Eletromagnetismo

Ondas eletromagnéticas

- Cargas alimentam o campo.
- Em repouso, o campo elétrico.
- Em movimento, o campo magnético também.
- Mas vimos que os campos de realimentam.
- Variar o campo elétrico gera campo magnético (Faraday).
- Variar o campo magnético gera campo elétrico (Maxwell).
- E se variarmos tudo junto?

Equações de Maxwell

$$\boxed{\begin{aligned} &\nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ &\nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ &\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} \\ &\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{D} \end{aligned}}$$

(Gauss, 1835)

(Faraday, 1831)

(Ampère-Maxwell, 1863)

$+$

Relações constitutivas

$$\boxed{\begin{aligned} &\vec{D} = \epsilon \vec{E} \\ &\vec{B} = \mu \vec{H} \end{aligned}}$$

+ Equação de continuidade $\rightarrow$ $\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial}{\partial t}\rho$

+ Força de Lorentz (1.895) $\rightarrow$ $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

Cargas são fontes de campo $\rightarrow$ mas não só elas!

O campo se realimenta, se ele varia.

Na ausência de cargas livres, $\rho = 0$, $\vec{J} = 0$ e

$$\boxed{\begin{array}{ll} \nabla \cdot \vec{D} = 0 & \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} & \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial}{\partial t}\vec{D} \end{array}}$$

Começemos com um meio <u>linear</u> <u>homogêneo</u>

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \qquad \vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\Rightarrow \quad \nabla \times \vec{B} = \mu \epsilon \frac{\partial}{\partial t}\vec{E}$$

Se calcularmos $\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$

Chato, mas calculável! Verificar a validade da resposta é sempre mais fácil

Se calcularmos $\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$

Chato, mas calculável! Verificar a validade da resposta é sempre mais fácil

Como $\nabla \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\nabla^2 \vec{E} \Rightarrow$ Laplaciano!

Lembra que $\nabla^2 V = \rho$? Mas aqui é sobre cada componente do vetor.

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla \times \left(-\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}\right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{B})$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}\right)$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \vec{E} = \mu \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}$$

Repetindo agora para o campo magnético

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} = -\nabla^2 \vec{B}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \nabla \times \left(\mu \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \right) = \mu \epsilon \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{E})$$

$$= \mu \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \right)$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \vec{B} = \mu \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B}$$

<u>Equações de onda</u>

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} \qquad \nabla^2 \vec{B} = \mu \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B}$$

Já tínhamos encontrado antes para os potenciais...

Forma alternativa (e feia) das eqs. de Maxwell

$$\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot A) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\left(\nabla^2 \vec{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A}\right) - \nabla\left(\nabla \cdot \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} V\right) = -\mu_0 \vec{J}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad ; \quad \vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}$$

Mas dá para melhorar: Ajustando os potenciais

Calibre de Lorentz : Adotando $\nabla\cdot\vec{A} = -\mu_0\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} V$

$$\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot A) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \rightarrow \nabla^2 V - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\left(\nabla^2\vec{A} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}\right) - \nabla\underbrace{\left(\nabla\cdot\vec{A} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}V\right)}_{0} = -\mu_0\vec{J}$$

V e $\vec{A}$ desacoplam!

$$\left(\nabla^2 - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \qquad \Box^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

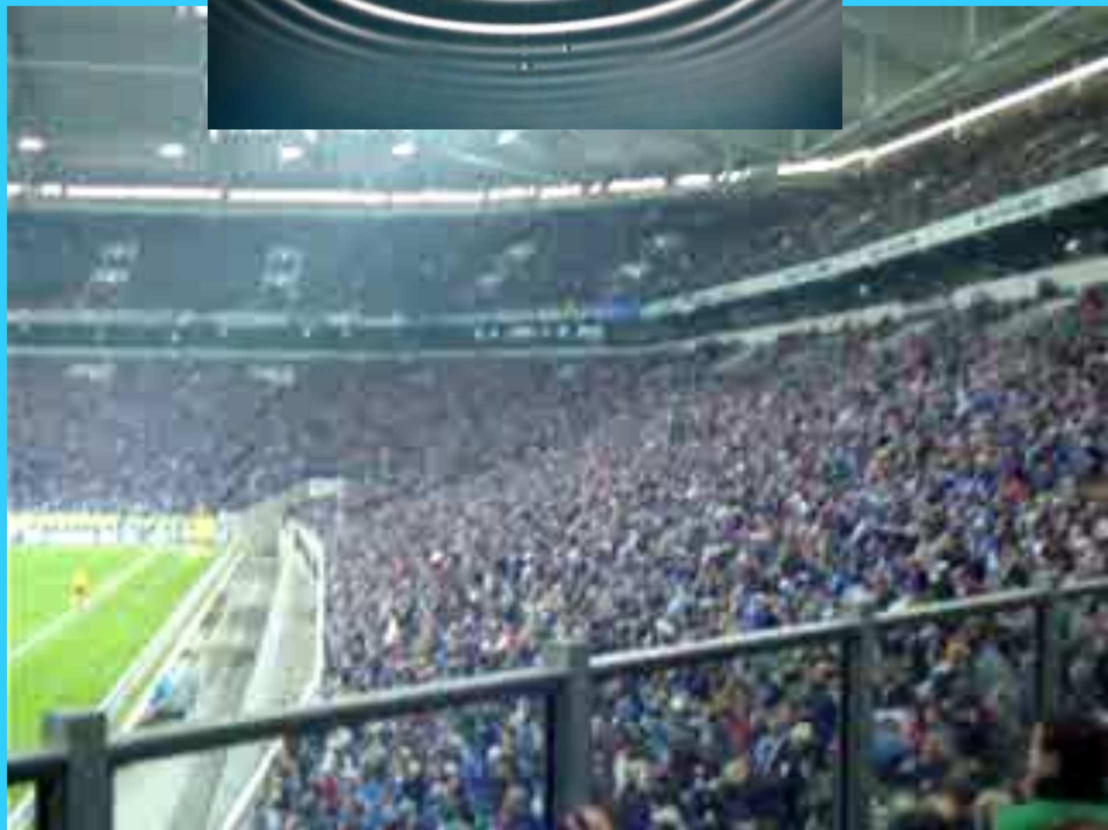
$$\Rightarrow$$

$$\left(\nabla^2 - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A} = -\mu_0\vec{J} \qquad \qquad \Box^2\vec{A} = -\mu_0\vec{J}$$

↓ D'Alembertiano

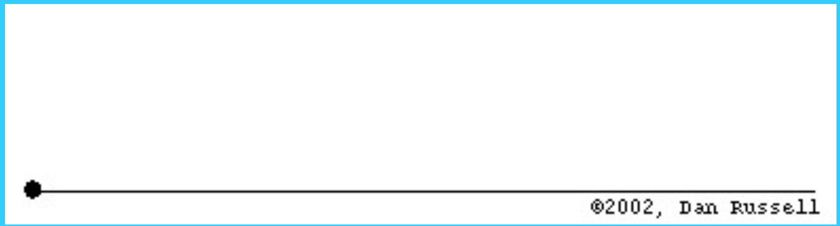
$\vec{r}$ e t entram em pé de igualdade!

O que são ondas?

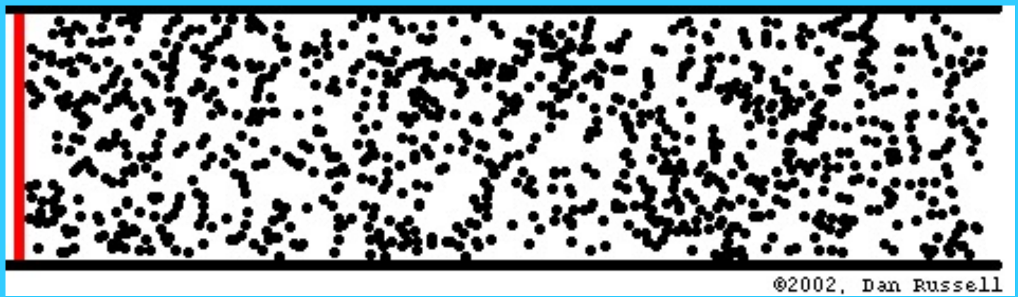


I. Farkas, D. Helbing e T. Vicsek, Nature (London) **419**, 131 (2002).

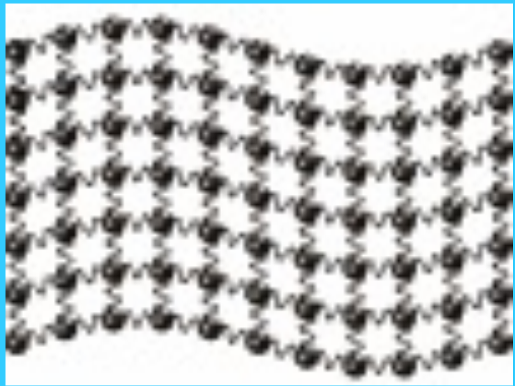
Ondas transversas: pulsos numa corda, mola, etc.

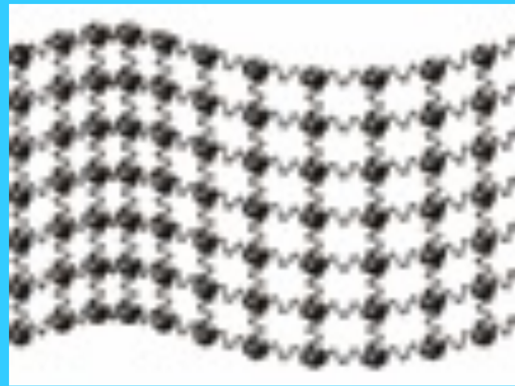


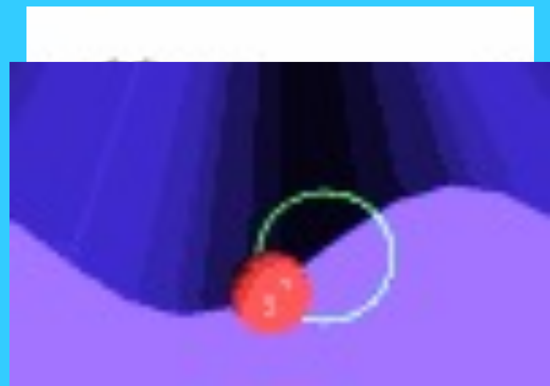
Ondas longitudinais: mola, som, etc.



Diferentes tipos de ondas







Resumindo nossa discussão, concluímos que:

- Uma onda é uma *perturbação* em um <u>sistema.</u>
- A perturbação é *dinâmica*: ela se *propaga* no espaço, com o passar do tempo
- A propagação implica em uma evolução em uma certa *direção* com uma certa *taxa de evolução*:

→ <u>velocidade da onda</u> com módulo e sentido.

- Uma onda *transfere* momento.
- Uma onda *transfere* energia.
- Uma onda *não transfere* matéria (deslocamentos microscópicos, mas sem <u>fluxo médio</u>).

A perturbação pode ser:

um deslocamento transversal (corda, mola, meios elásticos, fluidos),
um deslocamento longitudinal (mola, meios elásticos, fluidos),
uma variação de pressão (meios elásticos, fluidos),
uma variação de densidade (meios elásticos, fluidos),
uma flutuação do campo eletromagnético (espere por Física III),
uma deformação no espaço-tempo (relatividade geral),
deslocamento de torcedores em um estádio,
congestionamento em uma avenida,
etc.

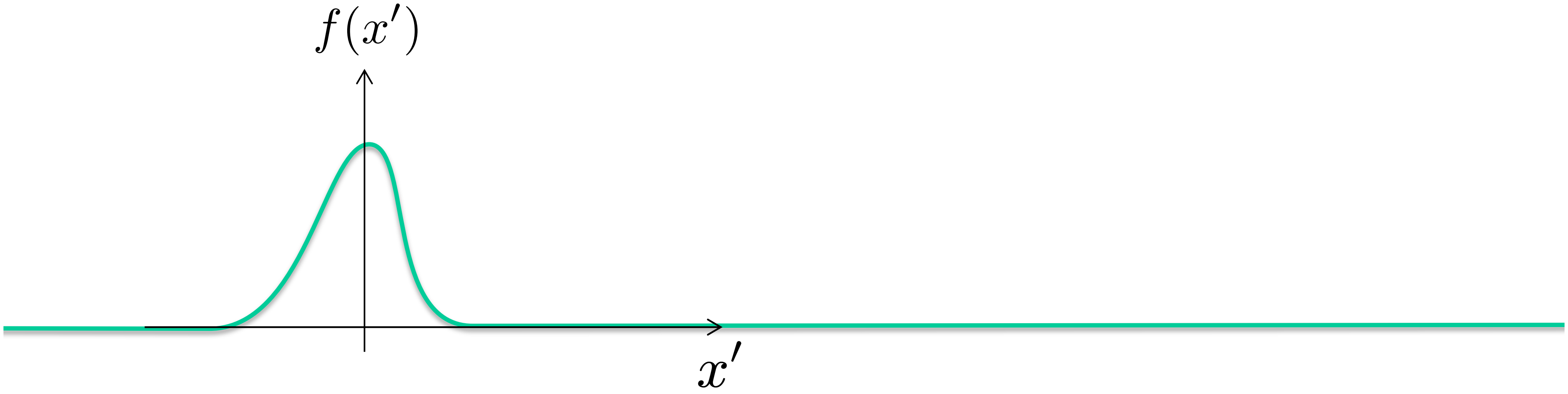
Temos duas classes de ondas: ondas longitudinais e ondas transversais!

Para pensar:

Toda onda pede um suporte material?
Toda onda se propaga sem deformação?

Vamos colocar isto em termos matemáticos:

Perturbação: $f(x')$, onde : x' é posição (unidades: metros) no referencial S',
f é perturbação (unidades: metros, g/cm^3, atm, V/m, G, “manos no Itaquerão”, etc.)



A perturbação $f(x')$ é estática no referencial S'. É portanto uma função com *uma* variável x'.

Vamos agora fazer a função se deslocar: vamos dizer que o referencial S' está se deslocando com velocidade v em relação ao referencial S. As posições em S são descritas pela variável x.

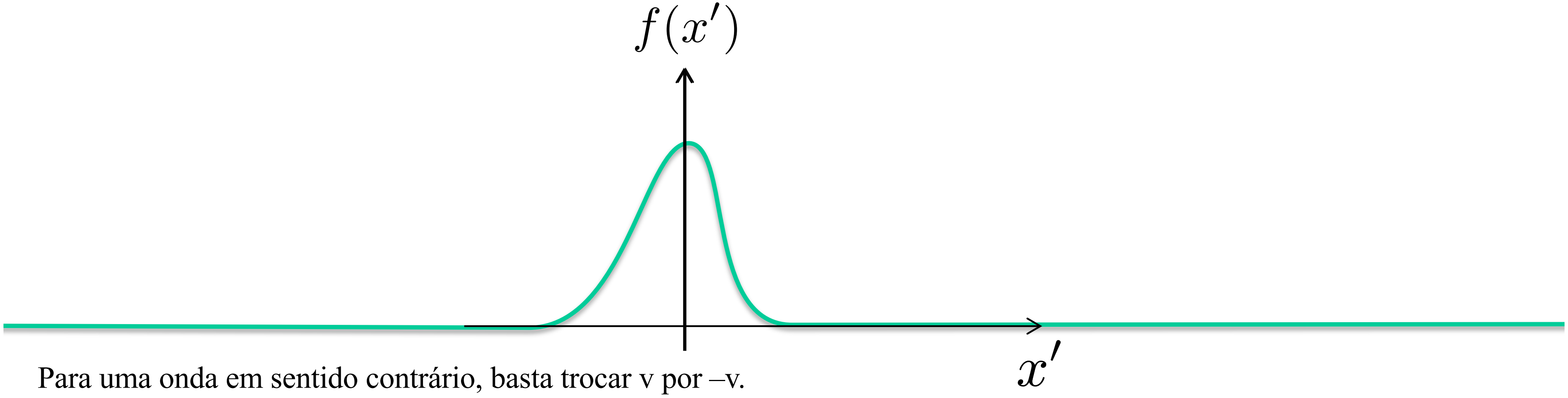
O referencial S' é o referencial onde a *perturbação* é estática em repouso. O referencial S é aquele onde o sistema está em repouso (exemplo: onde a corda está parada, não se deslocando ao longo de seu comprimento).

Em S, não podemos mais descrever a perturbação viajante com uma variável só. Devemos incluir o tempo. Precisamos então de uma outra função $y(x,t) = f(x')$.

A relação entre x e x' é dada pela transformação de Galileu:

$$x' = x - v \cdot t$$

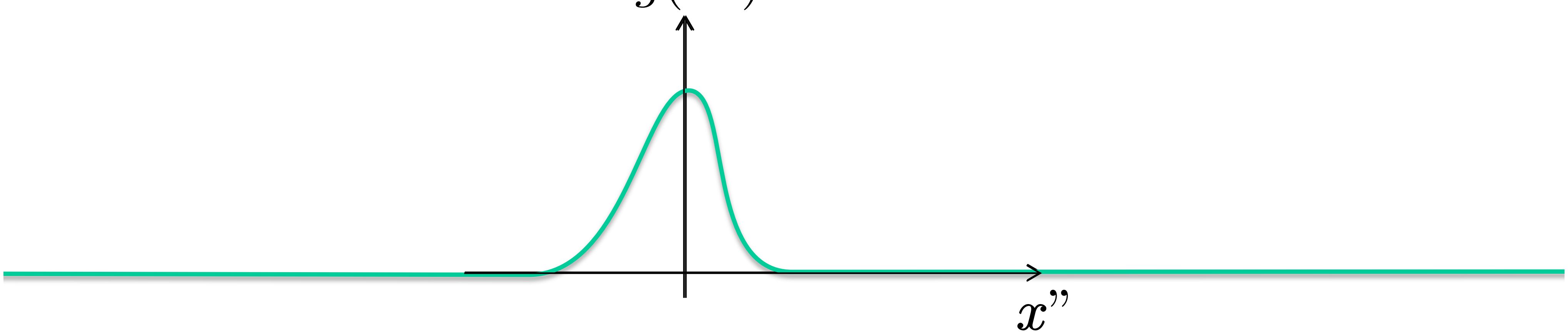
Temos a descrição de uma onda progressiva: $y(x,t) = f(x - v \cdot t)$



Para uma onda em sentido contrário, basta trocar v por –v.

Por uma mera conveniência, vamos chamar de g(x”) a função descrevendo a perturbação estática no referencial S” que se desloca à esquerda em relação ao referencial S.

$$y(x,t) = g(x + v \cdot t)$$



Em uma corda, por exemplo, podemos ter as duas ondas se propagando ao mesmo tempo.

Por enquanto, não discutimos nada sobre a forma de f(x’) ou g(x”). Basta saber, no entanto, que são funções “bem comportadas” – contínuas (afinal isto é física!), e deriváveis em primeira e segunda ordem (veremos por que)...

Ondas Harmônicas

Nada mais são que um caso particular das ondas gerais que vimos anteriormente.

Tratam-se de funções de onda nas quais: $f(x') = A\cos(k \cdot x' + \delta)$

Substituindo explicitamente a transformação de Galileu, temos $y(x,t) = A\cos(k \cdot x - k \cdot v \cdot t + \delta)$

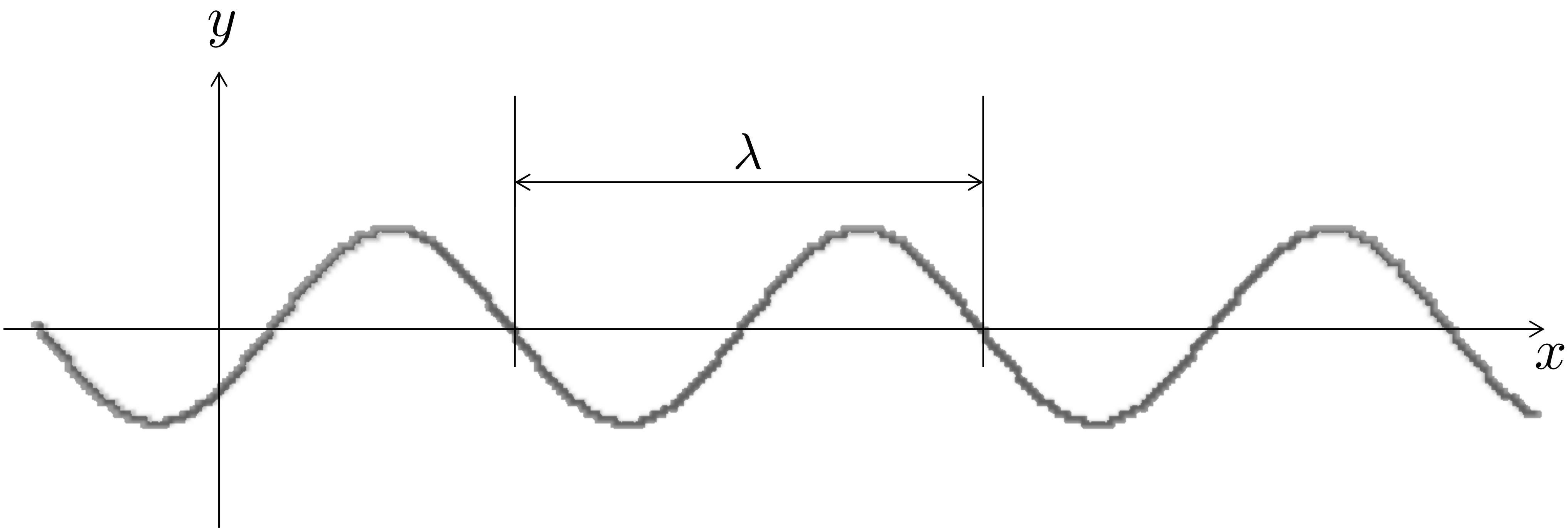
Ou de forma mais sintética: $$y(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \delta)$$

Com $\omega = k \cdot v$

Há um significado para cada termo: $y(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \delta)$

Tirando uma foto (um instantâneo) da onda, vemos que há uma periodicidade espacial:

a onda se repete a intervalos regulares λ .

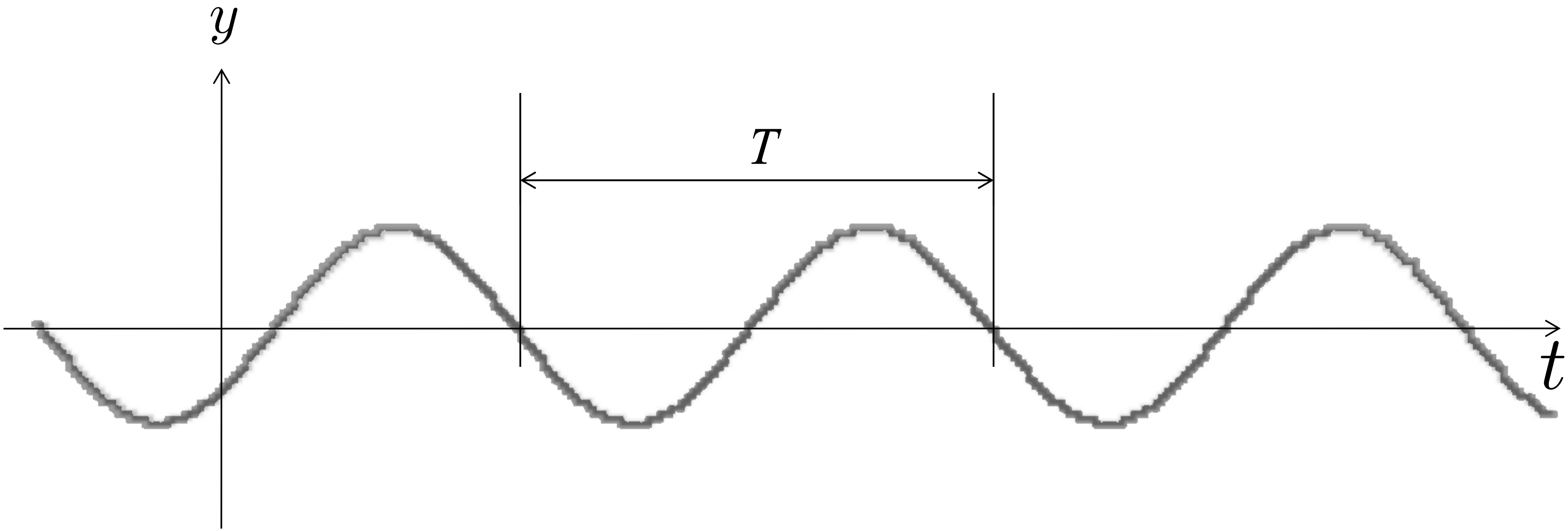


Chamamos λ de <u>comprimento de onda</u> . Como todo comprimento, é medida em metros.

Vemos ainda que podemos relacioná-lo com o <u>número de onda angular</u> : $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$.

Investigando a dependência temporal: $y(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \delta)$

Tomando uma posição x fixa, observamos a evolução da perturbação ao longo do tempo. Verificamos agora uma repetição da forma de onda a intervalos de tempo T



Chamamos T de <u>período da onda</u> . Como todo intervalo de tempo, é medida em segundos.

Temos agora uma frequência $\nu = \dfrac{1}{T}$, medida em Hertz (Hz = s^{-1}) na qual a onda se repete.

Por fim, temos a <u>frequência angular</u> $\omega = 2\pi\nu = \dfrac{2\pi}{T}$ (medida em rad/s).

Ondas Harmônicas $y(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \delta) = A\cos\varphi(x,t)$

Amplitude da perturbação

A

Frequência angular

$\omega = 2\pi\nu = \dfrac{2\pi}{T}$

Número de onda angular

$k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

Comprimento de onda

λ

Período

T

Fase inicial

δ

O argumento do cosseno é um ângulo dependente da posição e do tempo: a fase da onda

$$\varphi(x,t) = kx - \omega t + \delta$$

Vemos que para x = 0 m , t = 0 s, temos a fase inicial δ

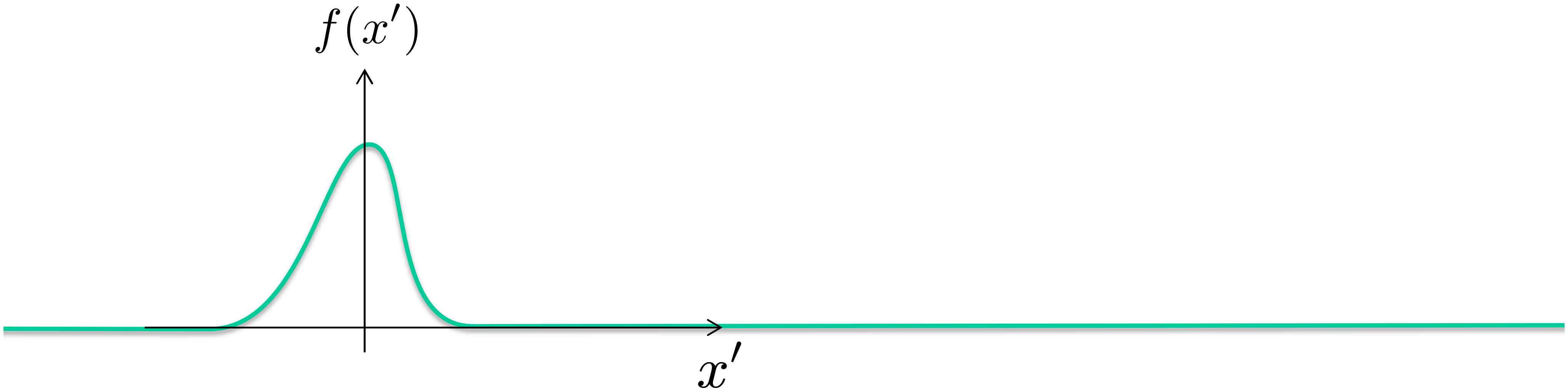
Se “surfarmos” a onda, ou seja, nos mantivermos acompanhando a onda (variamos nosso x em função de t), a fase é constante. Neste caso tiramos a velocidade de fase da onda:

$$\frac{d}{dt}\varphi(x,t) = k\frac{d}{dt}x - \omega = 0 \rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}x = \frac{\omega}{k} = v = \frac{\lambda}{T}$$

Voltemos à onda geral, com mais matemática: deduzindo a **EQUAÇÃO DE ONDA**

Dada a função de onda (nossa pequena perturbação) $y(x,t) = f(x - vt)$



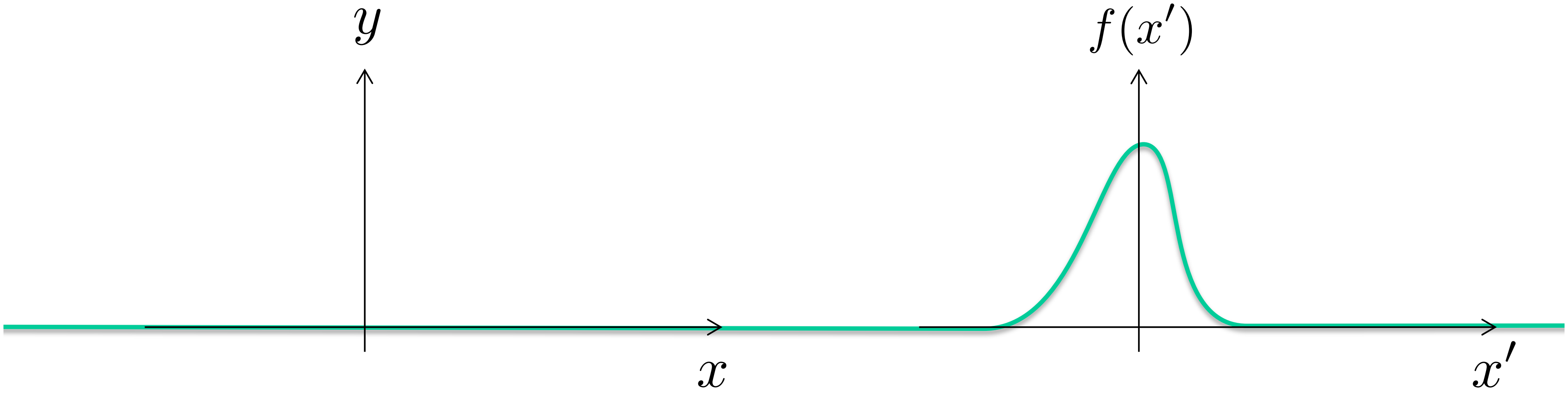
Podemos calcular a taxa de variação de *y*, em uma dada posição *x*. Se *y* for um deslocamento, temos uma velocidade. Esta derivada de uma função de duas ou mais variáveis, tomando apenas uma variável e tratando da outra variável como independente, é chamada de **derivada parcial**.

$$\frac{\partial}{\partial t} y(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} f(x') = \frac{df(x')}{dx'} \frac{\partial x'}{\partial t} = -v \frac{df(x')}{dx'}$$

aqui aplicamos a regra da cadeia, e a derivada de f não é parcial pois é uma função de uma única variável

Voltemos à onda geral, com mais matemática: deduzindo a **EQUAÇÃO DE ONDA**

Dada a função de onda (nossa pequena perturbação) $y(x,t) = f(x - vt)$



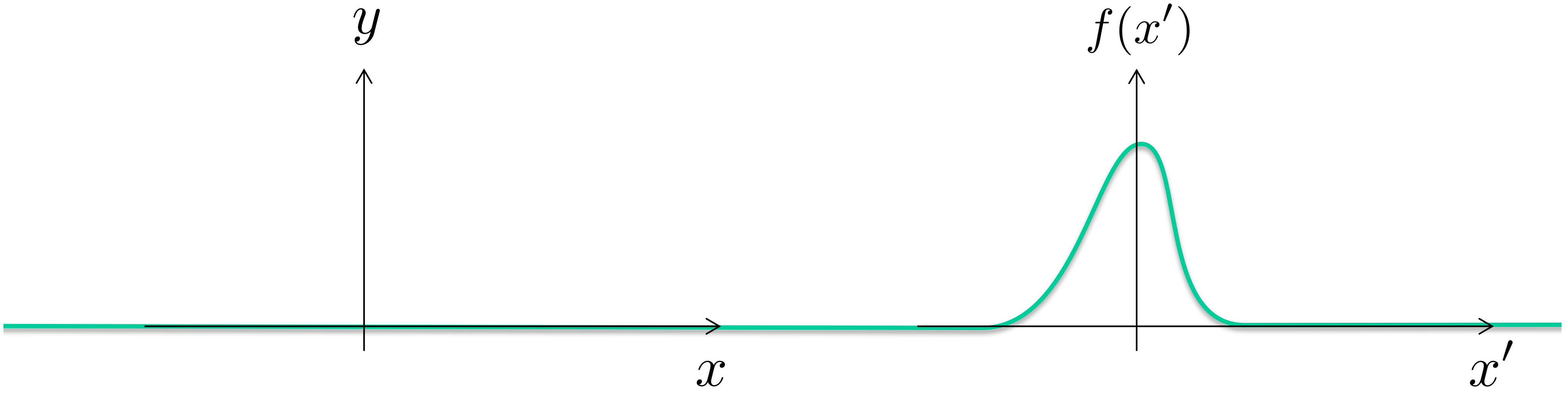
Repetimos o procedimento mais uma vez: derivada segunda (no caso de *y* ser um deslocamento, o nome disso é aceleração)

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} y(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left[-v\,\frac{df(x')}{dx'}\right] = -v\,\frac{d}{dx'}\left[\frac{df(x')}{dx'}\right]\frac{\partial x'}{\partial t} = v^2\frac{d^2 f(x')}{dx'^2}$$

aqui aplicamos novamente a regra da cadeia, e a função sendo derivada é a derivada primeira.

EQUAÇÃO DE ONDA

Se repetirmos o processo, mas agora derivando y em *x*, mantendo *t* constante.



$$\frac{\partial}{\partial x} y(x,t) = \frac{\partial}{\partial x} f(x') = \frac{df(x')}{dx'} \frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{df(x')}{dx'}$$ para a derivada primeira.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{df(x')}{dx'}\right] = \frac{d}{dx'}\left[\frac{df(x')}{dx'}\right]\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{d^2 f(x')}{dx'^2}$$ para a derivada segunda.

EQUAÇÃO DE ONDA

Comparando os resultado, vemos então que: $$\frac{\partial^2}{\partial t^2}y(x,t) - v^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}y(x,t) = 0$$

Esta é a Equação de ondas unidimensional.

Note que ela é satisfeita para uma função de onda se propagando em um sentido ou no outro.

Ou seja, as duas **funções de onda** abaixo são soluções para a **equação de onda**.

$$y(x,t) = f(x - v \cdot t) \qquad\qquad y(x,t) = g(x + v \cdot t)$$

Para finalizar, não se assuste com a equação de onda – equação diferencial linear de ordem 2:

- O fato de ser linear permite que soluções simples existam, por exemplo, as ondas harmônicas (mas não somente elas, como qualquer função de onda).
- O fato de ser de segunda ordem implica que há sempre dois parâmetros livres para uma dada condição inicial.
- O fato de você encontrar com ela de forma recorrente na natureza vai deixar você mais tranquilo.
- O termo acoplando a derivada segunda temporal à derivada segunda espacial é justamente a velocidade de propagação da onda ao quadrado. Por ser ao quadrado, temos dois valores possíveis de velocidade: positivo e negativo.
- Na maioria das vezes, vamos trabalhar com um meio (corda, fluidos, molas) para determinar quais parâmetros são relevantes para o cálculo de v.

Note por fim que multiplicar a função de onda por um fator não nulo muda a amplitude, mas não afeta a velocidade. Este fator multiplicativo não altera a razão entre as derivadas de segunda ordem.

Equações de onda

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} \qquad \nabla^2 \vec{B} = \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B}$$

Vamos simplificar: uma componente $\rightarrow \vec{E} = E\,\hat{i}$

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu\epsilon \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) E = \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} E$$

Uma coordenada: $E(x,y,z,t) = E(z,t)$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) E = \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} E \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial z^2} E(z,t) = \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} E$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} E(z,t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

Lembrando $\epsilon = \epsilon_0 (1+\chi_E) \rightarrow$ permissividade

$\mu = \mu_0 (1+\chi_m) \rightarrow$ permeabilidade

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \frac{1}{\sqrt{(1+\chi_E)(1+\chi_m)}}$$

No vácuo: $\chi_E = 0$; $\chi_m = 0$

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}\ F/m \quad ; \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{m}$$

$$\epsilon_0 \mu_0 = 4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-19} \frac{F \cdot H}{m^2} = 0,111 \cdot 10^{-16} \frac{s^2}{m^2}$$

$$H \rightarrow N \cdot \frac{m}{A^2} = N m \frac{s^2}{C^2} \qquad F \rightarrow \frac{C}{V} = \frac{C \cdot C}{J} = \frac{C^2}{Nm} \Rightarrow H \cdot F = s^2$$

$$\boxed{c^2 = \left(3,0 \cdot 10^8 \frac{m}{s}\right)^2 = 9,0 \cdot 10^{16} \frac{m^2}{s^2} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}} \quad !$$

$$\boxed{c^2 = \left(3{,}0\cdot 10^{8}\,\frac{m}{s}\right)^2 = 9{,}0\cdot 10^{16}\,\frac{m^2}{s^2} = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}}$$!

Neste caso o índice de refração

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{(1+\chi_E)(1+\chi_M)} \cong \sqrt{1+\chi_E}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \chi_M > 0 & \text{Paramagnético} \\ \chi_M < 0 & \text{Diamagnético} \end{array}\right\} \sim 10^{-4} - 10^{-5}$$

As equações de Maxwell unificam a Ótica ao Eletromagnetismo!