ainda no século XVIII, esta teoria foi plenamente incorporada às ciências experimentais ao longo do século XX.

1.9 Média, mediana, moda e desvio padrão

Nas seções 1.4 e 1.6, discutimos um pouco o que é e como se interpreta a média de um conjunto de dados $\{x_i\}$. Além da média, há outros parâmetros da f.d.p. que são importantes, sendo que definiremos aqui a *mediana* e a *moda*.

Chamamos *mediana* de uma variável aleatória o valor x_m tal que

$$P(x < x_m) = P(x > x_m) \quad , \tag{1.39}$$

onde P simboliza probabilidade. A mediana é, portanto, o ponto que divide a f.d.p. $f(x)$ em 2 partes de mesma área,

$$\int_{-\infty}^{x_m} f(x)dx = \int_{x_m}^{\infty} f(x)dx = \frac{1}{2} \quad .$$

[3] Não vamos nos deter aqui no significado dessa *probabilidade*, mas note que a definição frequencista da fórmula (1.1) *não* se encaixa naturalmente, uma vez que se necessita determinar esse intervalo para o evento único que corresponde ao resultado obtido pelo experimentador.

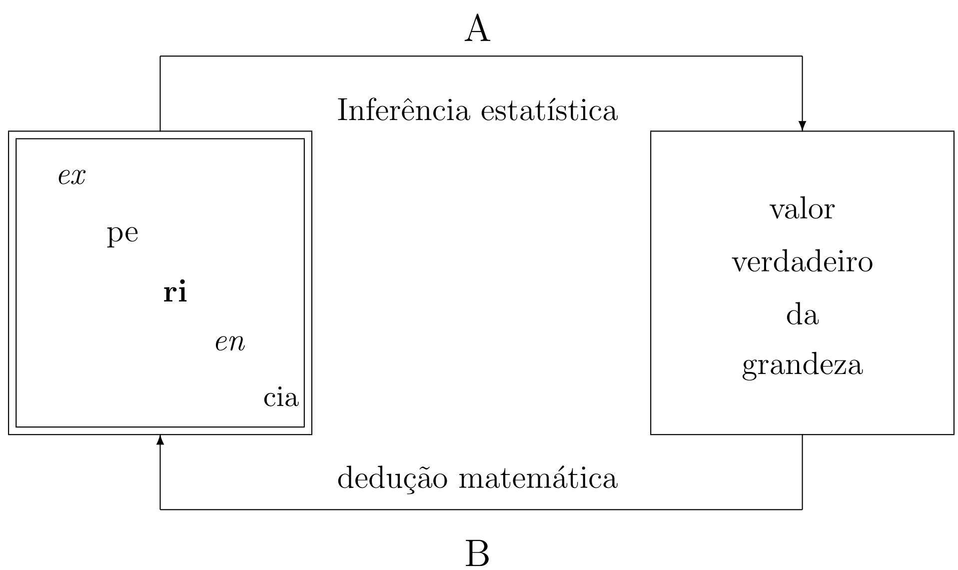

Figura 1.5: Relação entre Teoria da Probabilidade (caminho B) e Estatística (caminho A).

Chamamos de *moda* o ponto em que $f(x)$ tem um máximo local, ou seja, é um ponto x_{moda} tal que

$$f(x_{moda}) \geq f(x) \text{ para } x \in [x_{moda} - \delta, x_{moda} + \delta] \text{ com } \delta > 0 \quad . \tag{1.40}$$

Uma f.d.p. é *unimodal* quando tem apenas uma moda e, aqui, trataremos apenas de f.d.p.s desse tipo. Pode-se mostrar que, para f.d.p.s unimodais, a média, a mediana e a moda colocam-se nessa ordem ou na ordem inversa,

$$x_0 \leq x_m \leq x_{moda} \qquad \text{ou} \qquad x_{moda} \leq x_m \leq x_0 \quad , \tag{1.41}$$

portanto, ou na ordem alfabética dos nomes ou na ordem inversa. Como exemplo, a figura 1.6 mostra a média, mediana e moda para uma distribuição assimétrica.

O *desvio padrão* é uma medida da largura da f.d.p. Pode-se mostrar também que a estimativa usual da variância (quadrado do desvio padrão, dada pela estatística definida pela expressão (1.10)) é exatamente igual à metade do valor médio do quadrado das distâncias entre pares de pontos x_i, x_j, tomando-se apenas os pares independentes [Helene], o que caracteriza a expressão (1.10) como uma medida da largura do histograma dos *dados experimentais*.

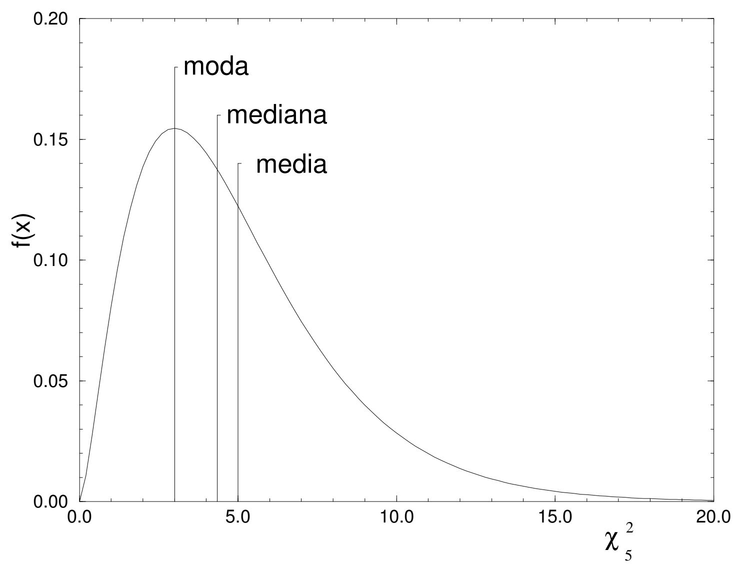

Figura 1.6: Moda, mediana e média de uma distribuição assimétrica, no caso, a distribuição de χ^2 com 5 graus de liberdade.

1.10 Estimativa do valor verdadeiro (paramétrica, modelo normal)

A estimativa da média dada pela expressão (1.9) tem f.d.p. normal de média x_0 e desvio padrão aproximadamente igual a σ_m (equação 1.11), como veremos na seção 2.6. Assim, para um conjunto de dados $\{x_i, i = 1, 2, \ldots, N\,;\; N > 10\}$, a suposição de que a **f.d.p. dos dados**, $f(x)$, seja **normal** permite mostrar que

$$P(\bar{x} - \sigma_m \leq x_0 \leq \bar{x} + \sigma_m) \cong 68\% \quad \text{e} \tag{1.42}$$

$$P(\bar{x} - 2\sigma_m \leq x_0 \leq \bar{x} + 2\sigma_m) \cong 95\% \quad , \tag{1.43}$$

onde $\sigma_m = \sigma/\sqrt{N}$ é a estimativa do desvio padrão da média, conforme equação (1.11). Outros intervalos, correspondentes a outros níveis de probabilidade, podem ser determinados consultando tabelas da integral da gaussiana como as que estão nos apêndices A.1 e A.2-a a A.2-c.

Q1.5 *O comprimento de um objeto pode ser medido por meio de 2 instrumentos, A e B, com precisões σ_A e σ_B, respectivamente, diferentes e tais que $\sigma_B = 2\sigma_A$. Aqui, σ representa o desvio padrão (da série de dados). Demora-se 3 minutos para se efetuar uma observação com o instrumento A e 1 minuto, com o instrumento B. Numa medida que demore 60 minutos, qual instrumento fornecerá a estimativa do comprimento de melhor precisão?*

As aproximações das relações acima são tão melhores quanto maior for o número de dados, N, e tornam-se ruins para medições com $N < 10$ dados. Nesse caso e também quando pretende-se eliminar o "aproximadamente igual" das equações acima, deve-se recorrer à f.d.p. da variável aleatória t de Student, que leva em conta tanto a flutuação estatística de $\bar{x}$ quanto a de σ_m. Ou seja, se a f.d.p. dos dados é a **normal**, com um pouco mais de trabalho é possível eliminar a restrição $N > 10$ e a aproximação efetuada. Veremos os detalhes na seção 3.5.

1.11 Estimativas não-paramétricas

Na seção 1.8, apresentamos o procedimento que adotaremos ao longo do texto, que consiste em estimar a grandeza e sua incerteza por valores calculados a partir dos dados. Esse método é chamado *paramétrico*, por caracterizar a grandeza medida por meio de parâmetros, o que é muito comum nas ciências exatas. No entanto, esse método depende de hipóteses acerca do comportamento estatístico da grandeza em observação. Nesta seção, vamos apontar uma alternativa a esse procedimento, que substitui o parâmetro de incerteza por intervalos que contém o valor da grandeza com certas probabilidades. Essa maneira é mais adequada nas situações em que a f.d.p. dos dados é desconhecida.

A estimativa não paramétrica da grandeza é sempre dada pela mediana, cujo modo de estimar apresentaremos com um exemplo. Considere que obtivemos o seguinte conjunto de dados:

$$\text{medida} = \{11,2; 11,3; 12,1; 10,1; 10,9; 10,9; 11,6; 9,4; 10,4\}.$$

Colocamos os dados em ordem numérica crescente,

$$\{9,4; 10,1; 10,4; 10,9; 10,9; 11,2; 11,3; 11,6; 12,1\} \quad ,$$

e enumeramos os dados de acordo com sua posição neste conjunto ordenado, $x_{[1]}, x_{[2]}, \ldots\ x_{[j]}, \ldots x_{[N]}$.

A estimativa da mediana é

$$x'_m = \begin{cases} x_{[\frac{N+1}{2}]} & N \text{ impar} \\ \dfrac{x_{[N/2]} + x_{[N/2+1]}}{2} & N \text{ par} \end{cases} \tag{1.44}$$

onde a plica $'$ distingue a *estimativa* da mediana do *valor verdadeiro* da mediana, x_m, definida em (1.39).

Neste exemplo, a estimativa da mediana é o dado na **posição central** $(N+1)/2$, que, neste caso em que $N = 9$, é o quinto dado, $x_{[5]} = 10,9$, e, portanto,

$$x'_m = 10,9 \quad .$$

No caso paramétrico da seção 1.10, havíamos estimado não só o valor médio (*estimativa de ponto*), mas também *intervalos* com probabilidades definidas de conterem o valor verdadeiro, usando o parâmetro *desvio padrão* da *média*; na abordagem não-paramétrica, o conjunto de dados ordenado é a base de construção dos intervalos de confiança.

Primeiro, estimaremos um limite superior da probabilidade da mediana ser *maior* que $x_{[N]} = 12,1$, correspondente ao intervalo $]12,1; \infty[$. A probabilidade de um dado ser menor que o valor verdadeiro da mediana x_m é 1/2 e, como os N dados são independentes, a probabilidade de *todos* eles serem menores é $(1/2)^N$, no caso 1/512, ou seja,

$$P(x_m \geq x_{[N]}) \approx (1/2)^N \quad . \tag{1.45}$$

Analogamente, calculamos como $(1/2)^N$ a probabilidade de todos os dados serem maiores que o valor verdadeiro da mediana

$$P(x_m \leq x_{[1]}) \approx (1/2)^N \quad . \tag{1.46}$$

Assim, podemos estimar a probabilidade mínima do intervalo $[x_{[1]}, x_{[N]}]$ conter a mediana como o complemento para 1 da probabilidade da mediana estar fora do intervalo, ou seja, usando (1.45) e (1.46) deduzimos

$$P(x_{[1]} \leq x_m \leq x_{[N]}) \approx 1 - 2 \cdot (1/2)^N \quad , \tag{1.47}$$

que no caso fica

$$P(9,4 \leq x_m \leq 12,1) \approx 0,996 = 99,6\% \quad .$$

Lemos a equação acima como "a probabilidade do valor verdadeiro da mediana estar contida no intervalo entre 9,4 e 12,1 é de cerca de 99,6%".

Para definir um intervalo menor para a mediana, estima-se primeiro a probabilidade do valor verdadeiro da mediana estar entre os dados $x_{[1]}$ e $x_{[2]}$, que exige $N-1$ dados maiores e um menor, sendo que há N maneiras disso ocorrer — lembre-se que *nós ordenamos* os *dados*, eles foram obtidos em ordem aleatória! Assim,

$$P(x_{[1]} \leq x_m \leq x_{[2]}) \approx N \cdot (1/2) \cdot (1/2)^{N-1} \quad . \tag{1.48}$$

Reunindo este resultado com o da equação (1.46), calcula-se

$$P(x_m \leq x_{[2]}) \approx (1/2)^N + N(1/2)^N \quad . \tag{1.49}$$

Seguindo o mesmo procedimento do complemento para 1 usado para deduzir (1.47), obtém-se finalmente

$$P(x_{[2]} \leq x_m \leq x_{[N-1]}) \approx 1 - 2 \cdot (1/2)^N - 2 \cdot N \cdot (1/2)^N \quad , \tag{1.50}$$

que no caso fica

$$P(10{,}1 \le x_m \le 11{,}6) \approx 96\% \quad .$$

No próximo capítulo, discutiremos a função de probabilidade binomial, que permite generalizar esses cálculos.

Vamos examinar com mais cuidado o procedimento que acabamos de realizar. Veja que atribuímos uma mesma probabilidade para um dado ser menor (ou maior) que a mediana, independentemente dele estar no extremo do conjunto ordenado ou no centro. Como esta probabilidade corresponde ao valor máximo que ela pode ter, estamos exagerando no cálculo das probabilidades em (1.45) e (1.49) e, portanto, subestimando as probabilidades em (1.47) e (1.50); por isso, havíamos usado o símbolo $\approx$ nessas equações, antecipando o fato de que corrigiríamos esse sinal para $\geq$. Assim, o modo correto de ler-se a equação (1.47) é "a probabilidade da mediana estar contida no intervalo entre 9,4 e 12,1 é maior que 99,6%". Em particular, se a f.d.p. dos dados é a normal, é possível calcular as probabilidades associadas a esses intervalos e verificar-se que essas probabilidades são maiores. É característico dos métodos não paramétricos fornecerem intervalos *conservadores.* Seu grande mérito é o de aplicarem-se a situações onde desconhecemos a forma da f.d.p. dos dados. Alguns autores chamam as estimativas pouco sensíveis à forma da f.d.p. de estimativas *robustas.* A Estatística não-paramétrica é discutida, por exemplo, em [Noether].

São relativamente raras nas ciências exatas as situações onde não se possa encontrar uma aproximação suficientemente boa da função de probabilidade dos dados. Já nas áreas de pesquisa ligadas a Ciências Humanas e Sociais, frequentemente é impossível fazer hipóteses razoáveis acerca da função de probabilidade dos dados. Nesses campos, portanto, a estatística não paramétrica é bastante empregada.

EXERCÍCIOS

1.1. Identifique como aleatório ou não os eventos:

(a) Obter-se a face dois no jogo de dados.

(b) Um dia ser domingo.

(c) Obter, em um experimento, um resultado para a medida da aceleração da gravidade superior ao seu valor local verdadeiro.

(d) Encontrar todo os semáforos fechados em um percurso em que esses sinais não estejam sincronizados.

(e) O ponteiro da hora superpor-se ao dos minutos, num relógio.

(f) Olhar o relógio e verificar que os ponteiros estão superpostos.

1.2. Mediu-se a densidade de um líquido com o seguinte procedimento: **a**) o volume de uma amostra do líquido foi observado uma única vez com uma pipeta; **b**) a massa dessa amostra, transferida para outro recipiente, foi medida por diversas balanças calibradas independentemente, cada uma operada por um observador diferente e **c**) calculou-se a densidade como o quociente entre a massa média e o volume.

Entre as fontes de erro abaixo, identifique aquelas que podem originar erro sistemático e erro estatístico:

i) A graduação da pipeta.

ii) A transferência do líquido para o recipiente de pesagem.

iii) As calibrações das balanças.

iv) A operação da balança.

v) A trepidação do solo e as correntes de ar durante o uso das balanças.

1.3. Mostre que a estimativa do desvio padrão

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2 \qquad \text{com} \qquad \bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \quad ,$$

pode ser calculada como

$$\sigma^2 = \frac{N}{N-1}\left(\overline{x^2} - \bar{x}^2\right) \quad , \tag{1.51}$$

onde definimos

$$\overline{x^2} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \quad .$$

Veja que essa forma pode ser calculada *em linha* com a tomada dos dados x_i, ou seja, pode ser calculado à medida que os dados são obtidos sem necessidade de guardar todos os valores, o que torna o algoritmo útil para cálculos por meio de computadores. A idéia é calcular 3 variáveis, por exemplo $S0$, $S1$, e $S2$, onde

$$S0 = \sum 1 \qquad , \qquad S1 = \sum x \qquad \text{e} \qquad S2 = \sum x^2 \quad .$$

Ao final da tomada de dados, $S0$ é o número de dados N, $S1/S0$ é $\bar{x}$ e $S2/S0$ é $\overline{x^2}$, que, na fórmula (1.51), dão σ e $\sigma_m = \sigma/\sqrt{N}$.

1.4. Considere a f.d.p.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{a} & 0 \leq x \leq a \\ \\ 0 & \text{outros valores} \end{cases}$$

(a) Verifique que $f(x)$ é normalizada.

(b) Calcule $< x >$, μ'_2 e σ_0^2.

1.5. Considere a f.d.p. normal do exemplo 1.1. Mostre que

(a) $< x >$ é igual ao parâmetro x_0.

(b) $< (x - x_0)^2 >$ é igual ao parâmetro σ_0^2.

1.6. Considere a função probabilidade de uma variável discreta n que pode assumir os valores -1, 0 e +1 tabelada abaixo:

n	$P(n)$
-1	0,25
0	0,50
+1	0,25

Calcule $< n >$, $< n^2 >$ e a variância $< (n- < n >)^2 >$.

1.7. Um bom exemplo da flutuação estatística em um experimento encontra-se no clássico artigo de [Birge], que apresenta os resíduos de 500 observações do comprimento de onda de uma linha do espectro de uma fonte de luz. Na figura 1.7, redesenhada conforme se vê nesse artigo, a abscissa dá o *resíduo* da observação, definido como a diferença entre o valor experimental particular e a média de todos os 500 valores obtidos. O autor pretende insinuar que a linha tracejada corresponderia ao limite em que o número de observações tendesse a infinito, o que está sutilmente equivocado.

O que está errado na afirmação de que a curva tracejada é o limite do histograma experimental com infinitos dados? (Dica: procure entender o significado da origem da abscissa no caso real e no caso limite.)

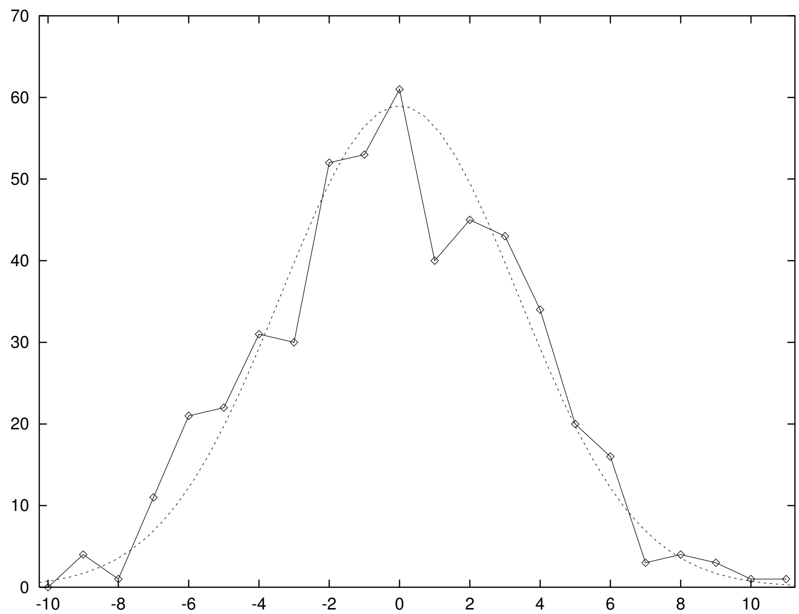

Figura 1.7: Histograma dos resíduos obtidos em 500 observações da posição de uma linha espectral, em relação ao valor médio obtido[Birge]. A abscissa representa o resíduo, em μm. A ordenada representa o número de vezes que aquele resíduo foi observado.

Bibliografia

[Arfken] Mathematical Methods for Physicists, G.Arfken & H.Weber, Academic Press, 4^a edição (1995)

[Bard] Nonlinear Parameter Estimation, Yonathan Bard, Academic Press (1974)

[Benzécri] Histoire et Préhistoire de l'Analyse des Données, J.P.Benzécri, Ed. Bordas, Paris 1982

[Bevington] Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences, P.Bevington, McGraw-Hill, 1969

[Birge] The calculation of errors by the method of least squares, Raymond T. Birge, Phys Rev *40 (1932) 207-227*

[Conover] Practical Nonparametric Statistics, W.J.Conover, John Wiley & Sons Inc. 1971

[CRC] Handbook of Tables for Probability and Statistics, CRC

[Eadie] Statistical Methods for Physicists, W.T.Eadie et al., North Holland Pub.Co. 1971

[Escoubes] Experimental Signs Pointing to a Bayesian Instead of a Classical Approach for Experiments with Small Number of Events, B.Escoubes, S.De Unamuno e O. Helene, Nuclear Instruments and Methods A257(1987)346

[Feller] Feller, An Introduction to Probability Theory and its Applications, John Wiley, 2^a Ed. (1957)

[Feynman] Lectures on Physics Vol.I, Chap.6, Feynman Leighton & Sands

[Firestone] Analysis of α, β, and γ ray emission probabilities, R.B. Firestone, Nuclear Instruments and Methods *A286*(1990)584

[Forbes] Forbes, Eric G., *Gauss and the Discovery of Ceres*. Journal for the History of Astronomy. 2 (1971) 195?199.

[Frieden] Fisher's Information as the basis for the Schrödinger wave equation, B. Roy Frieden, Am. J.Phys. 57(1989)11

[Geraldo] L.P. Geraldo e D.L Smith, Nuclear Instruments and Methods A290(1990)499

[Grosser] Morton Grosser, The Discovery of Neptune, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts (1962)

[Gray] C.G.Gray, Am. J.Phys. 59(1991)282

[Guimarães-Filho] Z.O. Guimarães-Filho e O. Helene, One Step Self-Calibration Procedure in Gamma-Ray Energy Measurements. Brazilian Journal of Physics, v. 33, n.2, (2003) 280-281.

[Lyons] How to combine correlated estimates of a single physical quantity, L.Lyons, D.Gibaut e P. Clifford, Nuclear Instruments and Methods *A270*(1988)110

[Helene] Tratamento Estatístico de dados em Física Experimental, O.Helene, V. R. Vanin, Ed. Edgard Blücher, 2^a Ed., 1991

[Helene 83] Upper Limit of Peak Area, O.Helene, Nuclear Instruments and Methods 212(1983)319

[Helene 84] Errors in Experiments with Small Number of Events, O.Helene, Nuclear Instruments and Methods 228(1984)120

[Helene 91b] Determination of the Upper Limit of Peak Area, O.Helene, Nuclear Instruments and Methods A300(1991)132

[Helene 91] O que é uma medida?, O. Helene, Shan.P.Tsai, R.P.Teixeira, preprint IFUSP/P-854 (1990) e Revista de Ensino de Física, Vol.13 p.12, SBF (1991).

[Helene 93] O.Helene and V.R.Vanin, Nuclear Instruments and Methods A335(1993)227

[Helene 2013] O. Helene, Método dos Mínimos Quadrados com formalismo matricial, Editora Livraria da Física, São Paulo, 2ª edição (2013).

[James] A review of pseudorandom number generators, F.James, Computer Physics Communications 60(1990)329-344

[Kendall] The Advanced Theory of Statistics, M.Kendall, A.Stuart & J.K.Ord, Charles Griffin & Company Limited, London

[Magalhães] Noções de Probabilidade e Estatística, Marcos N. Magalhães e Antonio Carlos P. Lima, Editora da Universidade de São Paulo - EDUSP, 2011

[Mannhart] A Small Guide to Generating Covariances of Experimental Data, Report PTB–FMRD 84, Berlin, 1981. ISSN 0341–6666

[Marquardt] An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters, D. Marquardt, SIAM J. Appl. Math. 11, 431-441, 1963

[Merzbacher] Quantum Mechanics, E.Merzbacher, John Wiley & sons, New York 1961

[Mises] Probability, Statistics and Truth, R.von Mises, Dover, 1955

[Moralles] M.Moralles, P.R.Pascholati, V.R.Vanin and O.Helene, Applied Radiation and Isotopes 46-2(1995)133

[Mucciolo] E.R.Mucciolo and O.Helene, Nuclear Instruments and Methods *A256*(1987)153

[Noether] Introdução à Estatística – Uma abordagem não paramétrica, G.E.Noether, Guanabara Dois, 1983

[Smith] D.L. Smith, Nuclear Instruments and Methods *A257*(1987)361

[Stigler] *Gauss and the Invention of Least Squares.* Stephen M. Stigler, Annals of Statistics, *9* (1981) 465–474 - doi:10.1214/aos/1176345451

[Vanin 1989] V.R.Vanin e M.Aiche, Nuclear Instruments and Methods *A284*(1989)452

[Vanin 1997] V.R.Vanin, G.Kenchian, M.Moralles, O.Helene e P.R. Pascholati, Nuclear Instruments and Methods *A391*(1997)338

[Vuolo] Fundamentos da Teoria de Erros, J.H.Vuolo, Ed. Edgard Blücher, 1992

[Youden] Statistical Methods for Chemists, W.J.Youden, John Wiley 1951

[Zar] J.H. Zar, Appl. Statist. 27(1978)n.3, 280-290

Apêndice A

Tabelas diversas

A.1 Distribuição normal: probabilidade em função do intervalo

A.2-a a A.2-c Distribuição normal: intervalo em função da probabilidade

A.3 Distribuição de χ^2_ℓ: probabilidade em função do intervalo e do número de graus de liberdade

A.4-a a A.4-d Distribuição χ^2_ℓ: intervalo em função da probabilidade e do número de graus de liberdade

A.5 Distribuição t de Student: probabilidade em função do intervalo e do número de graus de liberdade

A.6-a a A.6-d Distribuição t de Student: intervalo em função da probabilidade e do número de graus de liberdade

A.7-a a A.7-h Distribuição F de Fisher: Valores de F em função da probabilidade e dos números de graus de liberdade[1]

[1]Estas tabelas podem ser usadas para outras probabilidades se for a seguinte propriedade da distribuição F for aplicada: se $Q(F_p(\nu_1,\nu_2)|\nu_1,\nu_2) = p$ e $Q(F_{1-p}(\nu_2,\nu_1)|\nu_2,\nu_1) = 1-p$, então $F_p(\nu_1,\nu_2) = 1./F_{1-p}(\nu_2,\nu_1)$

Tabela A.1: Distribuição gaussiana: valores de $P(z)$ tal que $P(z) = \int_{-z}^{+z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.00	0.0000	0.0080	0.0160	0.0239	0.0319	0.0399	0.0478	0.0558	0.0638	0.0717
0.10	0.0797	0.0876	0.0955	0.1034	0.1113	0.1192	0.1271	0.1350	0.1428	0.1507
0.20	0.1585	0.1663	0.1741	0.1819	0.1897	0.1974	0.2051	0.2128	0.2205	0.2282
0.30	0.2358	0.2434	0.2510	0.2586	0.2661	0.2737	0.2812	0.2886	0.2961	0.3035
0.40	0.3108	0.3182	0.3255	0.3328	0.3401	0.3473	0.3545	0.3616	0.3688	0.3759
0.50	0.3829	0.3899	0.3969	0.4039	0.4108	0.4177	0.4245	0.4313	0.4381	0.4448
0.60	0.4515	0.4581	0.4647	0.4713	0.4778	0.4843	0.4907	0.4971	0.5035	0.5098
0.70	0.5161	0.5223	0.5285	0.5346	0.5407	0.5467	0.5527	0.5587	0.5646	0.5705
0.80	0.5763	0.5821	0.5878	0.5935	0.5991	0.6047	0.6102	0.6157	0.6211	0.6265
0.90	0.6319	0.6372	0.6424	0.6476	0.6528	0.6579	0.6629	0.6680	0.6729	0.6778
1.00	0.6827	0.6875	0.6923	0.6970	0.7017	0.7063	0.7109	0.7154	0.7199	0.7243
1.10	0.7287	0.7330	0.7373	0.7415	0.7457	0.7499	0.7540	0.7580	0.7620	0.7660
1.20	0.7699	0.7737	0.7775	0.7813	0.7850	0.7887	0.7923	0.7959	0.7995	0.8029
1.30	0.8064	0.8098	0.8132	0.8165	0.8198	0.8230	0.8262	0.8293	0.8324	0.8355
1.40	0.8385	0.8415	0.8444	0.8473	0.8501	0.8529	0.8557	0.8584	0.8611	0.8638
1.50	0.8664	0.8690	0.8715	0.8740	0.8764	0.8789	0.8812	0.8836	0.8859	0.8882
1.60	0.8904	0.8926	0.8948	0.8969	0.8990	0.9011	0.9031	0.9051	0.9070	0.9090
1.70	0.9109	0.9127	0.9146	0.9164	0.9181	0.9199	0.9216	0.9233	0.9249	0.9265
1.80	0.9281	0.9297	0.9312	0.9328	0.9342	0.9357	0.9371	0.9385	0.9399	0.9412
1.90	0.9426	0.9439	0.9451	0.9464	0.9476	0.9488	0.9500	0.9512	0.9523	0.9534
2.00	0.9545	0.9556	0.9566	0.9576	0.9586	0.9596	0.9606	0.9615	0.9625	0.9634
2.10	0.9643	0.9651	0.9660	0.9668	0.9676	0.9684	0.9692	0.9700	0.9707	0.9715
2.20	0.9722	0.9729	0.9736	0.9743	0.9749	0.9756	0.9762	0.9768	0.9774	0.9780
2.30	0.9786	0.9791	0.9797	0.9802	0.9807	0.9812	0.9817	0.9822	0.9827	0.9832
2.40	0.9836	0.9840	0.9845	0.9849	0.9853	0.9857	0.9861	0.9865	0.9869	0.9872
2.50	0.9876	0.9879	0.9883	0.9886	0.9889	0.9892	0.9895	0.9898	0.9901	0.9904
2.60	0.9907	0.9909	0.9912	0.9915	0.9917	0.9920	0.9922	0.9924	0.9926	0.9929
2.70	0.9931	0.9933	0.9935	0.9937	0.9939	0.9940	0.9942	0.9944	0.9946	0.9947
2.80	0.9949	0.9950	0.9952	0.9953	0.9955	0.9956	0.9958	0.9959	0.9960	0.9961
2.90	0.9963	0.9964	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972

z	0.00	0.02	0.04	0.06	0.08
3.00	0.99730020	0.99747225	0.99763422	0.99778663	0.99792999
3.10	0.99806479	0.99819149	0.99831052	0.99842231	0.99852725
3.20	0.99862572	0.99871809	0.99880470	0.99888588	0.99896193
3.30	0.99903315	0.99909983	0.99916222	0.99922058	0.99927514
3.40	0.99932614	0.99937379	0.99941829	0.99945982	0.99949859
3.50	0.99953474	0.99956845	0.99959987	0.99962915	0.99965641
3.60	0.99968178	0.99970540	0.99972736	0.99974778	0.99976677
3.70	0.99978440	0.99980078	0.99981598	0.99983009	0.99984317
3.80	0.99985530	0.99986655	0.99987697	0.99988661	0.99989554
3.90	0.99990381	0.99991145	0.99991852	0.99992505	0.99993108

Tabela A.2-a: Distribuição gaussiana: valores de z tal que $P(z) = \int_{-z}^{+z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$

$P(z)$	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009
0.000	0.000	0.001	0.003	0.004	0.005	0.006	0.008	0.009	0.010	0.011
0.010	0.013	0.014	0.015	0.016	0.018	0.019	0.020	0.021	0.023	0.024
0.020	0.025	0.026	0.028	0.029	0.030	0.031	0.033	0.034	0.035	0.036
0.030	0.038	0.039	0.040	0.041	0.043	0.044	0.045	0.046	0.048	0.049
0.040	0.050	0.051	0.053	0.054	0.055	0.056	0.058	0.059	0.060	0.061
0.050	0.063	0.064	0.065	0.066	0.068	0.069	0.070	0.071	0.073	0.074
0.060	0.075	0.077	0.078	0.079	0.080	0.082	0.083	0.084	0.085	0.087
0.070	0.088	0.089	0.090	0.092	0.093	0.094	0.095	0.097	0.098	0.099
0.080	0.100	0.102	0.103	0.104	0.105	0.107	0.108	0.109	0.111	0.112
0.090	0.113	0.114	0.116	0.117	0.118	0.119	0.121	0.122	0.123	0.124
0.100	0.126	0.127	0.128	0.129	0.131	0.132	0.133	0.135	0.136	0.137
0.110	0.138	0.140	0.141	0.142	0.143	0.145	0.146	0.147	0.148	0.150
0.120	0.151	0.152	0.154	0.155	0.156	0.157	0.159	0.160	0.161	0.162
0.130	0.164	0.165	0.166	0.167	0.169	0.170	0.171	0.173	0.174	0.175
0.140	0.176	0.178	0.179	0.180	0.181	0.183	0.184	0.185	0.187	0.188
0.150	0.189	0.190	0.192	0.193	0.194	0.196	0.197	0.198	0.199	0.201
0.160	0.202	0.203	0.204	0.206	0.207	0.208	0.210	0.211	0.212	0.213
0.170	0.215	0.216	0.217	0.219	0.220	0.221	0.222	0.224	0.225	0.226
0.180	0.228	0.229	0.230	0.231	0.233	0.234	0.235	0.237	0.238	0.239
0.190	0.240	0.242	0.243	0.244	0.246	0.247	0.248	0.249	0.251	0.252
0.200	0.253	0.255	0.256	0.257	0.259	0.260	0.261	0.262	0.264	0.265
0.210	0.266	0.268	0.269	0.270	0.272	0.273	0.274	0.275	0.277	0.278
0.220	0.279	0.281	0.282	0.283	0.285	0.286	0.287	0.288	0.290	0.291
0.230	0.292	0.294	0.295	0.296	0.298	0.299	0.300	0.302	0.303	0.304
0.240	0.305	0.307	0.308	0.309	0.311	0.312	0.313	0.315	0.316	0.317
0.250	0.319	0.320	0.321	0.323	0.324	0.325	0.327	0.328	0.329	0.331
0.260	0.332	0.333	0.335	0.336	0.337	0.338	0.340	0.341	0.342	0.344
0.270	0.345	0.346	0.348	0.349	0.350	0.352	0.353	0.354	0.356	0.357
0.280	0.358	0.360	0.361	0.362	0.364	0.365	0.366	0.368	0.369	0.371
0.290	0.372	0.373	0.375	0.376	0.377	0.379	0.380	0.381	0.383	0.384
0.300	0.385	0.387	0.388	0.389	0.391	0.392	0.393	0.395	0.396	0.397
0.310	0.399	0.400	0.402	0.403	0.404	0.406	0.407	0.408	0.410	0.411
0.320	0.412	0.414	0.415	0.417	0.418	0.419	0.421	0.422	0.423	0.425
0.330	0.426	0.428	0.429	0.430	0.432	0.433	0.434	0.436	0.437	0.439
0.340	0.440	0.441	0.443	0.444	0.445	0.447	0.448	0.450	0.451	0.452
0.350	0.454	0.455	0.457	0.458	0.459	0.461	0.462	0.464	0.465	0.466
0.360	0.468	0.469	0.470	0.472	0.473	0.475	0.476	0.478	0.479	0.480
0.370	0.482	0.483	0.485	0.486	0.487	0.489	0.490	0.492	0.493	0.494
0.380	0.496	0.497	0.499	0.500	0.502	0.503	0.504	0.506	0.507	0.509
0.390	0.510	0.512	0.513	0.514	0.516	0.517	0.519	0.520	0.522	0.523

Tabela A.2-b: Distribuição gaussiana: valores de z tal que $P(z) = \int_{-z}^{+z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$

$P(z)$	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009
0.400	0.524	0.526	0.527	0.529	0.530	0.532	0.533	0.534	0.536	0.537
0.410	0.539	0.540	0.542	0.543	0.545	0.546	0.548	0.549	0.550	0.552
0.420	0.553	0.555	0.556	0.558	0.559	0.561	0.562	0.564	0.565	0.567
0.430	0.568	0.570	0.571	0.572	0.574	0.575	0.577	0.578	0.580	0.581
0.440	0.583	0.584	0.586	0.587	0.589	0.590	0.592	0.593	0.595	0.596
0.450	0.598	0.599	0.601	0.602	0.604	0.605	0.607	0.608	0.610	0.611
0.460	0.613	0.614	0.616	0.617	0.619	0.620	0.622	0.623	0.625	0.626
0.470	0.628	0.630	0.631	0.633	0.634	0.636	0.637	0.639	0.640	0.642
0.480	0.643	0.645	0.646	0.648	0.650	0.651	0.653	0.654	0.656	0.657
0.490	0.659	0.660	0.662	0.664	0.665	0.667	0.668	0.670	0.671	0.673
0.500	0.674	0.676	0.678	0.679	0.681	0.682	0.684	0.686	0.687	0.689
0.510	0.690	0.692	0.693	0.695	0.697	0.698	0.700	0.701	0.703	0.705
0.520	0.706	0.708	0.710	0.711	0.713	0.714	0.716	0.718	0.719	0.721
0.530	0.722	0.724	0.726	0.727	0.729	0.731	0.732	0.734	0.736	0.737
0.540	0.739	0.740	0.742	0.744	0.745	0.747	0.749	0.750	0.752	0.754
0.550	0.755	0.757	0.759	0.760	0.762	0.764	0.765	0.767	0.769	0.771
0.560	0.772	0.774	0.776	0.777	0.779	0.781	0.782	0.784	0.786	0.787
0.570	0.789	0.791	0.793	0.794	0.796	0.798	0.800	0.801	0.803	0.805
0.580	0.806	0.808	0.810	0.812	0.813	0.815	0.817	0.819	0.820	0.822
0.590	0.824	0.826	0.827	0.829	0.831	0.833	0.834	0.836	0.838	0.840
0.600	0.842	0.843	0.845	0.847	0.849	0.851	0.852	0.854	0.856	0.858
0.610	0.860	0.861	0.863	0.865	0.867	0.869	0.871	0.872	0.874	0.876
0.620	0.878	0.880	0.882	0.883	0.885	0.887	0.889	0.891	0.893	0.895
0.630	0.896	0.898	0.900	0.902	0.904	0.906	0.908	0.910	0.912	0.913
0.640	0.915	0.917	0.919	0.921	0.923	0.925	0.927	0.929	0.931	0.933
0.650	0.935	0.937	0.938	0.940	0.942	0.944	0.946	0.948	0.950	0.952
0.660	0.954	0.956	0.958	0.960	0.962	0.964	0.966	0.968	0.970	0.972
0.670	0.974	0.976	0.978	0.980	0.982	0.984	0.986	0.988	0.990	0.992
0.680	0.994	0.997	0.999	1.001	1.003	1.005	1.007	1.009	1.011	1.013
0.690	1.015	1.017	1.019	1.022	1.024	1.026	1.028	1.030	1.032	1.034
0.700	1.036	1.039	1.041	1.043	1.045	1.047	1.049	1.052	1.054	1.056
0.710	1.058	1.060	1.063	1.065	1.067	1.069	1.071	1.074	1.076	1.078
0.720	1.080	1.083	1.085	1.087	1.089	1.092	1.094	1.096	1.098	1.101
0.730	1.103	1.105	1.108	1.110	1.112	1.115	1.117	1.119	1.122	1.124
0.740	1.126	1.129	1.131	1.134	1.136	1.138	1.141	1.143	1.146	1.148
0.750	1.150	1.153	1.155	1.158	1.160	1.163	1.165	1.168	1.170	1.172
0.760	1.175	1.177	1.180	1.183	1.185	1.188	1.190	1.193	1.195	1.198
0.770	1.200	1.203	1.206	1.208	1.211	1.213	1.216	1.219	1.221	1.224
0.780	1.227	1.229	1.232	1.235	1.237	1.240	1.243	1.245	1.248	1.251
0.790	1.254	1.256	1.259	1.262	1.265	1.267	1.270	1.273	1.276	1.279

Tabela A.2-c: Distribuição gaussiana: valores de z tal que $P(z) = \int_{-z}^{+z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$

$P(z)$	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009
0.800	1.282	1.284	1.287	1.290	1.293	1.296	1.299	1.302	1.305	1.308
0.810	1.311	1.314	1.317	1.320	1.323	1.326	1.329	1.332	1.335	1.338
0.820	1.341	1.344	1.347	1.350	1.353	1.356	1.359	1.363	1.366	1.369
0.830	1.372	1.375	1.379	1.382	1.385	1.388	1.392	1.395	1.398	1.402
0.840	1.405	1.408	1.412	1.415	1.419	1.422	1.426	1.429	1.433	1.436
0.850	1.440	1.443	1.447	1.450	1.454	1.457	1.461	1.465	1.468	1.472
0.860	1.476	1.480	1.483	1.487	1.491	1.495	1.499	1.502	1.506	1.510
0.870	1.514	1.518	1.522	1.526	1.530	1.534	1.538	1.542	1.546	1.551
0.880	1.555	1.559	1.563	1.567	1.572	1.576	1.580	1.585	1.589	1.594
0.890	1.598	1.603	1.607	1.612	1.616	1.621	1.626	1.630	1.635	1.640
0.900	1.645	1.650	1.655	1.660	1.665	1.670	1.675	1.680	1.685	1.690
0.910	1.695	1.701	1.706	1.711	1.717	1.722	1.728	1.734	1.739	1.745
0.920	1.751	1.757	1.762	1.768	1.774	1.780	1.787	1.793	1.799	1.805
0.930	1.812	1.818	1.825	1.832	1.838	1.845	1.852	1.859	1.866	1.873
0.940	1.881	1.888	1.896	1.903	1.911	1.919	1.927	1.935	1.943	1.951
0.950	1.960	1.969	1.977	1.986	1.995	2.005	2.014	2.024	2.034	2.044
0.960	2.054	2.064	2.075	2.086	2.097	2.108	2.120	2.132	2.144	2.157
0.970	2.170	2.183	2.197	2.212	2.226	2.241	2.257	2.273	2.290	2.308
0.980	2.326	2.346	2.366	2.387	2.409	2.432	2.457	2.484	2.512	2.543
0.990	2.576	2.612	2.652	2.697	2.748	2.807	2.878	2.968	3.090	3.291

Tabela A.3: Distribuição de χ^2: Valores de χ^2_ν em função do número de graus de liberdade ν e da probabilidade $P(\chi^2_\nu)$ tal que $P(\chi^2_\nu) = \frac{1}{\sqrt{2^\nu}\Gamma(\frac{1}{2}\nu)} \int_0^{\chi^2_\nu} e^{-\frac{1}{2}t} t^{\frac{1}{2}N-1} dt$.

$P(\chi^2_\nu)$	0.005	0.025	0.05	0.10	0.25	0.50	0.75	0.90	0.95	0.975	0.995
ν											
1	0.000	0.001	0.004	0.016	0.102	0.455	1.323	2.706	3.841	5.024	7.879
2	0.010	0.051	0.103	0.211	0.575	1.386	2.773	4.605	5.991	7.378	10.60
3	0.072	0.216	0.352	0.584	1.211	2.365	4.110	6.253	7.815	9.347	12.84
4	0.207	0.485	0.711	1.064	1.922	3.356	5.385	7.781	9.488	11.14	14.86
5	0.412	0.831	1.146	1.610	2.674	4.351	6.625	9.237	11.07	12.83	16.75
6	0.676	1.237	1.635	2.204	3.455	5.348	7.841	10.65	12.59	14.45	18.55
7	0.989	1.690	2.167	2.833	4.255	6.346	9.037	12.02	14.07	16.01	20.28
8	1.344	2.180	2.733	3.490	5.071	7.344	10.22	13.36	15.51	17.53	21.96
9	1.735	2.700	3.325	4.168	5.899	8.343	11.39	14.68	16.92	19.02	23.59
10	2.156	3.247	3.940	4.865	6.737	9.342	12.55	15.99	18.31	20.48	25.19
11	2.603	3.816	4.575	5.578	7.584	10.34	13.70	17.28	19.68	21.92	26.76
12	3.074	4.404	5.226	6.304	8.438	11.34	14.85	18.55	21.03	23.34	28.30
13	3.565	5.009	5.892	7.041	9.299	12.34	15.98	19.81	22.36	24.74	29.82
14	4.075	5.629	6.571	7.790	10.17	13.34	17.12	21.06	23.69	26.12	31.32
15	4.601	6.262	7.261	8.547	11.04	14.34	18.25	22.31	25.00	27.49	32.80
16	5.142	6.908	7.962	9.312	11.91	15.34	19.37	23.54	26.30	28.85	34.27
17	5.697	7.564	8.672	10.09	12.79	16.34	20.49	24.77	27.59	30.19	35.72
18	6.265	8.231	9.390	10.87	13.68	17.34	21.61	25.99	28.87	31.53	37.16
19	6.844	8.907	10.12	11.65	14.56	18.34	22.72	27.20	30.14	32.85	38.58
20	7.434	9.591	10.85	12.44	15.45	19.34	23.83	28.41	31.41	34.17	40.00
21	8.034	10.28	11.59	13.24	16.34	20.34	24.94	29.62	32.67	35.48	41.40
22	8.643	10.98	12.34	14.04	17.24	21.34	26.04	30.81	33.92	36.78	42.80
23	9.260	11.69	13.09	14.85	18.14	22.34	27.14	32.01	35.17	38.08	44.18
24	9.886	12.40	13.85	15.66	19.04	23.34	28.24	33.20	36.42	39.36	45.56
25	10.52	13.12	14.61	16.47	19.94	24.34	29.34	34.38	37.65	40.65	46.93
26	11.16	13.84	15.38	17.29	20.84	25.34	30.44	35.56	38.89	41.92	48.29
27	11.81	14.57	16.15	18.11	21.75	26.34	31.53	36.74	40.11	43.20	49.65
28	12.46	15.31	16.93	18.94	22.66	27.34	32.62	37.92	41.34	44.46	50.99
29	13.12	16.05	17.71	19.77	23.57	28.34	33.71	39.09	42.56	45.72	52.34
30	13.79	16.79	18.49	20.60	24.48	29.34	34.80	40.26	43.77	46.98	53.67
32	15.13	18.29	20.07	22.27	26.30	31.34	36.97	42.59	46.19	49.48	56.33
34	16.50	19.81	21.66	23.95	28.14	33.34	39.14	44.90	48.60	51.97	58.96
36	17.89	21.34	23.27	25.64	29.97	35.34	41.30	47.21	51.00	54.44	61.58
38	19.29	22.88	24.88	27.34	31.82	37.34	43.46	49.51	53.38	56.90	64.18
40	20.71	24.43	26.51	29.05	33.66	39.34	45.62	51.81	55.76	59.34	66.77
45	24.31	28.37	30.61	33.35	38.29	44.34	50.99	57.51	61.66	65.41	73.17
50	27.99	32.36	34.76	37.69	42.94	49.34	56.33	63.17	67.51	71.42	79.49
55	31.74	36.40	38.96	42.06	47.61	54.34	61.67	68.80	73.31	77.38	85.75
60	35.53	40.48	43.19	46.46	52.29	59.34	66.98	74.40	79.08	83.30	91.95
70	43.28	48.76	51.74	55.33	61.70	69.33	77.58	85.53	90.53	95.02	104.2
80	51.17	57.15	60.39	64.28	71.15	79.33	88.13	96.58	101.9	106.6	116.3
90	59.20	65.65	69.13	73.29	80.63	89.33	98.65	107.6	113.2	118.1	128.3
100	67.33	74.22	77.93	82.36	90.13	99.33	109.1	118.5	124.3	129.6	140.2

Tabela A.4-a: Distribuição de χ^2: Valores da probabilidade $P(\chi^2_\nu)$ em função do número de graus de liberdade ν e do χ^2 reduzido χ^2_ν/ν tal que $P(\chi^2_\nu) = \frac{1}{\sqrt{2^\nu}\Gamma(\frac{1}{2}\nu)/\nu}\int_0^{\chi^2_\nu} e^{-\frac{1}{2}t}t^{\frac{1}{2}N-1}dt$.

χ^2_ν/ν	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90
ν										
1	0.0000	0.2482	0.3453	0.4161	0.4729	0.5205	0.5614	0.5972	0.6289	0.6572
2	0.0000	0.0952	0.1813	0.2592	0.3297	0.3935	0.4512	0.5034	0.5507	0.5934
3	0.0000	0.0400	0.1036	0.1746	0.2470	0.3177	0.3851	0.4481	0.5064	0.5598
4	0.0000	0.0175	0.0616	0.1219	0.1912	0.2642	0.3374	0.4082	0.4751	0.5372
5	0.0000	0.0079	0.0374	0.0869	0.1509	0.2235	0.3000	0.3766	0.4506	0.5201
6	0.0000	0.0036	0.0231	0.0629	0.1205	0.1912	0.2694	0.3504	0.4303	0.5064
7	0.0000	0.0017	0.0144	0.0459	0.0971	0.1648	0.2435	0.3278	0.4128	0.4948
8	0.0000	0.0008	0.0091	0.0338	0.0788	0.1429	0.2213	0.3081	0.3975	0.4848
9	0.0000	0.0004	0.0058	0.0250	0.0643	0.1245	0.2019	0.2904	0.3837	0.4759
10	0.0000	0.0002	0.0037	0.0186	0.0527	0.1088	0.1847	0.2746	0.3712	0.4679
11	0.0000	0.0001	0.0023	0.0139	0.0433	0.0954	0.1695	0.2601	0.3597	0.4606
12	0.0000	0.0000	0.0015	0.0104	0.0357	0.0839	0.1559	0.2469	0.3490	0.4539
13	0.0000	0.0000	0.0010	0.0078	0.0295	0.0739	0.1436	0.2347	0.3391	0.4476
14	0.0000	0.0000	0.0006	0.0059	0.0244	0.0653	0.1325	0.2233	0.3297	0.4418
15	0.0000	0.0000	0.0004	0.0044	0.0203	0.0577	0.1225	0.2128	0.3210	0.4363
16	0.0000	0.0000	0.0003	0.0033	0.0168	0.0511	0.1133	0.2030	0.3127	0.4311
17	0.0000	0.0000	0.0002	0.0025	0.0140	0.0453	0.1050	0.1938	0.3048	0.4261
18	0.0000	0.0000	0.0001	0.0019	0.0117	0.0403	0.0973	0.1852	0.2973	0.4214
19	0.0000	0.0000	0.0001	0.0015	0.0097	0.0358	0.0904	0.1771	0.2902	0.4169
20	0.0000	0.0000	0.0000	0.0011	0.0081	0.0318	0.0839	0.1695	0.2834	0.4126
21	0.0000	0.0000	0.0000	0.0008	0.0068	0.0283	0.0780	0.1623	0.2768	0.4084
22	0.0000	0.0000	0.0000	0.0006	0.0057	0.0253	0.0726	0.1555	0.2706	0.4045
23	0.0000	0.0000	0.0000	0.0005	0.0048	0.0225	0.0675	0.1490	0.2646	0.4006
24	0.0000	0.0000	0.0000	0.0004	0.0040	0.0201	0.0629	0.1429	0.2588	0.3969
25	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0033	0.0179	0.0586	0.1371	0.2532	0.3933
26	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0028	0.0160	0.0546	0.1316	0.2478	0.3898
27	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0024	0.0143	0.0510	0.1264	0.2426	0.3864
28	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0020	0.0128	0.0476	0.1214	0.2376	0.3831
29	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0017	0.0115	0.0444	0.1166	0.2327	0.3799
30	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0014	0.0103	0.0415	0.1121	0.2280	0.3767
32	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0010	0.0082	0.0362	0.1037	0.2190	0.3707
34	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0007	0.0066	0.0316	0.0960	0.2105	0.3649
36	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0005	0.0053	0.0277	0.0889	0.2025	0.3594
38	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0004	0.0043	0.0243	0.0824	0.1949	0.3542
40	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0035	0.0213	0.0765	0.1878	0.3491
45	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0020	0.0154	0.0637	0.1713	0.3372
50	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0012	0.0112	0.0532	0.1568	0.3262
55	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0007	0.0081	0.0445	0.1438	0.3160
60	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0004	0.0059	0.0374	0.1321	0.3065
70	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0032	0.0266	0.1121	0.2892
80	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0017	0.0190	0.0956	0.2737
90	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0009	0.0136	0.0819	0.2596
100	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0005	0.0098	0.0703	0.2468

Tabela A.4-b: Distribuição de χ^2: Valores da probabilidade $P(\chi^2_\nu)$ em função do número de graus de liberdade ν e do χ^2 reduzido χ^2_ν/ν tal que $P(\chi^2_\nu) = \frac{1}{\sqrt{2^\nu}\Gamma(\frac{1}{2}\nu)/\nu}\int_0^{\chi^2_\nu} e^{-\frac{1}{2}t} t^{\frac{1}{2}N-1} dt$. - continuação

χ^2_ν/ν	1.00	1.10	1.20	1.30	1.40	1.50	1.60	1.70	1.80	1.90
ν										
1	0.6827	0.7057	0.7267	0.7458	0.7633	0.7793	0.7941	0.8077	0.8203	0.8319
2	0.6321	0.6671	0.6988	0.7275	0.7534	0.7769	0.7981	0.8173	0.8347	0.8504
3	0.6084	0.6524	0.6920	0.7275	0.7593	0.7877	0.8130	0.8354	0.8553	0.8728
4	0.5940	0.6454	0.6916	0.7326	0.7689	0.8009	0.8288	0.8532	0.8743	0.8926
5	0.5841	0.6421	0.6938	0.7394	0.7794	0.8140	0.8438	0.8693	0.8909	0.9093
6	0.5768	0.6406	0.6973	0.7469	0.7898	0.8264	0.8575	0.8835	0.9052	0.9232
7	0.5711	0.6402	0.7014	0.7544	0.7998	0.8380	0.8699	0.8961	0.9175	0.9349
8	0.5665	0.6406	0.7058	0.7619	0.8094	0.8488	0.8811	0.9072	0.9281	0.9446
9	0.5627	0.6414	0.7103	0.7692	0.8184	0.8587	0.8912	0.9170	0.9372	0.9528
10	0.5595	0.6425	0.7149	0.7763	0.8270	0.8679	0.9004	0.9256	0.9450	0.9597
11	0.5567	0.6438	0.7195	0.7832	0.8351	0.8764	0.9087	0.9333	0.9518	0.9656
12	0.5543	0.6453	0.7241	0.7897	0.8427	0.8843	0.9162	0.9401	0.9577	0.9705
13	0.5522	0.6469	0.7286	0.7961	0.8499	0.8916	0.9230	0.9462	0.9629	0.9747
14	0.5503	0.6486	0.7330	0.8022	0.8567	0.8984	0.9292	0.9516	0.9674	0.9783
15	0.5486	0.6504	0.7373	0.8080	0.8632	0.9047	0.9349	0.9564	0.9713	0.9814
16	0.5470	0.6522	0.7416	0.8137	0.8693	0.9105	0.9401	0.9607	0.9747	0.9840
17	0.5456	0.6540	0.7457	0.8191	0.8750	0.9159	0.9448	0.9645	0.9777	0.9862
18	0.5443	0.6558	0.7498	0.8243	0.8805	0.9210	0.9491	0.9680	0.9803	0.9881
19	0.5432	0.6576	0.7537	0.8293	0.8857	0.9257	0.9531	0.9711	0.9826	0.9897
20	0.5421	0.6595	0.7576	0.8342	0.8906	0.9301	0.9567	0.9739	0.9846	0.9911
21	0.5411	0.6613	0.7614	0.8389	0.8953	0.9343	0.9600	0.9764	0.9864	0.9924
22	0.5401	0.6632	0.7651	0.8434	0.8997	0.9381	0.9631	0.9786	0.9880	0.9934
23	0.5392	0.6650	0.7687	0.8477	0.9039	0.9417	0.9659	0.9807	0.9893	0.9943
24	0.5384	0.6668	0.7723	0.8519	0.9080	0.9451	0.9685	0.9825	0.9906	0.9951
25	0.5376	0.6686	0.7757	0.8560	0.9118	0.9483	0.9708	0.9841	0.9916	0.9957
26	0.5369	0.6704	0.7791	0.8599	0.9154	0.9512	0.9730	0.9856	0.9926	0.9963
27	0.5362	0.6722	0.7824	0.8636	0.9189	0.9540	0.9750	0.9870	0.9934	0.9968
28	0.5356	0.6740	0.7856	0.8673	0.9222	0.9566	0.9769	0.9882	0.9942	0.9972
29	0.5349	0.6757	0.7888	0.8708	0.9254	0.9591	0.9786	0.9893	0.9948	0.9976
30	0.5343	0.6775	0.7919	0.8743	0.9284	0.9614	0.9802	0.9903	0.9954	0.9979
32	0.5333	0.6809	0.7979	0.8808	0.9341	0.9656	0.9830	0.9920	0.9964	0.9984
34	0.5323	0.6843	0.8037	0.8869	0.9392	0.9693	0.9854	0.9934	0.9971	0.9988
36	0.5314	0.6876	0.8093	0.8927	0.9439	0.9726	0.9874	0.9945	0.9977	0.9991
38	0.5305	0.6908	0.8146	0.8981	0.9482	0.9755	0.9892	0.9955	0.9982	0.9993
40	0.5297	0.6940	0.8197	0.9032	0.9522	0.9781	0.9907	0.9963	0.9986	0.9995
45	0.5280	0.7017	0.8318	0.9147	0.9607	0.9834	0.9935	0.9977	0.9992	0.9997
50	0.5266	0.7090	0.8428	0.9246	0.9676	0.9874	0.9955	0.9985	0.9996	0.9999
55	0.5254	0.7160	0.8528	0.9333	0.9733	0.9904	0.9969	0.9991	0.9997	0.9999
60	0.5243	0.7227	0.8621	0.9409	0.9779	0.9927	0.9978	0.9994	0.9999	1.0000
70	0.5225	0.7353	0.8786	0.9533	0.9847	0.9957	0.9989	0.9998	1.0000	1.0000
80	0.5210	0.7469	0.8927	0.9630	0.9894	0.9975	0.9995	0.9999	1.0000	1.0000
90	0.5198	0.7577	0.9050	0.9706	0.9926	0.9985	0.9997	1.0000	1.0000	1.0000
100	0.5188	0.7678	0.9156	0.9765	0.9949	0.9991	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000

Tabela A.4-c: Distribuição de χ^2: Valores da probabilidade $P(\chi^2_\nu)$ em função do número de graus de liberdade ν e do χ^2 reduzido χ^2_ν/ν tal que $P(\chi^2_\nu) = \frac{1}{\sqrt{2^\nu}\Gamma(\frac{1}{2}\nu)/\nu}\int_0^{\chi^2_\nu} e^{-\frac{1}{2}t}t^{\frac{1}{2}N-1}dt$. - continuação

χ^2_ν/ν	2.00	2.10	2.20	2.30	2.40	2.50	2.60	2.70	2.80	2.90
ν										
1	0.8427	0.8527	0.8620	0.8706	0.8787	0.8862	0.8931	0.8997	0.9057	0.9114
2	0.8647	0.8775	0.8892	0.8997	0.9093	0.9179	0.9257	0.9328	0.9392	0.9450
3	0.8884	0.9021	0.9142	0.9248	0.9342	0.9424	0.9497	0.9560	0.9616	0.9664
4	0.9084	0.9220	0.9337	0.9437	0.9523	0.9596	0.9658	0.9711	0.9756	0.9794
5	0.9248	0.9378	0.9486	0.9577	0.9652	0.9715	0.9766	0.9809	0.9844	0.9873
6	0.9380	0.9502	0.9600	0.9680	0.9745	0.9797	0.9839	0.9873	0.9900	0.9921
7	0.9488	0.9600	0.9688	0.9758	0.9813	0.9856	0.9889	0.9915	0.9935	0.9950
8	0.9576	0.9677	0.9756	0.9816	0.9862	0.9897	0.9923	0.9943	0.9958	0.9969
9	0.9648	0.9739	0.9808	0.9859	0.9898	0.9926	0.9946	0.9961	0.9972	0.9980
10	0.9707	0.9789	0.9849	0.9893	0.9924	0.9947	0.9963	0.9974	0.9982	0.9988
11	0.9756	0.9829	0.9881	0.9918	0.9943	0.9961	0.9974	0.9982	0.9988	0.9992
12	0.9797	0.9861	0.9906	0.9937	0.9958	0.9972	0.9982	0.9988	0.9992	0.9995
13	0.9830	0.9887	0.9925	0.9951	0.9968	0.9980	0.9987	0.9992	0.9995	0.9997
14	0.9858	0.9908	0.9941	0.9962	0.9976	0.9985	0.9991	0.9994	0.9997	0.9998
15	0.9881	0.9925	0.9953	0.9971	0.9982	0.9989	0.9994	0.9996	0.9998	0.9999
16	0.9900	0.9939	0.9963	0.9978	0.9987	0.9992	0.9995	0.9997	0.9999	0.9999
17	0.9916	0.9950	0.9970	0.9983	0.9990	0.9994	0.9997	0.9998	0.9999	0.9999
18	0.9929	0.9959	0.9976	0.9987	0.9993	0.9996	0.9998	0.9999	0.9999	1.0000
19	0.9941	0.9966	0.9981	0.9990	0.9994	0.9997	0.9998	0.9999	1.0000	1.0000
20	0.9950	0.9972	0.9985	0.9992	0.9996	0.9998	0.9999	0.9999	1.0000	1.0000
21	0.9958	0.9977	0.9988	0.9994	0.9997	0.9998	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000
22	0.9965	0.9981	0.9990	0.9995	0.9998	0.9999	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000
23	0.9970	0.9985	0.9992	0.9996	0.9998	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
24	0.9975	0.9987	0.9994	0.9997	0.9999	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
25	0.9979	0.9990	0.9995	0.9998	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
26	0.9982	0.9991	0.9996	0.9998	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
27	0.9985	0.9993	0.9997	0.9999	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
28	0.9987	0.9994	0.9997	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
29	0.9989	0.9995	0.9998	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
30	0.9991	0.9996	0.9998	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
32	0.9993	0.9997	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
34	0.9995	0.9998	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
36	0.9997	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
38	0.9998	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
40	0.9998	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
45	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabela A.4-d: Distribuição de χ^2: Valores da probabilidade $P(\chi^2_\nu)$ em função do número de graus de liberdade ν e do χ^2 reduzido χ^2_ν/ν tal que $P(\chi^2_\nu) = \frac{1}{\sqrt{2^\nu}\Gamma(\frac{1}{2}\nu)/\nu} \int_0^{\chi^2_\nu} e^{-\frac{1}{2}t} t^{\frac{1}{2}N-1} dt$. - continuação

χ^2_ν/ν	3.00	3.50	4.00	4.50	5.00	5.50	6.00	6.50	7.00	7.50
ν										
1	0.9167	0.9386	0.9545	0.9661	0.9747	0.9810	0.9857	0.9892	0.9918	0.9938
2	0.9502	0.9698	0.9817	0.9889	0.9933	0.9959	0.9975	0.9985	0.9991	0.9994
3	0.9707	0.9852	0.9926	0.9963	0.9982	0.9991	0.9996	0.9998	0.9999	0.9999
4	0.9826	0.9927	0.9970	0.9988	0.9995	0.9998	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000
5	0.9896	0.9964	0.9988	0.9996	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
6	0.9938	0.9982	0.9995	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
7	0.9962	0.9991	0.9998	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
8	0.9977	0.9995	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
9	0.9986	0.9998	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
10	0.9991	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
11	0.9995	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
12	0.9997	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
13	0.9998	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
14	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
15	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabela A.5: Distribuição t de Student: Valores de t_ν em função do número de graus de liberdade ν e da probabilidade $P(t_\nu)$ tal que $P(t_\nu) = \dfrac{\Gamma(\frac{1}{2}(\nu+1))}{\sqrt{\pi\nu}\,\Gamma(\frac{1}{2}\nu)} \displaystyle\int_{-t}^{t} \left(1+\frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{1}{2}(\nu+1)} dx$. As colunas em **negrito** correspondem a uma probabilidade equivalente a σ, 2σ e 3σ da distribuição normal.

$P(t\|\nu)$	0.25	0.50	**0.683**	0.75	0.90	0.95	**0.954**	0.99	0.997	0.999
ν										
1	0.414	1.000	**1.837**	2.414	6.314	12.71	**13.97**	63.65	**235.7**	632.0
2	0.365	0.816	**1.321**	1.604	2.920	4.303	**4.527**	9.925	**19.21**	31.60
3	0.349	0.765	**1.197**	1.423	2.353	3.182	**3.307**	5.841	**9.219**	12.92
4	0.341	0.741	**1.142**	1.344	2.132	2.776	**2.869**	4.604	**6.620**	8.610
5	0.337	0.727	**1.111**	1.301	2.015	2.571	**2.649**	4.032	**5.507**	6.869
6	0.334	0.718	**1.091**	1.273	1.943	2.447	**2.517**	3.707	**4.904**	5.959
7	0.331	0.711	**1.077**	1.254	1.895	2.365	**2.429**	3.499	**4.530**	5.408
8	0.330	0.706	**1.067**	1.240	1.860	2.306	**2.366**	3.355	**4.277**	5.041
9	0.329	0.703	**1.059**	1.230	1.833	2.262	**2.320**	3.250	**4.094**	4.781
10	0.328	0.700	**1.053**	1.221	1.812	2.228	**2.284**	3.169	**3.957**	4.587
11	0.327	0.697	**1.048**	1.214	1.796	2.201	**2.255**	3.106	**3.850**	4.437
12	0.326	0.695	**1.043**	1.209	1.782	2.179	**2.231**	3.055	**3.764**	4.318
13	0.325	0.694	**1.040**	1.204	1.771	2.160	**2.212**	3.012	**3.694**	4.221
14	0.325	0.692	**1.037**	1.200	1.761	2.145	**2.195**	2.977	**3.636**	4.140
15	0.325	0.691	**1.034**	1.197	1.753	2.131	**2.181**	2.947	**3.586**	4.073
16	0.324	0.690	**1.032**	1.194	1.746	2.120	**2.169**	2.921	**3.544**	4.015
17	0.324	0.689	**1.030**	1.191	1.740	2.110	**2.158**	2.898	**3.507**	3.965
18	0.324	0.688	**1.029**	1.189	1.734	2.101	**2.149**	2.878	**3.475**	3.922
19	0.323	0.688	**1.027**	1.187	1.729	2.093	**2.140**	2.861	**3.447**	3.883
20	0.323	0.687	**1.026**	1.185	1.725	2.086	**2.133**	2.845	**3.422**	3.850
21	0.323	0.686	**1.024**	1.183	1.721	2.080	**2.126**	2.831	**3.400**	3.819
22	0.323	0.686	**1.023**	1.182	1.717	2.074	**2.120**	2.819	**3.380**	3.792
23	0.322	0.685	**1.022**	1.180	1.714	2.069	**2.115**	2.807	**3.361**	3.768
24	0.322	0.685	**1.021**	1.179	1.711	2.064	**2.110**	2.797	**3.345**	3.745
25	0.322	0.684	**1.020**	1.178	1.708	2.060	**2.105**	2.787	**3.330**	3.725
26	0.322	0.684	**1.020**	1.177	1.706	2.056	**2.101**	2.779	**3.316**	3.707
27	0.322	0.684	**1.019**	1.176	1.703	2.052	**2.097**	2.771	**3.303**	3.690
28	0.322	0.683	**1.018**	1.175	1.701	2.048	**2.093**	2.763	**3.291**	3.674
29	0.322	0.683	**1.018**	1.174	1.699	2.045	**2.090**	2.756	**3.280**	3.659
30	0.322	0.683	**1.017**	1.173	1.697	2.042	**2.087**	2.750	**3.270**	3.646
32	0.321	0.682	**1.016**	1.172	1.694	2.037	**2.081**	2.738	**3.252**	3.622
34	0.321	0.682	**1.015**	1.170	1.691	2.032	**2.076**	2.728	**3.236**	3.601
36	0.321	0.681	**1.014**	1.169	1.688	2.028	**2.072**	2.719	**3.222**	3.582
38	0.321	0.681	**1.013**	1.168	1.686	2.024	**2.068**	2.712	**3.210**	3.566
40	0.321	0.681	**1.013**	1.167	1.684	2.021	**2.064**	2.704	**3.199**	3.551
45	0.321	0.680	**1.011**	1.165	1.679	2.014	**2.057**	2.690	**3.176**	3.520
50	0.320	0.679	**1.010**	1.164	1.676	2.009	**2.051**	2.678	**3.157**	3.496
55	0.320	0.679	**1.009**	1.163	1.673	2.004	**2.046**	2.668	**3.142**	3.476
60	0.320	0.679	**1.008**	1.162	1.671	2.000	**2.043**	2.660	**3.130**	3.460
70	0.320	0.678	**1.007**	1.160	1.667	1.994	**2.036**	2.648	**3.111**	3.435
80	0.320	0.678	**1.006**	1.159	1.664	1.990	**2.032**	2.639	**3.096**	3.416
90	0.320	0.677	**1.006**	1.158	1.662	1.987	**2.028**	2.632	**3.085**	3.402
100	0.320	0.677	**1.005**	1.157	1.660	1.984	**2.025**	2.626	**3.077**	3.391

Tabela A.6-a: Distribuição t de Student: Valores de $P(t_\nu) = \dfrac{\Gamma(\frac{1}{2}(\nu+1))}{\sqrt{\pi\nu}\,\Gamma(\frac{1}{2}\nu)} \displaystyle\int_{-t}^{t} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{1}{2}(\nu+1)} dx$ em função do número de graus de liberdade ν e t_ν)

t_ν	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90
ν										
1	0.0000	0.0635	0.1257	0.1855	0.2422	0.2952	0.3440	0.3888	0.4296	0.4665
2	0.0000	0.0705	0.1400	0.2075	0.2722	0.3333	0.3906	0.4436	0.4924	0.5369
3	0.0000	0.0733	0.1457	0.2162	0.2841	0.3486	0.4092	0.4657	0.5178	0.5655
4	0.0000	0.0748	0.1488	0.2209	0.2904	0.3567	0.4192	0.4775	0.5315	0.5810
5	0.0000	0.0758	0.1506	0.2238	0.2943	0.3617	0.4253	0.4849	0.5400	0.5906
6	0.0000	0.0764	0.1519	0.2257	0.2970	0.3651	0.4295	0.4899	0.5458	0.5972
7	0.0000	0.0769	0.1528	0.2271	0.2989	0.3676	0.4326	0.4935	0.5500	0.6020
8	0.0000	0.0772	0.1535	0.2282	0.3004	0.3695	0.4349	0.4962	0.5532	0.6056
9	0.0000	0.0775	0.1541	0.2290	0.3015	0.3709	0.4367	0.4984	0.5557	0.6084
10	0.0000	0.0777	0.1545	0.2297	0.3024	0.3721	0.4381	0.5001	0.5577	0.6107
11	0.0000	0.0779	0.1549	0.2302	0.3032	0.3731	0.4393	0.5015	0.5594	0.6126
12	0.0000	0.0780	0.1552	0.2307	0.3038	0.3739	0.4403	0.5027	0.5607	0.6142
13	0.0000	0.0781	0.1554	0.2311	0.3043	0.3746	0.4412	0.5037	0.5619	0.6155
14	0.0000	0.0782	0.1556	0.2314	0.3048	0.3752	0.4419	0.5046	0.5629	0.6167
15	0.0000	0.0783	0.1558	0.2317	0.3052	0.3757	0.4425	0.5054	0.5638	0.6177
16	0.0000	0.0784	0.1560	0.2320	0.3056	0.3761	0.4431	0.5060	0.5646	0.6185
17	0.0000	0.0785	0.1561	0.2322	0.3059	0.3765	0.4436	0.5066	0.5653	0.6193
18	0.0000	0.0786	0.1563	0.2324	0.3061	0.3769	0.4440	0.5071	0.5659	0.6200
19	0.0000	0.0786	0.1564	0.2326	0.3064	0.3772	0.4444	0.5076	0.5664	0.6206
20	0.0000	0.0787	0.1565	0.2327	0.3066	0.3775	0.4448	0.5080	0.5669	0.6212
21	0.0000	0.0787	0.1566	0.2329	0.3068	0.3777	0.4451	0.5084	0.5673	0.6217
22	0.0000	0.0788	0.1567	0.2330	0.3070	0.3780	0.4454	0.5087	0.5677	0.6221
23	0.0000	0.0788	0.1568	0.2331	0.3072	0.3782	0.4456	0.5091	0.5681	0.6226
24	0.0000	0.0788	0.1568	0.2332	0.3073	0.3784	0.4459	0.5093	0.5684	0.6229
25	0.0000	0.0789	0.1569	0.2333	0.3074	0.3786	0.4461	0.5096	0.5688	0.6233
26	0.0000	0.0789	0.1570	0.2334	0.3076	0.3787	0.4463	0.5099	0.5690	0.6236
27	0.0000	0.0789	0.1570	0.2335	0.3077	0.3789	0.4465	0.5101	0.5693	0.6239
28	0.0000	0.0789	0.1571	0.2336	0.3078	0.3790	0.4467	0.5103	0.5696	0.6242
29	0.0000	0.0790	0.1571	0.2337	0.3079	0.3792	0.4468	0.5105	0.5698	0.6245
30	0.0000	0.0790	0.1572	0.2338	0.3080	0.3793	0.4470	0.5107	0.5700	0.6247
32	0.0000	0.0790	0.1573	0.2339	0.3082	0.3795	0.4473	0.5110	0.5704	0.6252
34	0.0000	0.0791	0.1573	0.2340	0.3083	0.3797	0.4475	0.5113	0.5707	0.6255
36	0.0000	0.0791	0.1574	0.2341	0.3085	0.3799	0.4477	0.5116	0.5710	0.6259
38	0.0000	0.0791	0.1575	0.2342	0.3086	0.3800	0.4479	0.5118	0.5713	0.6262
40	0.0000	0.0792	0.1575	0.2343	0.3087	0.3802	0.4481	0.5120	0.5716	0.6265
45	0.0000	0.0792	0.1576	0.2344	0.3090	0.3805	0.4485	0.5125	0.5721	0.6271
50	0.0000	0.0793	0.1577	0.2346	0.3091	0.3807	0.4488	0.5128	0.5725	0.6276
55	0.0000	0.0793	0.1578	0.2347	0.3093	0.3809	0.4490	0.5131	0.5728	0.6280
60	0.0000	0.0793	0.1578	0.2348	0.3094	0.3811	0.4492	0.5134	0.5731	0.6283
70	0.0000	0.0794	0.1579	0.2349	0.3096	0.3814	0.4496	0.5138	0.5736	0.6288
80	0.0000	0.0794	0.1580	0.2350	0.3098	0.3816	0.4498	0.5140	0.5739	0.6292
90	0.0000	0.0794	0.1581	0.2351	0.3099	0.3817	0.4500	0.5143	0.5742	0.6295
100	0.0000	0.0795	0.1581	0.2352	0.3100	0.3818	0.4501	0.5144	0.5744	0.6297

Tabela A.6-b: Distribuição t de Student: Valores de $P(t_\nu) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}(\nu+1))}{\sqrt{\pi\nu}\Gamma(\frac{1}{2}\nu)} \int_{-t}^{t} \left(1+\frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{1}{2}(\nu+1)} dx$ em função do número de graus de liberdade ν e t_ν) - continuação

t_ν / ν	1.00	1.10	1.20	1.30	1.40	1.50	1.60	1.70	1.80	1.90
1	0.5000	0.5303	0.5577	0.5826	0.6051	0.6257	0.6444	0.6615	0.6772	0.6916
2	0.5774	0.6140	0.6470	0.6768	0.7035	0.7276	0.7493	0.7688	0.7863	0.8022
3	0.6090	0.6483	0.6837	0.7155	0.7440	0.7694	0.7921	0.8123	0.8303	0.8464
4	0.6261	0.6669	0.7036	0.7365	0.7659	0.7920	0.8152	0.8356	0.8538	0.8698
5	0.6368	0.6785	0.7161	0.7497	0.7796	0.8061	0.8295	0.8501	0.8682	0.8841
6	0.6441	0.6865	0.7246	0.7587	0.7890	0.8157	0.8393	0.8600	0.8780	0.8938
7	0.6494	0.6923	0.7308	0.7652	0.7958	0.8227	0.8464	0.8671	0.8851	0.9008
8	0.6534	0.6967	0.7355	0.7702	0.8009	0.8280	0.8517	0.8724	0.8904	0.9060
9	0.6566	0.7001	0.7392	0.7741	0.8050	0.8321	0.8559	0.8767	0.8946	0.9101
10	0.6591	0.7029	0.7422	0.7772	0.8082	0.8355	0.8593	0.8800	0.8979	0.9134
11	0.6612	0.7052	0.7447	0.7798	0.8109	0.8382	0.8621	0.8828	0.9007	0.9160
12	0.6630	0.7071	0.7467	0.7820	0.8132	0.8405	0.8644	0.8851	0.9030	0.9183
13	0.6644	0.7087	0.7484	0.7838	0.8151	0.8425	0.8664	0.8871	0.9049	0.9202
14	0.6657	0.7101	0.7499	0.7854	0.8167	0.8442	0.8681	0.8888	0.9066	0.9218
15	0.6668	0.7113	0.7513	0.7868	0.8181	0.8456	0.8696	0.8902	0.9080	0.9232
16	0.6678	0.7124	0.7524	0.7880	0.8194	0.8469	0.8708	0.8915	0.9093	0.9244
17	0.6687	0.7133	0.7534	0.7890	0.8205	0.8480	0.8720	0.8926	0.9104	0.9255
18	0.6694	0.7142	0.7543	0.7900	0.8215	0.8490	0.8730	0.8937	0.9114	0.9264
19	0.6701	0.7149	0.7551	0.7908	0.8224	0.8500	0.8739	0.8946	0.9122	0.9273
20	0.6707	0.7156	0.7558	0.7916	0.8232	0.8508	0.8747	0.8954	0.9130	0.9281
21	0.6713	0.7162	0.7565	0.7923	0.8239	0.8515	0.8755	0.8961	0.9138	0.9287
22	0.6718	0.7168	0.7571	0.7929	0.8245	0.8522	0.8761	0.8968	0.9144	0.9294
23	0.6723	0.7173	0.7576	0.7935	0.8251	0.8528	0.8768	0.8974	0.9150	0.9300
24	0.6727	0.7178	0.7581	0.7941	0.8257	0.8533	0.8773	0.8979	0.9156	0.9305
25	0.6731	0.7182	0.7586	0.7945	0.8262	0.8539	0.8778	0.8985	0.9161	0.9310
26	0.6735	0.7186	0.7590	0.7950	0.8267	0.8543	0.8783	0.8989	0.9165	0.9314
27	0.6738	0.7190	0.7594	0.7954	0.8271	0.8548	0.8788	0.8994	0.9170	0.9318
28	0.6741	0.7193	0.7598	0.7958	0.8275	0.8552	0.8792	0.8998	0.9174	0.9322
29	0.6744	0.7196	0.7601	0.7962	0.8279	0.8556	0.8796	0.9002	0.9177	0.9326
30	0.6747	0.7199	0.7605	0.7965	0.8282	0.8559	0.8799	0.9005	0.9181	0.9329
32	0.6752	0.7205	0.7611	0.7971	0.8289	0.8566	0.8806	0.9012	0.9187	0.9335
34	0.6756	0.7209	0.7616	0.7977	0.8294	0.8572	0.8811	0.9017	0.9193	0.9341
36	0.6760	0.7214	0.7620	0.7981	0.8299	0.8577	0.8817	0.9022	0.9198	0.9345
38	0.6764	0.7217	0.7624	0.7986	0.8304	0.8581	0.8821	0.9027	0.9202	0.9350
40	0.6767	0.7221	0.7628	0.7990	0.8308	0.8585	0.8825	0.9031	0.9206	0.9353
45	0.6773	0.7228	0.7636	0.7998	0.8316	0.8594	0.8834	0.9040	0.9214	0.9361
50	0.6779	0.7234	0.7642	0.8004	0.8323	0.8601	0.8841	0.9047	0.9221	0.9368
55	0.6783	0.7239	0.7647	0.8010	0.8329	0.8607	0.8847	0.9052	0.9227	0.9373
60	0.6787	0.7243	0.7651	0.8014	0.8333	0.8611	0.8851	0.9057	0.9231	0.9378
70	0.6792	0.7249	0.7658	0.8021	0.8341	0.8619	0.8859	0.9064	0.9238	0.9384
80	0.6797	0.7254	0.7663	0.8027	0.8346	0.8624	0.8865	0.9070	0.9244	0.9390
90	0.6800	0.7257	0.7667	0.8031	0.8350	0.8629	0.8869	0.9074	0.9248	0.9394
100	0.6803	0.7260	0.7670	0.8034	0.8354	0.8632	0.8872	0.9078	0.9251	0.9397

Tabela A.6-c: Distribuição t de Student: Valores de $P(t_\nu) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}(\nu+1))}{\sqrt{\pi\nu}\,\Gamma(\frac{1}{2}\nu)} \int_{-t}^{t} \left(1+\frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{1}{2}(\nu+1)} dx$ em função do número de graus de liberdade ν e t_ν) - continuação

t_ν / ν	2.00	2.10	2.20	2.30	2.40	2.50	2.60	2.70	2.80	2.90
1	0.7048	0.7171	0.7284	0.7389	0.7487	0.7578	0.7662	0.7742	0.7816	0.7886
2	0.8165	0.8295	0.8412	0.8519	0.8615	0.8704	0.8785	0.8858	0.8926	0.8988
3	0.8607	0.8734	0.8848	0.8950	0.9041	0.9123	0.9196	0.9262	0.9321	0.9375
4	0.8839	0.8963	0.9073	0.9171	0.9256	0.9332	0.9400	0.9459	0.9512	0.9559
5	0.8981	0.9102	0.9209	0.9302	0.9384	0.9455	0.9518	0.9572	0.9620	0.9662
6	0.9076	0.9195	0.9299	0.9389	0.9467	0.9535	0.9593	0.9644	0.9688	0.9727
7	0.9144	0.9261	0.9363	0.9450	0.9525	0.9590	0.9646	0.9694	0.9735	0.9770
8	0.9195	0.9311	0.9410	0.9495	0.9568	0.9631	0.9684	0.9729	0.9768	0.9801
9	0.9234	0.9349	0.9447	0.9530	0.9601	0.9661	0.9713	0.9756	0.9793	0.9824
10	0.9266	0.9379	0.9476	0.9557	0.9627	0.9686	0.9735	0.9777	0.9812	0.9842
11	0.9292	0.9404	0.9499	0.9580	0.9648	0.9705	0.9753	0.9793	0.9827	0.9856
12	0.9313	0.9425	0.9519	0.9598	0.9665	0.9721	0.9768	0.9807	0.9840	0.9867
13	0.9332	0.9442	0.9535	0.9613	0.9679	0.9734	0.9780	0.9818	0.9850	0.9876
14	0.9347	0.9457	0.9549	0.9626	0.9691	0.9745	0.9790	0.9827	0.9858	0.9884
15	0.9361	0.9469	0.9561	0.9638	0.9702	0.9755	0.9799	0.9835	0.9865	0.9890
16	0.9372	0.9481	0.9572	0.9648	0.9711	0.9763	0.9807	0.9842	0.9872	0.9896
17	0.9383	0.9490	0.9581	0.9656	0.9719	0.9771	0.9813	0.9848	0.9877	0.9900
18	0.9392	0.9499	0.9589	0.9664	0.9726	0.9777	0.9819	0.9853	0.9882	0.9905
19	0.9400	0.9507	0.9596	0.9670	0.9732	0.9783	0.9824	0.9858	0.9886	0.9908
20	0.9407	0.9514	0.9603	0.9677	0.9738	0.9788	0.9829	0.9862	0.9889	0.9911
21	0.9414	0.9520	0.9609	0.9682	0.9743	0.9792	0.9833	0.9866	0.9893	0.9914
22	0.9420	0.9526	0.9614	0.9687	0.9747	0.9796	0.9837	0.9869	0.9896	0.9917
23	0.9426	0.9531	0.9619	0.9691	0.9751	0.9800	0.9840	0.9872	0.9898	0.9919
24	0.9431	0.9536	0.9623	0.9696	0.9755	0.9803	0.9843	0.9875	0.9901	0.9921
25	0.9435	0.9540	0.9627	0.9699	0.9758	0.9807	0.9846	0.9877	0.9903	0.9923
26	0.9440	0.9544	0.9631	0.9703	0.9761	0.9809	0.9848	0.9880	0.9905	0.9925
27	0.9443	0.9548	0.9635	0.9706	0.9764	0.9812	0.9851	0.9882	0.9907	0.9927
28	0.9447	0.9551	0.9638	0.9709	0.9767	0.9814	0.9853	0.9884	0.9908	0.9928
29	0.9451	0.9555	0.9641	0.9712	0.9770	0.9817	0.9855	0.9885	0.9910	0.9930
30	0.9454	0.9558	0.9644	0.9714	0.9772	0.9819	0.9857	0.9887	0.9911	0.9931
32	0.9460	0.9563	0.9649	0.9719	0.9776	0.9823	0.9860	0.9890	0.9914	0.9933
34	0.9465	0.9568	0.9653	0.9723	0.9780	0.9826	0.9863	0.9893	0.9916	0.9935
36	0.9469	0.9572	0.9657	0.9726	0.9783	0.9829	0.9866	0.9895	0.9918	0.9937
38	0.9473	0.9576	0.9660	0.9730	0.9786	0.9831	0.9868	0.9897	0.9920	0.9938
40	0.9477	0.9579	0.9664	0.9733	0.9789	0.9834	0.9870	0.9899	0.9922	0.9940
45	0.9484	0.9586	0.9670	0.9739	0.9794	0.9839	0.9874	0.9903	0.9925	0.9942
50	0.9491	0.9592	0.9675	0.9743	0.9798	0.9843	0.9878	0.9906	0.9928	0.9945
55	0.9496	0.9597	0.9680	0.9747	0.9802	0.9846	0.9881	0.9908	0.9930	0.9946
60	0.9500	0.9601	0.9683	0.9751	0.9805	0.9848	0.9883	0.9910	0.9931	0.9948
70	0.9506	0.9607	0.9689	0.9756	0.9809	0.9852	0.9886	0.9913	0.9934	0.9950
80	0.9511	0.9611	0.9693	0.9759	0.9813	0.9855	0.9889	0.9915	0.9936	0.9952
90	0.9515	0.9615	0.9696	0.9762	0.9815	0.9858	0.9891	0.9917	0.9937	0.9953
100	0.9518	0.9618	0.9699	0.9765	0.9818	0.9860	0.9893	0.9919	0.9939	0.9954

Tabela A.6-d: Distribuição t de Student: Valores de $P(t_\nu) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}(\nu+1))}{\sqrt{\pi\nu}\Gamma(\frac{1}{2}\nu)} \int_{-t}^{t} \left(1+\frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{1}{2}(\nu+1)} dx$ em função do número de graus de liberdade ν e t_ν) - continuação

t_ν / ν	3.00	3.50	4.00	4.50	5.00	5.50	6.00	6.50	7.00	7.50
1	0.7952	0.8228	0.8440	0.8608	0.8743	0.8855	0.8949	0.9028	0.9097	0.9156
2	0.9045	0.9272	0.9428	0.9540	0.9623	0.9685	0.9733	0.9771	0.9802	0.9827
3	0.9423	0.9605	0.9720	0.9795	0.9846	0.9882	0.9907	0.9926	0.9940	0.9951
4	0.9601	0.9751	0.9839	0.9892	0.9925	0.9947	0.9961	0.9971	0.9978	0.9983
5	0.9699	0.9827	0.9897	0.9936	0.9959	0.9973	0.9982	0.9987	0.9991	0.9993
6	0.9760	0.9872	0.9929	0.9959	0.9975	0.9985	0.9990	0.9994	0.9996	0.9997
7	0.9801	0.9900	0.9948	0.9972	0.9984	0.9991	0.9995	0.9997	0.9998	0.9999
8	0.9829	0.9919	0.9961	0.9980	0.9989	0.9994	0.9997	0.9998	0.9999	0.9999
9	0.9850	0.9933	0.9969	0.9985	0.9993	0.9996	0.9998	0.9999	0.9999	1.0000
10	0.9867	0.9943	0.9975	0.9989	0.9995	0.9997	0.9999	0.9999	1.0000	1.0000
11	0.9879	0.9950	0.9979	0.9991	0.9996	0.9998	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000
12	0.9889	0.9956	0.9982	0.9993	0.9997	0.9999	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000
13	0.9898	0.9961	0.9985	0.9994	0.9998	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
14	0.9904	0.9965	0.9987	0.9995	0.9998	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
15	0.9910	0.9968	0.9988	0.9996	0.9998	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
16	0.9915	0.9970	0.9990	0.9996	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
17	0.9919	0.9973	0.9991	0.9997	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
18	0.9923	0.9974	0.9992	0.9997	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
19	0.9926	0.9976	0.9992	0.9998	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
20	0.9929	0.9977	0.9993	0.9998	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
21	0.9932	0.9979	0.9994	0.9998	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
22	0.9934	0.9980	0.9994	0.9998	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
23	0.9936	0.9981	0.9994	0.9998	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
24	0.9938	0.9982	0.9995	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
25	0.9940	0.9982	0.9995	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
26	0.9941	0.9983	0.9995	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
27	0.9943	0.9984	0.9996	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
28	0.9944	0.9984	0.9996	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
29	0.9945	0.9985	0.9996	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
30	0.9946	0.9985	0.9996	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
32	0.9948	0.9986	0.9996	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
34	0.9950	0.9987	0.9997	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
36	0.9951	0.9987	0.9997	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
38	0.9953	0.9988	0.9997	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
40	0.9954	0.9988	0.9997	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
45	0.9956	0.9989	0.9998	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
50	0.9958	0.9990	0.9998	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
55	0.9959	0.9991	0.9998	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
60	0.9961	0.9991	0.9998	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
70	0.9963	0.9992	0.9998	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
80	0.9964	0.9992	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
90	0.9965	0.9993	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
100	0.9966	0.9993	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabela A.7-a: Distribuição F de Fisher: valores de F em função dos números de graus de liberdade ν_1 e ν_2 tais que $Q(F|\nu_1,\nu_2) = \int_F^\infty F(x,\nu_1,\nu_2)dx = 0.500$

ν_1 / ν_2	1	2	3	4	5	6	8	12	15	20	30	60	100
1	1.0000	1.500	1.709	1.823	1.894	1.942	2.004	2.067	2.093	2.119	2.145	2.172	2.182
2	0.6667	1.0000	1.135	1.207	1.252	1.282	1.321	1.361	1.377	1.393	1.410	1.426	1.433
3	0.5851	0.8811	1.0000	1.063	1.102	1.129	1.163	1.197	1.211	1.225	1.239	1.254	1.259
4	0.5486	0.8284	0.9405	1.0000	1.037	1.062	1.093	1.126	1.139	1.152	1.165	1.178	1.184
5	0.5281	0.7988	0.9071	0.9646	1.0000	1.024	1.055	1.085	1.098	1.111	1.123	1.136	1.141
6	0.5149	0.7798	0.8858	0.9419	0.9765	1.0000	1.030	1.060	1.072	1.084	1.097	1.109	1.114
7	0.5057	0.7665	0.8709	0.9262	0.9603	0.9833	1.013	1.042	1.054	1.066	1.079	1.091	1.096
8	0.4990	0.7568	0.8600	0.9146	0.9483	0.9711	1.0000	1.029	1.041	1.053	1.065	1.077	1.082
9	0.4938	0.7494	0.8517	0.9058	0.9392	0.9617	0.9904	1.019	1.031	1.043	1.055	1.067	1.072
10	0.4897	0.7435	0.8451	0.8988	0.9319	0.9544	0.9828	1.012	1.023	1.035	1.047	1.059	1.063
11	0.4864	0.7387	0.8397	0.8932	0.9261	0.9484	0.9766	1.005	1.017	1.028	1.040	1.052	1.057
12	0.4837	0.7348	0.8353	0.8885	0.9212	0.9434	0.9715	1.0000	1.012	1.023	1.035	1.046	1.051
13	0.4814	0.7315	0.8316	0.8845	0.9172	0.9393	0.9672	0.9956	1.007	1.019	1.030	1.042	1.046
14	0.4794	0.7286	0.8284	0.8812	0.9137	0.9357	0.9636	0.9919	1.003	1.015	1.026	1.038	1.043
15	0.4778	0.7262	0.8257	0.8783	0.9107	0.9327	0.9605	0.9886	1.0000	1.011	1.023	1.034	1.039
16	0.4763	0.7241	0.8233	0.8758	0.9081	0.9300	0.9577	0.9858	0.9972	1.009	1.020	1.032	1.036
17	0.4750	0.7222	0.8212	0.8736	0.9058	0.9277	0.9553	0.9833	0.9947	1.006	1.017	1.029	1.034
18	0.4738	0.7205	0.8194	0.8716	0.9038	0.9256	0.9532	0.9812	0.9924	1.004	1.015	1.027	1.031
19	0.4728	0.7191	0.8177	0.8699	0.9020	0.9238	0.9513	0.9792	0.9905	1.002	1.013	1.025	1.029
20	0.4719	0.7177	0.8162	0.8683	0.9004	0.9221	0.9496	0.9775	0.9887	1.0000	1.011	1.023	1.027
21	0.4711	0.7165	0.8149	0.8669	0.8989	0.9206	0.9480	0.9759	0.9871	0.9984	1.010	1.021	1.026
22	0.4703	0.7155	0.8137	0.8656	0.8976	0.9192	0.9467	0.9744	0.9856	0.9969	1.008	1.020	1.024
23	0.4696	0.7145	0.8125	0.8644	0.8964	0.9180	0.9454	0.9731	0.9843	0.9956	1.007	1.018	1.023
24	0.4690	0.7136	0.8115	0.8633	0.8953	0.9169	0.9442	0.9719	0.9831	0.9944	1.006	1.017	1.022
25	0.4684	0.7127	0.8106	0.8624	0.8942	0.9158	0.9432	0.9708	0.9820	0.9932	1.005	1.016	1.020
26	0.4679	0.7120	0.8097	0.8615	0.8933	0.9149	0.9422	0.9698	0.9810	0.9922	1.003	1.015	1.019
27	0.4674	0.7112	0.8089	0.8606	0.8924	0.9140	0.9413	0.9689	0.9800	0.9912	1.003	1.014	1.018
28	0.4670	0.7106	0.8082	0.8598	0.8916	0.9132	0.9404	0.9680	0.9792	0.9904	1.002	1.013	1.017
29	0.4665	0.7100	0.8075	0.8591	0.8909	0.9124	0.9396	0.9672	0.9784	0.9895	1.001	1.012	1.017
30	0.4662	0.7094	0.8069	0.8584	0.8902	0.9117	0.9389	0.9665	0.9776	0.9888	1.0000	1.011	1.016
40	0.4633	0.7053	0.8023	0.8536	0.8852	0.9065	0.9336	0.9610	0.9721	0.9832	0.9944	1.006	1.010
50	0.4616	0.7028	0.7995	0.8507	0.8822	0.9035	0.9305	0.9578	0.9688	0.9799	0.9911	1.002	1.007
60	0.4605	0.7012	0.7977	0.8487	0.8802	0.9014	0.9284	0.9557	0.9667	0.9777	0.9888	1.0000	1.004
70	0.4597	0.7001	0.7964	0.8474	0.8787	0.9000	0.9269	0.9541	0.9651	0.9762	0.9873	0.9984	1.003
80	0.4591	0.6992	0.7954	0.8463	0.8777	0.8989	0.9258	0.9530	0.9640	0.9750	0.9861	0.9972	1.002
90	0.4586	0.6985	0.7947	0.8455	0.8769	0.8981	0.9249	0.9521	0.9631	0.9741	0.9852	0.9963	1.001
100	0.4583	0.6980	0.7941	0.8449	0.8762	0.8974	0.9242	0.9514	0.9624	0.9734	0.9844	0.9955	1.0000

Tabela A.7-b: Distribuição F de Fisher: valores de F em função dos números de graus de liberdade ν_1 e ν_2 tais que $Q(F|\nu_1,\nu_2) = \int_F^\infty F(x,\nu_1,\nu_2)dx = 0.250$

ν_1 / ν_2	1	2	3	4	5	6	8	12	15	20	30	60	100
1	5.828	7.500	8.200	8.581	8.820	8.983	9.192	9.406	9.493	9.581	9.670	9.759	9.795
2	2.571	3.000	3.153	3.232	3.280	3.312	3.353	3.393	3.410	3.426	3.443	3.459	3.466
3	2.024	2.280	2.356	2.390	2.409	2.422	2.436	2.450	2.455	2.460	2.465	2.470	2.471
4	1.807	2.000	2.047	2.064	2.072	2.077	2.080	2.083	2.083	2.083	2.082	2.082	2.081
5	1.692	1.853	1.884	1.893	1.895	1.894	1.892	1.888	1.885	1.882	1.878	1.874	1.872
6	1.621	1.762	1.784	1.787	1.785	1.782	1.776	1.767	1.762	1.757	1.751	1.744	1.741
7	1.573	1.701	1.717	1.716	1.711	1.706	1.697	1.684	1.678	1.671	1.663	1.655	1.651
8	1.538	1.657	1.668	1.664	1.658	1.651	1.640	1.624	1.617	1.609	1.600	1.589	1.585
9	1.512	1.624	1.632	1.625	1.617	1.609	1.596	1.579	1.570	1.561	1.551	1.539	1.534
10	1.491	1.598	1.603	1.595	1.585	1.576	1.562	1.543	1.534	1.523	1.512	1.499	1.493
11	1.475	1.577	1.580	1.570	1.560	1.550	1.535	1.514	1.504	1.493	1.480	1.466	1.460
12	1.461	1.560	1.561	1.550	1.539	1.529	1.512	1.490	1.480	1.468	1.454	1.439	1.433
13	1.450	1.545	1.545	1.534	1.521	1.511	1.493	1.470	1.459	1.447	1.432	1.416	1.409
14	1.440	1.533	1.532	1.519	1.507	1.495	1.477	1.453	1.441	1.428	1.414	1.397	1.389
15	1.432	1.523	1.520	1.507	1.494	1.482	1.463	1.438	1.426	1.413	1.397	1.380	1.372
16	1.425	1.514	1.510	1.497	1.483	1.471	1.451	1.426	1.413	1.399	1.383	1.365	1.356
17	1.419	1.506	1.502	1.487	1.473	1.460	1.441	1.414	1.401	1.387	1.370	1.351	1.343
18	1.413	1.499	1.494	1.479	1.464	1.452	1.431	1.404	1.391	1.376	1.359	1.340	1.331
19	1.408	1.493	1.487	1.472	1.457	1.444	1.423	1.395	1.382	1.367	1.349	1.329	1.320
20	1.404	1.487	1.481	1.465	1.450	1.437	1.415	1.387	1.374	1.358	1.340	1.319	1.310
21	1.400	1.482	1.475	1.459	1.444	1.430	1.409	1.380	1.366	1.350	1.332	1.311	1.301
22	1.396	1.477	1.470	1.454	1.438	1.424	1.402	1.374	1.359	1.343	1.324	1.303	1.293
23	1.393	1.473	1.466	1.449	1.433	1.419	1.397	1.368	1.353	1.337	1.318	1.295	1.285
24	1.390	1.470	1.462	1.445	1.428	1.414	1.392	1.362	1.347	1.331	1.311	1.289	1.278
25	1.387	1.466	1.458	1.441	1.424	1.410	1.387	1.357	1.342	1.325	1.306	1.282	1.272
26	1.384	1.463	1.454	1.437	1.420	1.406	1.383	1.352	1.337	1.320	1.300	1.277	1.266
27	1.382	1.460	1.451	1.433	1.417	1.402	1.379	1.348	1.333	1.315	1.295	1.271	1.260
28	1.380	1.457	1.448	1.430	1.413	1.399	1.375	1.344	1.329	1.311	1.291	1.266	1.255
29	1.378	1.455	1.445	1.427	1.410	1.395	1.372	1.340	1.325	1.307	1.286	1.262	1.250
30	1.376	1.452	1.443	1.424	1.407	1.392	1.369	1.337	1.321	1.303	1.282	1.257	1.245
40	1.363	1.435	1.424	1.404	1.386	1.371	1.345	1.312	1.295	1.276	1.253	1.225	1.212
50	1.355	1.425	1.413	1.393	1.374	1.358	1.332	1.297	1.280	1.259	1.235	1.205	1.190
60	1.349	1.419	1.405	1.385	1.366	1.349	1.323	1.287	1.269	1.248	1.223	1.191	1.176
70	1.346	1.414	1.400	1.379	1.360	1.343	1.316	1.280	1.262	1.240	1.214	1.181	1.165
80	1.343	1.411	1.396	1.375	1.355	1.338	1.311	1.275	1.256	1.234	1.208	1.174	1.157
90	1.341	1.408	1.393	1.372	1.352	1.335	1.307	1.270	1.252	1.229	1.202	1.168	1.150
100	1.339	1.406	1.391	1.369	1.349	1.332	1.304	1.267	1.248	1.226	1.198	1.163	1.145

Tabela A.7-c: Distribuição F de Fisher: valores de F em função dos números de graus de liberdade ν_1 e ν_2 tais que $Q(F|\nu_1, \nu_2) = \int_F^\infty F(x, \nu_1, \nu_2)dx = 0.100$

ν_1 / ν_2	1	2	3	4	5	6	8	12	15	20	30	60	100
1	39.86	49.50	53.59	55.83	57.24	58.20	59.44	60.71	61.22	61.74	62.26	62.79	63.01
2	8.526	9.000	9.162	9.243	9.293	9.326	9.367	9.408	9.425	9.441	9.458	9.475	9.481
3	5.538	5.462	5.391	5.343	5.309	5.285	5.252	5.216	5.200	5.184	5.168	5.151	5.144
4	4.545	4.325	4.191	4.107	4.051	4.010	3.955	3.896	3.870	3.844	3.817	3.790	3.778
5	4.060	3.780	3.619	3.520	3.453	3.405	3.339	3.268	3.238	3.207	3.174	3.140	3.126
6	3.776	3.463	3.289	3.181	3.108	3.055	2.983	2.905	2.871	2.836	2.800	2.762	2.746
7	3.589	3.257	3.074	2.961	2.883	2.827	2.752	2.668	2.632	2.595	2.555	2.514	2.497
8	3.458	3.113	2.924	2.806	2.726	2.668	2.589	2.502	2.464	2.425	2.383	2.339	2.321
9	3.360	3.006	2.813	2.693	2.611	2.551	2.469	2.379	2.340	2.298	2.255	2.208	2.189
10	3.285	2.924	2.728	2.605	2.522	2.461	2.377	2.284	2.244	2.201	2.155	2.107	2.087
11	3.225	2.860	2.660	2.536	2.451	2.389	2.304	2.209	2.167	2.123	2.076	2.026	2.005
12	3.177	2.807	2.606	2.480	2.394	2.331	2.245	2.147	2.105	2.060	2.011	1.960	1.938
13	3.136	2.763	2.560	2.434	2.347	2.283	2.195	2.097	2.053	2.007	1.958	1.904	1.882
14	3.102	2.726	2.522	2.395	2.307	2.243	2.154	2.054	2.010	1.962	1.912	1.857	1.834
15	3.073	2.695	2.490	2.361	2.273	2.208	2.119	2.017	1.972	1.924	1.873	1.817	1.793
16	3.048	2.668	2.462	2.333	2.244	2.178	2.088	1.985	1.940	1.891	1.839	1.782	1.757
17	3.026	2.645	2.437	2.308	2.218	2.152	2.061	1.958	1.912	1.862	1.809	1.751	1.726
18	3.007	2.624	2.416	2.286	2.196	2.130	2.038	1.933	1.887	1.837	1.783	1.723	1.698
19	2.990	2.606	2.397	2.266	2.176	2.109	2.017	1.912	1.865	1.814	1.759	1.699	1.673
20	2.975	2.589	2.380	2.249	2.158	2.091	1.999	1.892	1.845	1.794	1.738	1.677	1.650
21	2.961	2.575	2.365	2.233	2.142	2.075	1.982	1.875	1.827	1.776	1.719	1.657	1.630
22	2.949	2.561	2.351	2.219	2.128	2.060	1.967	1.859	1.811	1.759	1.702	1.639	1.611
23	2.937	2.549	2.339	2.207	2.115	2.047	1.953	1.845	1.796	1.744	1.686	1.622	1.594
24	2.927	2.538	2.327	2.195	2.103	2.035	1.941	1.832	1.783	1.730	1.672	1.607	1.579
25	2.918	2.528	2.317	2.184	2.092	2.024	1.929	1.820	1.771	1.718	1.659	1.593	1.565
26	2.909	2.519	2.307	2.174	2.082	2.014	1.919	1.809	1.760	1.706	1.647	1.581	1.551
27	2.901	2.511	2.299	2.165	2.073	2.005	1.909	1.799	1.749	1.695	1.636	1.569	1.539
28	2.894	2.503	2.291	2.157	2.064	1.996	1.900	1.790	1.740	1.685	1.625	1.558	1.528
29	2.887	2.495	2.283	2.149	2.057	1.988	1.892	1.781	1.731	1.676	1.616	1.547	1.517
30	2.881	2.489	2.276	2.142	2.049	1.980	1.884	1.773	1.722	1.667	1.606	1.538	1.507
40	2.835	2.440	2.226	2.091	1.997	1.927	1.829	1.715	1.662	1.605	1.541	1.467	1.434
50	2.809	2.412	2.197	2.061	1.966	1.895	1.796	1.680	1.627	1.568	1.502	1.424	1.388
60	2.791	2.393	2.177	2.041	1.946	1.875	1.775	1.657	1.603	1.543	1.476	1.395	1.358
70	2.779	2.380	2.164	2.027	1.931	1.860	1.760	1.641	1.587	1.526	1.457	1.374	1.335
80	2.769	2.370	2.154	2.016	1.921	1.849	1.748	1.629	1.574	1.513	1.443	1.358	1.318
90	2.762	2.363	2.146	2.008	1.912	1.841	1.739	1.620	1.564	1.503	1.432	1.346	1.304
100	2.756	2.356	2.139	2.002	1.906	1.834	1.732	1.612	1.557	1.494	1.423	1.336	1.293

Tabela A.7-d: Distribuição F de Fisher: valores de F em função dos números de graus de liberdade ν_1 e ν_2 tais que $Q(F|\nu_1, \nu_2) = \int_F^\infty F(x, \nu_1, \nu_2)dx = 0.050$

ν_1 / ν_2	1	2	3	4	5	6	8	12	15	20	30	60	100
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	238.9	243.9	246.0	248.0	250.1	252.2	253.0
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.37	19.41	19.43	19.45	19.46	19.48	19.49
3	10.13	9.552	9.277	9.117	9.013	8.941	8.845	8.745	8.703	8.660	8.617	8.572	8.554
4	7.709	6.944	6.591	6.388	6.256	6.163	6.041	5.912	5.858	5.803	5.746	5.688	5.664
5	6.608	5.786	5.409	5.192	5.050	4.950	4.818	4.678	4.619	4.558	4.496	4.431	4.405
6	5.987	5.143	4.757	4.534	4.387	4.284	4.147	4.000	3.938	3.874	3.808	3.740	3.712
7	5.591	4.737	4.347	4.120	3.972	3.866	3.726	3.575	3.511	3.445	3.376	3.304	3.275
8	5.318	4.459	4.066	3.838	3.687	3.581	3.438	3.284	3.218	3.150	3.079	3.005	2.975
9	5.117	4.256	3.863	3.633	3.482	3.374	3.230	3.073	3.006	2.936	2.864	2.787	2.756
10	4.965	4.103	3.708	3.478	3.326	3.217	3.072	2.913	2.845	2.774	2.700	2.621	2.588
11	4.844	3.982	3.587	3.357	3.204	3.095	2.948	2.788	2.719	2.646	2.570	2.490	2.457
12	4.747	3.885	3.490	3.259	3.106	2.996	2.849	2.687	2.617	2.544	2.466	2.384	2.350
13	4.667	3.806	3.411	3.179	3.025	2.915	2.767	2.604	2.533	2.459	2.380	2.297	2.261
14	4.600	3.739	3.344	3.112	2.958	2.848	2.699	2.534	2.463	2.388	2.308	2.223	2.187
15	4.543	3.682	3.287	3.056	2.901	2.790	2.641	2.475	2.403	2.328	2.247	2.160	2.123
16	4.494	3.634	3.239	3.007	2.852	2.741	2.591	2.425	2.352	2.276	2.194	2.106	2.068
17	4.451	3.592	3.197	2.965	2.810	2.699	2.548	2.381	2.308	2.230	2.148	2.058	2.020
18	4.414	3.555	3.160	2.928	2.773	2.661	2.510	2.342	2.269	2.191	2.107	2.017	1.978
19	4.381	3.522	3.127	2.895	2.740	2.628	2.477	2.308	2.234	2.155	2.071	1.980	1.940
20	4.351	3.493	3.098	2.866	2.711	2.599	2.447	2.278	2.203	2.124	2.039	1.946	1.907
21	4.325	3.467	3.072	2.840	2.685	2.573	2.420	2.250	2.176	2.096	2.010	1.916	1.876
22	4.301	3.443	3.049	2.817	2.661	2.549	2.397	2.226	2.151	2.071	1.984	1.889	1.849
23	4.279	3.422	3.028	2.796	2.640	2.528	2.375	2.204	2.128	2.048	1.961	1.865	1.823
24	4.260	3.403	3.009	2.776	2.621	2.508	2.355	2.183	2.108	2.027	1.939	1.842	1.800
25	4.242	3.385	2.991	2.759	2.603	2.490	2.337	2.165	2.089	2.007	1.919	1.822	1.779
26	4.225	3.369	2.975	2.743	2.587	2.474	2.321	2.148	2.072	1.990	1.901	1.803	1.760
27	4.210	3.354	2.960	2.728	2.572	2.459	2.305	2.132	2.056	1.974	1.884	1.785	1.742
28	4.196	3.340	2.947	2.714	2.558	2.445	2.291	2.118	2.041	1.959	1.869	1.769	1.725
29	4.183	3.328	2.934	2.701	2.545	2.432	2.278	2.104	2.027	1.945	1.854	1.754	1.710
30	4.171	3.316	2.922	2.690	2.534	2.421	2.266	2.092	2.015	1.932	1.841	1.740	1.695
40	4.085	3.232	2.839	2.606	2.449	2.336	2.180	2.003	1.924	1.839	1.744	1.637	1.589
50	4.034	3.183	2.790	2.557	2.400	2.286	2.130	1.952	1.871	1.784	1.687	1.576	1.525
60	4.001	3.150	2.758	2.525	2.368	2.254	2.097	1.917	1.836	1.748	1.649	1.534	1.481
70	3.978	3.128	2.736	2.503	2.346	2.231	2.074	1.893	1.812	1.722	1.622	1.505	1.450
80	3.960	3.111	2.719	2.486	2.329	2.214	2.056	1.875	1.793	1.703	1.602	1.482	1.426
90	3.947	3.098	2.706	2.473	2.316	2.201	2.043	1.861	1.779	1.688	1.586	1.465	1.407
100	3.936	3.087	2.696	2.463	2.305	2.191	2.032	1.850	1.768	1.676	1.573	1.450	1.392

Tabela A.7-e: Distribuição F de Fisher: valores de F em função dos números de graus de liberdade ν_1 e ν_2 tais que $Q(F|\nu_1,\nu_2) = \int_F^\infty F(x,\nu_1,\nu_2)dx = 0.025$

ν_1 / ν_2	1	2	3	4	5	6	8	12	15	20	30	60	100
1	647.8	799.5	864.2	899.6	921.8	937.1	956.7	976.7	984.9	993.1	1001.	1010.	1013.
2	38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.37	39.41	39.43	39.45	39.46	39.48	39.49
3	17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.54	14.34	14.25	14.17	14.08	13.99	13.96
4	12.22	10.65	9.979	9.605	9.364	9.197	8.980	8.751	8.657	8.560	8.461	8.360	8.319
5	10.01	8.434	7.764	7.388	7.146	6.978	6.757	6.525	6.428	6.329	6.227	6.123	6.080
6	8.813	7.260	6.599	6.227	5.988	5.820	5.600	5.366	5.269	5.168	5.065	4.959	4.915
7	8.073	6.542	5.890	5.523	5.285	5.119	4.899	4.666	4.568	4.467	4.362	4.254	4.210
8	7.571	6.059	5.416	5.053	4.817	4.652	4.433	4.200	4.101	3.999	3.894	3.784	3.739
9	7.209	5.715	5.078	4.718	4.484	4.320	4.102	3.868	3.769	3.667	3.560	3.449	3.403
10	6.937	5.456	4.826	4.468	4.236	4.072	3.855	3.621	3.522	3.419	3.311	3.198	3.152
11	6.724	5.256	4.630	4.275	4.044	3.881	3.664	3.430	3.330	3.226	3.118	3.004	2.956
12	6.554	5.096	4.474	4.121	3.891	3.728	3.512	3.277	3.177	3.073	2.963	2.848	2.800
13	6.414	4.965	4.347	3.996	3.767	3.604	3.388	3.153	3.053	2.948	2.837	2.720	2.671
14	6.298	4.857	4.242	3.892	3.663	3.501	3.285	3.050	2.949	2.844	2.732	2.614	2.565
15	6.199	4.765	4.153	3.804	3.576	3.415	3.199	2.963	2.862	2.756	2.644	2.524	2.474
16	6.115	4.687	4.077	3.729	3.502	3.341	3.125	2.889	2.788	2.681	2.568	2.447	2.396
17	6.042	4.619	4.011	3.665	3.438	3.277	3.061	2.825	2.723	2.616	2.502	2.380	2.329
18	5.978	4.560	3.954	3.608	3.382	3.221	3.005	2.769	2.667	2.559	2.445	2.321	2.269
19	5.922	4.508	3.903	3.559	3.333	3.172	2.956	2.720	2.617	2.509	2.394	2.270	2.217
20	5.871	4.461	3.859	3.515	3.289	3.128	2.913	2.676	2.573	2.464	2.349	2.223	2.170
21	5.827	4.420	3.819	3.475	3.250	3.090	2.874	2.637	2.534	2.425	2.308	2.182	2.128
22	5.786	4.383	3.783	3.440	3.215	3.055	2.839	2.602	2.498	2.389	2.272	2.145	2.090
23	5.750	4.349	3.750	3.408	3.183	3.023	2.808	2.570	2.466	2.357	2.239	2.111	2.056
24	5.717	4.319	3.721	3.379	3.155	2.995	2.779	2.541	2.437	2.327	2.209	2.080	2.024
25	5.686	4.291	3.694	3.353	3.129	2.969	2.753	2.515	2.411	2.300	2.182	2.052	1.996
26	5.659	4.265	3.670	3.329	3.105	2.945	2.729	2.491	2.387	2.276	2.157	2.026	1.969
27	5.633	4.242	3.647	3.307	3.083	2.923	2.707	2.469	2.364	2.253	2.133	2.002	1.945
28	5.610	4.221	3.626	3.286	3.063	2.903	2.687	2.448	2.344	2.232	2.112	1.980	1.922
29	5.588	4.201	3.607	3.267	3.044	2.884	2.669	2.430	2.325	2.213	2.092	1.959	1.901
30	5.568	4.182	3.589	3.250	3.026	2.867	2.651	2.412	2.307	2.195	2.074	1.940	1.882
40	5.424	4.051	3.463	3.126	2.904	2.744	2.529	2.288	2.182	2.068	1.943	1.803	1.741
50	5.340	3.975	3.390	3.054	2.833	2.674	2.458	2.216	2.109	1.993	1.866	1.721	1.656
60	5.286	3.925	3.343	3.008	2.786	2.627	2.412	2.169	2.061	1.944	1.815	1.667	1.599
70	5.247	3.890	3.309	2.975	2.754	2.595	2.379	2.136	2.028	1.910	1.779	1.628	1.558
80	5.218	3.864	3.284	2.950	2.730	2.571	2.355	2.111	2.003	1.884	1.752	1.599	1.527
90	5.196	3.844	3.265	2.932	2.711	2.552	2.336	2.092	1.983	1.864	1.731	1.576	1.503
100	5.179	3.828	3.250	2.917	2.696	2.537	2.321	2.077	1.968	1.849	1.715	1.558	1.483

Tabela A.7-f: Distribuição F de Fisher: valores de F em função dos números de graus de liberdade ν_1 e ν_2 tais que $Q(F|\nu_1,\nu_2) = \int_F^\infty F(x,\nu_1,\nu_2)dx = 0.010$

ν_1 / ν_2	1	2	3	4	5	6	8	12	15	20	30	60	100
1	4052.	4999.	5403.	5625.	5764.	5859.	5981.	6106.	6157.	6209.	6261.	6313.	6334.
2	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.37	99.42	99.43	99.45	99.47	99.48	99.49
3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.49	27.05	26.87	26.69	26.50	26.32	26.24
4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.80	14.37	14.20	14.02	13.84	13.65	13.58
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.29	9.888	9.722	9.553	9.379	9.202	9.130
6	13.75	10.92	9.780	9.148	8.746	8.466	8.102	7.718	7.559	7.396	7.229	7.057	6.987
7	12.25	9.547	8.451	7.847	7.460	7.191	6.840	6.469	6.314	6.155	5.992	5.824	5.755
8	11.26	8.649	7.591	7.006	6.632	6.371	6.029	5.667	5.515	5.359	5.198	5.032	4.963
9	10.56	8.022	6.992	6.422	6.057	5.802	5.467	5.111	4.962	4.808	4.649	4.483	4.415
10	10.04	7.559	6.552	5.994	5.636	5.386	5.057	4.706	4.558	4.405	4.247	4.082	4.014
11	9.646	7.206	6.217	5.668	5.316	5.069	4.744	4.397	4.251	4.099	3.941	3.776	3.708
12	9.330	6.927	5.953	5.412	5.064	4.821	4.499	4.155	4.010	3.858	3.701	3.535	3.467
13	9.074	6.701	5.739	5.205	4.862	4.620	4.302	3.960	3.815	3.665	3.507	3.341	3.272
14	8.862	6.515	5.564	5.035	4.695	4.456	4.140	3.800	3.656	3.505	3.348	3.181	3.112
15	8.683	6.359	5.417	4.893	4.556	4.318	4.004	3.666	3.522	3.372	3.214	3.047	2.977
16	8.531	6.226	5.292	4.773	4.437	4.202	3.890	3.553	3.409	3.259	3.101	2.933	2.863
17	8.400	6.112	5.185	4.669	4.336	4.102	3.791	3.455	3.312	3.162	3.003	2.835	2.764
18	8.285	6.013	5.092	4.579	4.248	4.015	3.705	3.371	3.227	3.077	2.919	2.749	2.678
19	8.185	5.926	5.010	4.500	4.171	3.939	3.631	3.297	3.153	3.003	2.844	2.674	2.602
20	8.096	5.849	4.938	4.431	4.103	3.871	3.564	3.231	3.088	2.938	2.778	2.608	2.535
21	8.017	5.780	4.874	4.369	4.042	3.812	3.506	3.173	3.030	2.880	2.720	2.548	2.475
22	7.945	5.719	4.817	4.313	3.988	3.758	3.453	3.121	2.978	2.827	2.667	2.495	2.422
23	7.881	5.664	4.765	4.264	3.939	3.710	3.406	3.074	2.931	2.781	2.620	2.447	2.373
24	7.823	5.614	4.718	4.218	3.895	3.667	3.363	3.032	2.889	2.738	2.577	2.403	2.329
25	7.770	5.568	4.675	4.177	3.855	3.627	3.324	2.993	2.850	2.699	2.538	2.364	2.289
26	7.721	5.526	4.637	4.140	3.818	3.591	3.288	2.958	2.815	2.664	2.503	2.327	2.252
27	7.677	5.488	4.601	4.106	3.785	3.558	3.256	2.926	2.783	2.632	2.470	2.294	2.218
28	7.636	5.453	4.568	4.074	3.754	3.528	3.226	2.896	2.753	2.602	2.440	2.263	2.187
29	7.598	5.420	4.538	4.045	3.725	3.499	3.198	2.868	2.726	2.574	2.412	2.234	2.158
30	7.562	5.390	4.510	4.018	3.699	3.473	3.173	2.843	2.700	2.549	2.386	2.208	2.131
40	7.314	5.179	4.313	3.828	3.514	3.291	2.993	2.665	2.522	2.369	2.203	2.019	1.938
50	7.171	5.057	4.199	3.720	3.408	3.186	2.890	2.562	2.419	2.265	2.098	1.909	1.825
60	7.077	4.977	4.126	3.649	3.339	3.119	2.823	2.496	2.352	2.198	2.028	1.836	1.749
70	7.011	4.922	4.074	3.600	3.291	3.071	2.777	2.450	2.306	2.150	1.980	1.785	1.695
80	6.963	4.881	4.036	3.563	3.255	3.036	2.742	2.415	2.271	2.115	1.944	1.746	1.655
90	6.925	4.849	4.007	3.535	3.228	3.009	2.715	2.389	2.244	2.088	1.916	1.716	1.623
100	6.895	4.824	3.984	3.513	3.206	2.988	2.694	2.368	2.223	2.067	1.893	1.692	1.598

Tabela A.7-g: Distribuição F de Fisher: valores de F em função dos números de graus de liberdade ν_1 e ν_2 tais que $Q(F|\nu_1,\nu_2) = \int_F^\infty F(x,\nu_1,\nu_2)dx = 0.005$

ν_1 / ν_2	1	2	3	4	5	6	8	12	15	20	30	60	100
1	16211.	19999.	21615.	22500.	23057.	23437.	23925.	24426.	24630.	24836.	25044.	25253.	25337.
2	198.5	199.0	199.2	199.2	199.3	199.3	199.4	199.4	199.4	199.4	199.5	199.5	199.5
3	55.55	49.80	47.47	46.19	45.39	44.84	44.13	43.39	43.08	42.78	42.47	42.15	42.02
4	31.33	26.28	24.26	23.15	22.46	21.97	21.35	20.70	20.44	20.17	19.89	19.61	19.50
5	22.78	18.31	16.53	15.56	14.94	14.51	13.96	13.38	13.15	12.90	12.66	12.40	12.30
6	18.63	14.54	12.92	12.03	11.46	11.07	10.57	10.03	9.814	9.589	9.358	9.122	9.026
7	16.24	12.40	10.88	10.05	9.522	9.155	8.678	8.176	7.968	7.754	7.534	7.309	7.217
8	14.69	11.04	9.596	8.805	8.302	7.952	7.496	7.015	6.814	6.608	6.396	6.177	6.088
9	13.61	10.11	8.717	7.956	7.471	7.134	6.693	6.227	6.032	5.832	5.625	5.410	5.322
10	12.83	9.427	8.081	7.343	6.872	6.545	6.116	5.661	5.471	5.274	5.071	4.859	4.772
11	12.23	8.912	7.600	6.881	6.422	6.102	5.682	5.236	5.049	4.855	4.654	4.445	4.359
12	11.75	8.510	7.226	6.521	6.071	5.757	5.345	4.906	4.721	4.530	4.331	4.123	4.037
13	11.37	8.186	6.926	6.233	5.791	5.482	5.076	4.643	4.460	4.270	4.073	3.866	3.780
14	11.06	7.922	6.680	5.998	5.562	5.257	4.857	4.428	4.247	4.059	3.862	3.655	3.569
15	10.80	7.701	6.476	5.803	5.372	5.071	4.674	4.250	4.070	3.883	3.687	3.480	3.394
16	10.58	7.514	6.303	5.638	5.212	4.913	4.521	4.099	3.920	3.734	3.539	3.332	3.246
17	10.38	7.354	6.156	5.497	5.075	4.779	4.389	3.971	3.793	3.607	3.412	3.206	3.119
18	10.22	7.215	6.028	5.375	4.956	4.663	4.276	3.860	3.683	3.498	3.303	3.096	3.009
19	10.07	7.093	5.916	5.268	4.853	4.561	4.177	3.763	3.587	3.402	3.208	3.000	2.913
20	9.944	6.986	5.818	5.174	4.762	4.472	4.090	3.678	3.502	3.318	3.123	2.916	2.828
21	9.830	6.891	5.730	5.091	4.681	4.393	4.013	3.602	3.427	3.243	3.049	2.841	2.753
22	9.727	6.806	5.652	5.017	4.609	4.322	3.944	3.535	3.360	3.176	2.982	2.774	2.685
23	9.635	6.730	5.582	4.950	4.544	4.259	3.882	3.475	3.300	3.116	2.922	2.713	2.624
24	9.551	6.661	5.519	4.890	4.486	4.202	3.826	3.420	3.246	3.062	2.868	2.658	2.569
25	9.475	6.598	5.462	4.835	4.433	4.150	3.776	3.370	3.196	3.013	2.819	2.609	2.519
26	9.406	6.541	5.409	4.785	4.384	4.103	3.730	3.325	3.151	2.968	2.774	2.563	2.473
27	9.342	6.489	5.361	4.740	4.340	4.059	3.687	3.284	3.110	2.928	2.733	2.522	2.431
28	9.284	6.440	5.317	4.698	4.300	4.020	3.649	3.246	3.073	2.890	2.695	2.483	2.392
29	9.230	6.396	5.276	4.659	4.262	3.983	3.613	3.211	3.038	2.855	2.660	2.448	2.357
30	9.180	6.355	5.239	4.623	4.228	3.949	3.580	3.179	3.006	2.823	2.628	2.415	2.323
40	8.828	6.066	4.976	4.374	3.986	3.713	3.350	2.953	2.781	2.598	2.401	2.184	2.088
50	8.626	5.902	4.826	4.232	3.849	3.579	3.219	2.825	2.653	2.470	2.272	2.050	1.951
60	8.495	5.795	4.729	4.140	3.760	3.492	3.134	2.742	2.570	2.387	2.187	1.962	1.861
70	8.403	5.720	4.661	4.076	3.698	3.431	3.075	2.684	2.513	2.329	2.128	1.900	1.797
80	8.335	5.665	4.611	4.029	3.652	3.387	3.032	2.641	2.470	2.286	2.084	1.854	1.748
90	8.282	5.623	4.573	3.992	3.617	3.352	2.999	2.608	2.437	2.253	2.051	1.818	1.711
100	8.241	5.589	4.542	3.963	3.589	3.325	2.972	2.583	2.411	2.227	2.024	1.790	1.681

Tabela A.7-h: Distribuição F de Fisher: valores de F em função dos números de graus de liberdade ν_1 e ν_2 tais que $Q(F|\nu_1,\nu_2) = \int_F^\infty F(x,\nu_1,\nu_2)dx = 0.001$

ν_1 / ν_2	1	2	3	4	5	6	8	12	15	20	30	60	100
1	405325.	499999.	540422.	562499.	576443.	585936.	598143.	610667.	615783.	620907.	626098.	631336.	633444.
2	998.5	999.0	999.2	999.2	999.3	999.3	999.4	999.4	999.4	999.4	999.5	999.5	999.5
3	167.0	148.5	141.1	137.1	134.6	132.8	130.6	128.3	127.4	126.4	125.4	124.5	124.1
4	74.14	61.25	56.18	53.44	51.71	50.52	49.00	47.41	46.76	46.10	45.43	44.75	44.47
5	47.18	37.12	33.20	31.08	29.75	28.83	27.65	26.42	25.91	25.39	24.87	24.33	24.12
6	35.51	27.00	23.70	21.92	20.80	20.03	19.03	17.99	17.56	17.12	16.67	16.21	16.03
7	29.25	21.69	18.77	17.20	16.21	15.52	14.63	13.71	13.32	12.93	12.53	12.12	11.95
8	25.41	18.49	15.83	14.39	13.48	12.86	12.05	11.19	10.84	10.48	10.11	9.727	9.571
9	22.86	16.39	13.90	12.56	11.71	11.13	10.37	9.570	9.238	8.898	8.548	8.187	8.039
10	21.04	14.91	12.55	11.28	10.48	9.926	9.204	8.445	8.129	7.804	7.469	7.122	6.980
11	19.69	13.81	11.56	10.35	9.578	9.047	8.355	7.626	7.321	7.008	6.684	6.348	6.210
12	18.64	12.97	10.80	9.633	8.892	8.379	7.710	7.005	6.709	6.405	6.090	5.762	5.627
13	17.82	12.31	10.21	9.073	8.354	7.856	7.206	6.519	6.231	5.934	5.626	5.305	5.172
14	17.14	11.78	9.729	8.622	7.922	7.436	6.802	6.130	5.848	5.557	5.254	4.938	4.807
15	16.59	11.34	9.335	8.253	7.567	7.092	6.471	5.812	5.535	5.248	4.950	4.638	4.508
16	16.12	10.97	9.006	7.944	7.272	6.805	6.195	5.547	5.274	4.992	4.697	4.388	4.259
17	15.72	10.66	8.727	7.683	7.022	6.562	5.962	5.324	5.054	4.775	4.484	4.177	4.049
18	15.38	10.39	8.487	7.459	6.808	6.355	5.763	5.132	4.866	4.590	4.301	3.996	3.868
19	15.08	10.16	8.280	7.265	6.622	6.175	5.590	4.967	4.704	4.430	4.143	3.840	3.712
20	14.82	9.953	8.098	7.096	6.461	6.019	5.440	4.823	4.562	4.290	4.005	3.703	3.576
21	14.59	9.772	7.938	6.947	6.318	5.881	5.308	4.696	4.437	4.167	3.884	3.583	3.456
22	14.38	9.612	7.796	6.814	6.191	5.758	5.190	4.583	4.326	4.058	3.776	3.476	3.349
23	14.19	9.469	7.669	6.696	6.078	5.649	5.085	4.483	4.227	3.961	3.680	3.380	3.254
24	14.03	9.339	7.554	6.589	5.977	5.550	4.991	4.393	4.139	3.873	3.593	3.295	3.168
25	13.88	9.222	7.451	6.493	5.885	5.462	4.906	4.312	4.059	3.794	3.515	3.217	3.091
26	13.74	9.116	7.357	6.406	5.802	5.381	4.829	4.238	3.986	3.723	3.445	3.147	3.020
27	13.61	9.019	7.272	6.326	5.726	5.308	4.759	4.171	3.920	3.658	3.380	3.082	2.956
28	13.50	8.931	7.193	6.253	5.656	5.241	4.695	4.109	3.859	3.598	3.321	3.024	2.897
29	13.39	8.849	7.121	6.186	5.593	5.179	4.636	4.053	3.804	3.543	3.267	2.970	2.842
30	13.29	8.773	7.054	6.125	5.534	5.122	4.581	4.001	3.753	3.493	3.217	2.920	2.792
40	12.61	8.251	6.595	5.698	5.128	4.731	4.207	3.642	3.400	3.145	2.872	2.574	2.444
50	12.22	7.956	6.336	5.459	4.901	4.512	3.998	3.443	3.204	2.951	2.679	2.378	2.246
60	11.97	7.768	6.171	5.307	4.757	4.372	3.865	3.315	3.078	2.827	2.555	2.252	2.118
70	11.80	7.637	6.057	5.201	4.656	4.275	3.773	3.227	2.991	2.741	2.469	2.164	2.027
80	11.67	7.540	5.972	5.123	4.582	4.204	3.705	3.162	2.927	2.677	2.406	2.099	1.960
90	11.57	7.466	5.908	5.064	4.526	4.150	3.653	3.113	2.879	2.629	2.357	2.049	1.909
100	11.50	7.408	5.857	5.017	4.482	4.107	3.612	3.074	2.840	2.591	2.319	2.009	1.867

Apêndice B

Deducao da Poisson

B.0.1 Outra dedução da Poisson

Esta dedução também considera que os eventos de interesse estão espalhados no tempo e ocorrem a uma taxa λ por unidade de tempo, que não se altera no decorrer do experimento. A partir dessa taxa de eventos, calcula-se que a chance de ocorrer um evento no intervalo de tempo $[t,\ t+\delta t]$, quando o intervalo de tempo δt é suficientemente pequeno para que não ocorram dois eventos, é

$$P(1,[t,\ t+\delta t]) = \lambda\,\delta t \tag{B.1}$$

Embora a possibilidade de ocorrência de 2 eventos nesse intervalo não seja nula quando δt é finito, ela tende a zero quando se passa ao limite $\delta t \to 0$, de modo que usamos o símbolo = na equação acima em antecipação à passagem a esse limite na sequência desta dedução. Nesse mesmo sentido, dessa equação deduz-se que

$$P(0,[t,\ t+\delta t]) = 1-\lambda\,\delta t \tag{B.2}$$

Com esses resultados, pode-se deduzir a probabilidade de não ocorrer nenhum evento no intervalo $[0,\ t]$, uma vez que esse intervalo pode ser subdividido em m intervalos δt com

$$t = m\delta t \tag{B.3}$$

Assim,

$$P(0,[0,\ t]) = P(0,[0,\ \delta t])P(0,[\delta t,\ 2\,\delta t])\ldots P(0,[(m-1)\,\delta t,\ m\,\delta t])$$

e, como a probabilidade associada a cada um dos intervalos é a mesma, obtem-se, após substituir a probabilidade calculada na equação (B.2)

$$P(0,[0,\ t]) = (1 - \lambda\,\delta t)^m$$

porque a probabilidade associada a cada um dos intervalos é a mesma e o resultado da equação (B.2) foi usado.

Substituindo a relação B.3 na expressão acima e notando que o limite em que $\delta t \to 0$ é equivalente ao limite $m \to \infty$, obtem-se

$$P(0,[0,\ t]) = \lim_{m\to\infty}\left(1 - \frac{\lambda\,t}{m}\right)^m = \exp(-\lambda t) \tag{B.4}$$

Índice

$<>$, 8, 15
χ^2
- alto, 154
- baixo, 157, 269
  - dados covariantes, 269
- distribuição, 53
- forma matricial, 239
- média, 58
- reduzido, 160
  - faixa aceitável, 160
- tabela, 322, 323
- teste, 264
- variância, 58

σ^2
- distribuição, 59

$\mathcal{L}$, *ver* função verossimilhança

ajuste
- dados correlacionados, 266
- dados não gaussianos, 235
- formula matricial, 236
- função adequada, 153
- função inadequada, 156
- função linear, 113, 235
- função não linear, 235
- graus de liberdade nulo, 113
- minimos quadrados, 108
- parâmetro não linear, 303
- qualitativo, 151
- reta, 108
- teste de χ^2, 153, 156
- vínculo linear, 273

aleatoriedade, 1, 5
análise de previsão, 118
- reta, 118

arredondamento, 89
assimetria
- parâmetro de, 185

baricentro, 243
Bayes, 175
- postulado, 213, 215
- teorema, 175, 213, 214

binomial, 29
- governando histogramas, 32
- hipóteses, 30
- média, 30
- variância, 30

Cauchy, 183, 196, 218
Chebyshev
- desigualdade, 204

coeficiente de correlação, 80, 187
coeficiente de correlação linear, 259
comparação de médias, 139
condição de regularidade, 226
conjunto vazio ($\emptyset$), 170
consistência, 209, 219
- máxima verossimilhança, 288

convergência absoluta, 182
convergência em probabilidade, 5

correlação, 187
χ^2 subestimado, 269
coeficiente, 80, 187, 259
covariância, 18, 71, 114, 115
alteração das estimativas, 271
dados, 116, 235
exemplo, 77
fórmula aproximada, 75
matriz, 114, 115
critério de arredondamento, 89
cumulantes, 197
função geratriz, 196
curtose, 185

dados
baricentro, 243
dados correlacionados, 235, 266, *ver* dados covariantes, *ver* média
χ^2 subestimado, 269
dados covariantes, 116, 235, *ver* dados correlacionados
dados gaussianos, 108
dados não gaussianos, 108, 263, 264
f.d.p. desconhecida, 264
poucos dados, 264
decaimento radioativo, 35
desigualdade de Chebyshev, 204
desintegração radioativa, 35
desvio padrão, 8, 10, 21
da média, 10
da série, 10
do desvio padrão, 60
distribuição, *ver* fdp
χ^2, 53, 58
σ^2, 59
Cauchy, 183, 218
cumulativa, 180
da variância, 59
F de Fisher, 142
multi-dimensional, 181
multinormal, 42
normal, *ver* gausiana, *ver* multidimensional
Student, 83
fórmula, 87
limite para $\nu >> 1$, 87
média, 87
variância, 87
t de Student, 83
uniforme, 66

eficiência, 100, 210, 222, 231
equivalência MQ e MV, 108
erro, 1, 7
aleatório, 6
de arredondamento, 66
estatístico, 1, 6
propagação, 73
sistemático, 1, 6
erro tipo I, 131, 134, *ver* teste de hipótese, 138, 158
probabilidade, 131
erro tipo II, 131, 134, *ver* teste de hipótese, 138
escola
bayesiana, 215
clássica, 215
frequencista, 212
não bayesiana, 215
espaço amostral, 11, 167, 170, 179
contínuo, 180
discreto, 172, 180
reduzido, 174
estatística
bayesiana, 215
definição, 217

definições, 10
não bayesiana, 215
não-paramétrica, 210
estimador, 11, 209, 217
ótimo, 210
assintoticamente não tendencioso, 102
assintoticamente normal, 100, 287
consistente, 219
eficiência, 100, 231
média dos dados, 217
não tendencioso, 101, 221, 225
robusto, 210
suficiência, 232
tendenciosidade, 101
tendencioso, 100, 102
variância do, 226
variância mínima, 223, 226, 228
estimativa, 217
ótima, 209
assintoticamente não tendenciosa, 102
de ponto, 23
não paramétrica, 22
paramétrica, 21
robusta, 25
tendenciosa, 102
variância, 245
evento, 167
complementar, 171
composto, 168, 170, 171
intersecção, 170
união, 171
elementar, 170
equiprovável, 210
exclusivo, 171
impossível, 170
independente, 175
mutuamente exclusivo, 171

F de Fisher, 142, 145
tabela, 148, 332
f.d.p., *ver* função densidade de probabilidade
fdp, *ver* distribuição
χ^2, 58
bi-dimensional, 181
Cauchy, 183, 196, 218
condicional, 181
conjunta, 181
da média, 48
dimensão, 13
F de Fisher, 145
média, 146
variância, 146
marginal, 17, 181
multidimensional, 16
unimodal, 20
FGC, *ver* função geratriz dos cumulantes
flutuação estatística, 2, 9
flutuação num histograma, 195
função
aleatória, 178
característica, 47, 196
de probabilidade, 9, 11, 179
binomial, 29
densidade de probabilidade, 12, *ver* fdp, 180
dimensão, 13
marginal, 17
geratriz, 188, 196
dos cumulantes, 196, 200
linear, 108
não linear, 108
regular, 288

verossimilhança, 99, 224
regular, 224
função densidade de probabilidade, *ver* fpd

gaussiana, 42
bidimensional, 44, 45
como limite da binomial, 63
como limite da Poisson, 65
como limite de χ^2, 65
como limite de outras f.d.p.s, 63
duas dimensões, 45
tabela, 318, 319
geratriz
função, 188
graus de liberdade, 152
vínculos, 273

hipótese
a posteriori, 215
a priori, 215
alternativa, 138
estatística, 125
teste, 125, *ver* teste de hipótese
histograma
flutuação, 32, 195

incerteza, 1, 7, 8, *ver* variância
propagação, 73
independência, 175
estatística, 175
estatıstitica, 18
estocástica, 175
inferência estatística, 125
informação, 227
integral
convergência absoluta, 182
intersecção, 170
intervalo de confiança, 8, 87
t de Student, 87
inversão de matrizes, 265

jackknife, 222
Jacobiano, 52

lei da probabilidade total, 174
lei dos grandes números, 205, 218, 219
Limite Mínimo de Variância, 224
limite mínimo de variância, 227, 229
LMV, *ver* Limite Mínimo de Variância
localização, 218
Lorentz, 183

mínimos quadrados, 235
estimador de mínima variância, 251
forma geral, 109, 235
função linear, 113
não tendenciosidade, 245
propriedades do estimador, 235
máxima verossimilhança, 97
assintoticamente não-tendenciosa, 290
assintoticamente normal, 292
consistência, 288
eficiência, 293
tendência à normalidade, 292
média, 21, 217, 218, 222
binomial, 30
dados correlacionados, 269
distribuição, 48
dos extremos, 222
método da máxima verossimilhança, 99
método de Gauss, 299
algoritmo, 300
critério de convergência, 301
método de Gauss-Marquardt, 301, *ver* método de Gauss

limite de λ, 302
precisão numérica, 302
matriz de covariância, 114, 115
assintótica, 301
inversão, 265
matriz de planejamento, 236, 270, 279
matriz de projeto, 267, 274
mediana, 20, 218, 222
intervalos de confiança, 23
minimos quadrados
justificativa, 108
Minimum Variance Bound, *ver* Limite Mínimo de Variância
moda, 20, 218
momento, 15, 184
central, 185
de ordem n, 185
de ordem n, 184
multinormal, 42
MVB, *ver* Limite Mínimo de Variância

nível de significância, 131, *ver* teste
não-tendenciosidade, 209, 219

parâmetro
não linear
ajuste, 303
parâmetro de assimetria, 185
parâmetros
covariância, 115, 117
estimativas, 110, 113
incerteza independente das medidas, 118
interpretação, 116
variância, 117
vinculos lineares, 235
partição, 173
poder do teste, 138
Poisson, 34
evento tipo, 37
hipóteses, 35, 37
soma de, 40
postulado de Bayes, 213, 215
previsão, 118
reta, 118
probabilidade, 1, 2
condicional, 174
crença, 212
frequência relativa, 212
total, 174
probabilidade vs estatística, 19
projeto
seeplanejamento, 236
propagação de incertezas, 73

regularidade, 226, 288
resíduo, 2, 109
reta
coef. angular independente da origem, 244
coeficientes
covariância, 117
incerteza, 117
variância, 117
robustez, 25, 210
ruido eletrônico, 202

Student
distribuição, 83
suficiência, 232

t de Student, 22, 83, 85
intervalo de confiança, 87
limite para $\nu >> 1$, 87
média, 87
tabela, 327, 340
variância, 87

- tabela
  - χ^2, 322, 323
  - F de Fisher, 148, 332
  - gaussiana, 318, 319
  - t de Student, 327, 340
- tendenciosidade, 100–102, 209, 219
  - eliminação, 305
- teorema central do limite, 200
- teorema de Bayes, 175, 213, 214
- teorema do valor médio, 288
- teoria da probabilidade, 167
- teste
  - χ^2, *ver* erro tipo I, 264
    - alto, 154
    - baixo, 157
    - hipótese gaussiana, 152
    - muitos ajustes, 158
    - tabela, 322, 323
  - $\mu = \bar{x}$ com σ desconhecido, 128
  - σ subestimado, 153, 156
  - σ superestimado, 153, 156
  - $\sigma = \sigma_{fabricante}$, 146
  - t de Student, 128
  - com variâncias conhecidas, 140
  - com variâncias diferentes e conhecidas, 140
  - de hipótese, 129, 134
  - erro tipo I, 131, 134
  - erro tipo II, 131, 134
  - F de Fisher, 146
    - tabela, 148, 332
  - função adequada, 153
  - função inadequada, 156
  - significância, 131
  - sobre médias, 139
  - sobre variâncias, 142
  - t de Student
    - precisão necessária, 132
    - tabela, 327, 340
  - tamanho, 131
- transformação de variável aleatória, 50

- união, 171
- uniforme
  - distribuição, 66

- vínculo
  - a posteriori, 280
  - a priori, 280
  - graus de liberdade, 273
  - linear, 235, 273
    - exemplo do triâmgulo, 275
    - exemplo do triângulo, 273
- valor esperado, 182, 221
- valor verdadeiro, 1, 7
- variável aleatória, 2, 178, 179
  - mudança, 50
  - transformação, 50
  - troca, 50
- variância, 8, 114, *ver* covariância, 219
  - binomial, 30
  - das estimativas, 245
  - distribuição, 59
  - do estimador, 226
  - estimativa não tendenciosa, 256
  - fórmula aproximada, 73
  - global, 140
  - iguais mas desconhecidas, 253
  - mínima, 228
    - interpretação geométrica, 251
  - matriz, 114, 115
  - superestimação, 157

Índice

- <>, 8, 15
- χ^2
  - alto, 154
  - baixo, 157, 269
    - dados covariantes, 269
  - distribuição, 53
  - forma matricial, 239
  - média, 58
  - reduzido, 160
    - faixa aceitável, 160
  - tabela, 322, 323
  - teste, 264
  - variância, 58
- σ^2
  - distribuição, 59
- $\mathcal{L}$, *ver* função verossimilhança

- ajuste
  - dados correlacionados, 266
  - dados não gaussianos, 235
  - formula matricial, 236
  - função adequada, 153
  - função inadequada, 156
  - função linear, 113, 235
  - função não linear, 235
  - graus de liberdade nulo, 113
  - minimos quadrados, 108
  - parâmetro não linear, 303
  - qualitativo, 151
  - reta, 108
  - teste de χ^2, 153, 156
  - vínculo linear, 273
- aleatoriedade, 1, 5
- análise de previsão, 118
  - reta, 118
- arredondamento, 89
- assimetria
  - parâmetro de, 185

- baricentro, 243
- Bayes, 175
  - postulado, 213, 215
  - teorema, 175, 213, 214
- binomial, 29
  - governando histogramas, 32
  - hipóteses, 30
  - média, 30
  - variância, 30

- Cauchy, 183, 196, 218
- Chebyshev
  - desigualdade, 204
- coeficiente de correlação, 80, 187
- coeficiente de correlação linear, 259
- comparação de médias, 139
- condição de regularidade, 226
- conjunto vazio ($\emptyset$), 170
- consistência, 209, 219
  - máxima verossimilhança, 288
- convergência absoluta, 182
- convergência em probabilidade, 5

correlação, 187
χ^2 subestimado, 269
coeficiente, 80, 187, 259
covariância, 18, 71, 114, 115
alteração das estimativas, 271
dados, 116, 235
exemplo, 77
fórmula aproximada, 75
matriz, 114, 115
critério de arredondamento, 89
cumulantes, 197
função geratriz, 196
curtose, 185

dados
baricentro, 243
dados correlacionados, 235, 266, *ver* dados covariantes, *ver* média
χ^2 subestimado, 269
dados covariantes, 116, 235, *ver* dados correlacionados
dados gaussianos, 108
dados não gaussianos, 108, 263, 264
f.d.p. desconhecida, 264
poucos dados, 264
decaimento radioativo, 35
desigualdade de Chebyshev, 204
desintegração radioativa, 35
desvio padrão, 8, 10, 21
da média, 10
da série, 10
do desvio padrão, 60
distribuição, *ver* fdp
χ^2, 53, 58
σ^2, 59
Cauchy, 183, 218
cumulativa, 180
da variância, 59
F de Fisher, 142
multi-dimensional, 181
multinormal, 42
normal, *ver* gausiana, *ver* multidimensional
Student, 83
fórmula, 87
limite para $\nu >> 1$, 87
média, 87
variância, 87
t de Student, 83
uniforme, 66

eficiência, 100, 210, 222, 231
equivalência MQ e MV, 108
erro, 1, 7
aleatório, 6
de arredondamento, 66
estatístico, 1, 6
propagação, 73
sistemático, 1, 6
erro tipo I, 131, 134, *ver* teste de hipótese, 138, 158
probabilidade, 131
erro tipo II, 131, 134, *ver* teste de hipótese, 138
escola
bayesiana, 215
clássica, 215
frequencista, 212
não bayesiana, 215
espaço amostral, 11, 167, 170, 179
contínuo, 180
discreto, 172, 180
reduzido, 174
estatística
bayesiana, 215
definição, 217

definições, 10
não bayesiana, 215
não-paramétrica, 210
estimador, 11, 209, 217
ótimo, 210
assintoticamente não tendencioso, 102
assintoticamente normal, 100, 287
consistente, 219
eficiência, 100, 231
média dos dados, 217
não tendencioso, 101, 221, 225
robusto, 210
suficiência, 232
tendenciosidade, 101
tendencioso, 100, 102
variância do, 226
variância mínima, 223, 226, 228
estimativa, 217
ótima, 209
assintoticamente não tendenciosa, 102
de ponto, 23
não paramétrica, 22
paramétrica, 21
robusta, 25
tendenciosa, 102
variância, 245
evento, 167
complementar, 171
composto, 168, 170, 171
intersecção, 170
união, 171
elementar, 170
equiprovável, 210
exclusivo, 171
impossível, 170
independente, 175
mutuamente exclusivo, 171

F de Fisher, 142, 145
tabela, 148, 332
f.d.p., *ver* função densidade de probabilidade
fdp, *ver* distribuição
χ^2, 58
bi-dimensional, 181
Cauchy, 183, 196, 218
condicional, 181
conjunta, 181
da média, 48
dimensão, 13
F de Fisher, 145
média, 146
variância, 146
marginal, 17, 181
multidimensional, 16
unimodal, 20
FGC, *ver* função geratriz dos cumulantes
flutuação estatística, 2, 9
flutuação num histograma, 195
função
aleatória, 178
característica, 47, 196
de probabilidade, 9, 11, 179
binomial, 29
densidade de probabilidade, 12, *ver* fdp, 180
dimensão, 13
marginal, 17
geratriz, 188, 196
dos cumulantes, 196, 200
linear, 108
não linear, 108
regular, 288

verossimilhança, 99, 224
regular, 224
função densidade de probabilidade, *ver* fpd

gaussiana, 42
bidimensional, 44, 45
como limite da binomial, 63
como limite da Poisson, 65
como limite de χ^2, 65
como limite de outras f.d.p.s, 63
duas dimensões, 45
tabela, 318, 319
geratriz
função, 188
graus de liberdade, 152
vínculos, 273

hipótese
a posteriori, 215
a priori, 215
alternativa, 138
estatística, 125
teste, 125, *ver* teste de hipótese
histograma
flutuação, 32, 195

incerteza, 1, 7, 8, *ver* variância
propagação, 73
independência, 175
estatística, 175
estatıistitica, 18
estocástica, 175
inferência estatística, 125
informação, 227
integral
convergência absoluta, 182
intersecção, 170
intervalo de confiança, 8, 87
t de Student, 87
inversão de matrizes, 265

jackknife, 222
Jacobiano, 52

lei da probabilidade total, 174
lei dos grandes números, 205, 218, 219
Limite Mínimo de Variância, 224
limite mínimo de variância, 227, 229
LMV, *ver* Limite Mínimo de Variância
localização, 218
Lorentz, 183

mínimos quadrados, 235
estimador de mínima variância, 251
forma geral, 109, 235
função linear, 113
não tendenciosidade, 245
propriedades do estimador, 235
máxima verossimilhança, 97
assintoticamente não-tendenciosa, 290
assintoticamente normal, 292
consistência, 288
eficiência, 293
tendência à normalidade, 292
média, 21, 217, 218, 222
binomial, 30
dados correlacionados, 269
distribuição, 48
dos extremos, 222
método da máxima verossimilhança, 99
método de Gauss, 299
algoritmo, 300
critério de convergência, 301
método de Gauss-Marquardt, 301, *ver* método de Gauss

limite de λ, 302
precisão numérica, 302
matriz de covariância, 114, 115
assintótica, 301
inversão, 265
matriz de planejamento, 236, 270, 279
matriz de projeto, 267, 274
mediana, 20, 218, 222
intervalos de confiança, 23
minimos quadrados
justificativa, 108
Minimum Variance Bound, *ver* Limite Mínimo de Variância
moda, 20, 218
momento, 15, 184
central, 185
de ordem n, 185
de ordem n, 184
multinormal, 42
MVB, *ver* Limite Mínimo de Variância

nível de significância, 131, *ver* teste
não-tendenciosidade, 209, 219

parâmetro
não linear
ajuste, 303
parâmetro de assimetria, 185
parâmetros
covariância, 115, 117
estimativas, 110, 113
incerteza independente das medidas, 118
interpretação, 116
variância, 117
vinculos lineares, 235
partição, 173
poder do teste, 138
Poisson, 34
evento tipo, 37
hipóteses, 35, 37
soma de, 40
postulado de Bayes, 213, 215
previsão, 118
reta, 118
probabilidade, 1, 2
condicional, 174
crença, 212
frequência relativa, 212
total, 174
probabilidade vs estatística, 19
projeto
seeplanejamento, 236
propagação de incertezas, 73

regularidade, 226, 288
resíduo, 2, 109
reta
coef. angular independente da origem, 244
coeficientes
covariância, 117
incerteza, 117
variância, 117
robustez, 25, 210
ruido eletrônico, 202

Student
distribuição, 83
suficiência, 232

t de Student, 22, 83, 85
intervalo de confiança, 87
limite para $\nu >> 1$, 87
média, 87
tabela, 327, 340
variância, 87

tabela
χ^2, 322, 323
F de Fisher, 148, 332
gaussiana, 318, 319
t de Student, 327, 340
tendenciosidade, 100–102, 209, 219
eliminação, 305
teorema central do limite, 200
teorema de Bayes, 175, 213, 214
teorema do valor médio, 288
teoria da probabilidade, 167
teste
χ^2, *ver* erro tipo I, 264
alto, 154
baixo, 157
hipótese gaussiana, 152
muitos ajustes, 158
tabela, 322, 323
$\mu = \bar{x}$ com σ desconhecido, 128
σ subestimado, 153, 156
σ superestimado, 153, 156
$\sigma = \sigma_{fabricante}$, 146
t de Student, 128
com variâncias conhecidas, 140
com variâncias diferentes e conhecidas, 140
de hipótese, 129, 134
erro tipo I, 131, 134
erro tipo II, 131, 134
F de Fisher, 146
tabela, 148, 332
função adequada, 153
função inadequada, 156
significância, 131
sobre médias, 139
sobre variâncias, 142
t de Student
precisão necessária, 132
tabela, 327, 340
tamanho, 131
transformação de variável aleatória, 50

união, 171
uniforme
distribuição, 66

vínculo
a posteriori, 280
a priori, 280
graus de liberdade, 273
linear, 235, 273
exemplo do triâmgulo, 275
exemplo do triângulo, 273
valor esperado, 182, 221
valor verdadeiro, 1, 7
variável aleatória, 2, 178, 179
mudança, 50
transformação, 50
troca, 50
variância, 8, 114, *ver* covariância, 219
binomial, 30
das estimativas, 245
distribuição, 59
do estimador, 226
estimativa não tendenciosa, 256
fórmula aproximada, 73
global, 140
iguais mas desconhecidas, 253
mínima, 228
interpretação geométrica, 251
matriz, 114, 115
superestimação, 157