Eletromagnetismo

Energia e Momento no Campo

- Dá trabalho montar um campo estático!
- A energia gasta para montar as cargas, e forçar as correntes, fica armazenada em algum lugar.
- Vimos que o campo elétrico contém energia, bem como o magnético.
- De onde vem essa energia? Como fica o balanço com a energia mecânica?
- Conserva-se a energia?
- Conserva-se o momento?

Energia no campo elétrico:

→ Trabalho para montar o campo, carga a carga

$$W_E = \frac{1}{2}\int \vec{E}\cdot\vec{D}\, dv = \frac{1}{2}\int V\cdot\rho\, dv$$

Energia no campo magnético:

→ Trabalho para vencer a F.E.M.

e estabelecer as correntes

$$W_B = \frac{1}{2}\int \vec{B}\cdot\vec{H}\, dv = \frac{1}{2}\int (\vec{A}\cdot\vec{J})\, dv$$

Se temos $\vec{E}, \vec{B} \neq 0 \Rightarrow W_{EB} = \frac{1}{2}\int (\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{B}\cdot\vec{H})\, dv$

Podemos construir W_{EB} por <u>princípios de conservação</u>

Entre os instantes t, $t+dt$, as cargas em um sistema são remanejadas. Qual o trabalho do campo E.M.?

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \rightarrow \text{carga puntiforme}$$

Trabalho $dW = \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \underbrace{\vec{v}\,dt}_{d\vec{\ell}} = q\vec{E} \cdot \vec{v}\, dt$

pois $(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} = 0$

$$\therefore \frac{dW}{dt} = q \cdot \vec{E} \cdot \vec{v}$$

$q \rightarrow \int \rho\, dv \rightarrow$ distribuição de cargas

Trabalho total $\displaystyle \frac{dW}{dt} = \int \rho \cdot (\vec{E} \cdot \vec{v})\, dv = \int \vec{E} \cdot \underbrace{(\rho \vec{v})}_{\vec{J}}\, dv$

Trabalho total $\frac{dW}{dt} = \int \rho \cdot (\vec{E} \cdot \vec{v})\, dv = \int \vec{E} \cdot \underbrace{(\rho \vec{v})}_{\vec{J}}\, dv$

$\frac{d}{dt} W = \int (\vec{E} \cdot \vec{J})\, dv$ $\rightarrow$ simples, mas podemos buscar algo mais fundamental

Lembrando que $\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}$ (lei de Ampère Maxwell)

$\vec{E} \cdot \vec{J} = \vec{E} \cdot \nabla \times \vec{H} - \vec{E} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}$

$$\vec{E}\cdot\vec{J} = \vec{E}\cdot\nabla\times\vec{H} - \vec{E}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\vec{D}$$

Lembrando: $\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{H}) = (\nabla\times\vec{E})\cdot\vec{H} - (\nabla\times\vec{H})\cdot\vec{E}$

$$\Rightarrow \vec{E}\cdot\vec{J} = -\nabla(\vec{E}\times\vec{H}) + \vec{H}(\nabla\times\vec{E}) - \vec{E}\frac{\partial}{\partial t}\vec{D}$$

$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$ (lei de faraday)

$$\Rightarrow \vec{E}\cdot\vec{J} = -\nabla(\vec{E}\times\vec{H}) - \vec{H}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} - \vec{E}\frac{\partial}{\partial t}\vec{D}$$

O próximo passo assume isotropia: $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, $\vec{B} = \mu \vec{H}$

linearidade: $\epsilon(\vec{E}) = \epsilon$; $\mu(\vec{H}) = \mu$

conservação $\Rightarrow$ $\epsilon(t) = \epsilon$; $\mu(t) = \mu$ (aceita-se perdas ôhmicas)

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\vec{E} \cdot \vec{D}) = \vec{E} \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} + \vec{D} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} = \vec{E} \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} + \epsilon \vec{E} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}$$

$$= \vec{E} \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} + \vec{E} \frac{\partial}{\partial t} \epsilon \vec{E} = 2 \vec{E} \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{B} \cdot \vec{H}) = 2 \vec{H} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}$$

$$\Rightarrow \vec{E}\cdot\vec{J} = -\nabla(\vec{E}\times\vec{H}) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\left(\vec{E}\cdot\vec{D}+\vec{B}\cdot\vec{H}\right)}_{\to \text{ dens. de energia}}$$

Definindo $\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H}$

$$U_{EM} = \frac{\vec{E}\cdot\vec{D}+\vec{B}\cdot\vec{H}}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t}U_{EM} + \nabla\cdot\vec{S} = -\vec{E}\cdot\vec{J}}$$

Lembram da equação de continuidade? $\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla\cdot\vec{J} = 0$?

No vácuo, $\vec{E}\cdot\vec{J}=0 \Rightarrow \vec{S} \to$ fluxo de energia / tempo

$$\boxed{\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}} \longrightarrow \text{Vetor de Poynting} \longrightarrow \frac{\text{Energia}}{\text{Área}\cdot\text{tempo}}$$

Teorema de Poynting (1884) / J. H. Poynting @ U. Birmingham (1852-1914)

$$\frac{dW}{dt}=\int(\vec{E}\cdot\vec{J})\,dv=-\int\frac{\partial}{\partial t}u_{em}\,dv-\int(\nabla\cdot\vec{S})\,dv$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dW}{dt}=-\frac{d}{dt}\int_V u_{em}\,dv-\oint_S \vec{S}\cdot d\vec{a}}$$

Trabalho sobre as cargas no volume $\Longleftrightarrow$ energia do campo no volume + Fluxo de energia saindo do volume

Se considerarmos que o trabalho do campo implica em variação de <u>energia mecânica</u> (potencial ou cinética) U_M

$$\frac{d}{dt} W = \frac{d}{dt}\int U_m \, dv \Rightarrow \boxed{\nabla \cdot \vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(U_M + U_{EM}\right)}$$

mecânica

campo E.M.

<u>Equação de continuidade da energia</u>

Um velho exemplo:

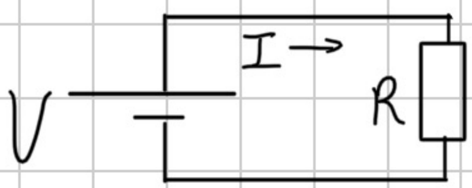
Joule demonstrou que a corrente passando por um fio aquece a água em um calorímetro em 1840 → Energia química da bateria

Energia elétrica

→ Calor

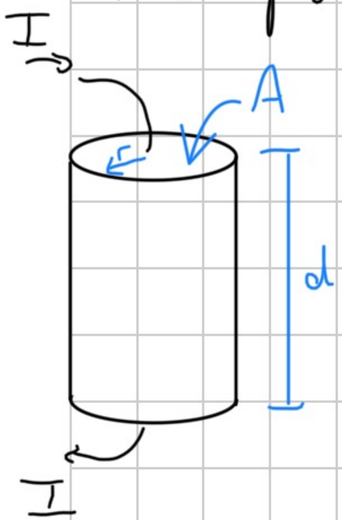
Em 1845 → Calor ⟷ energia mecânica

Potência dissipada: $P = V \cdot I$



$$V = R \cdot I \Rightarrow P = \frac{V^2}{R} = R \cdot I^2$$

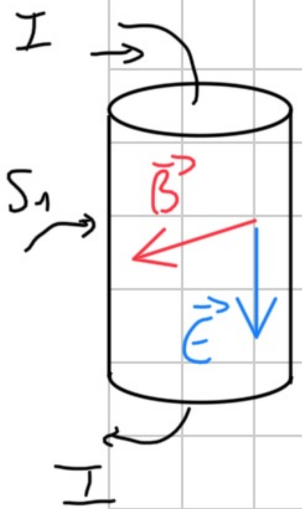
Do ponto de vista da Eletrodinâmica



$$E = \frac{V}{d}$$ → campo elétrico ao longo do cilindro

Campo Magnético na superfície → $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi r \cdot B = \mu_0 I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$



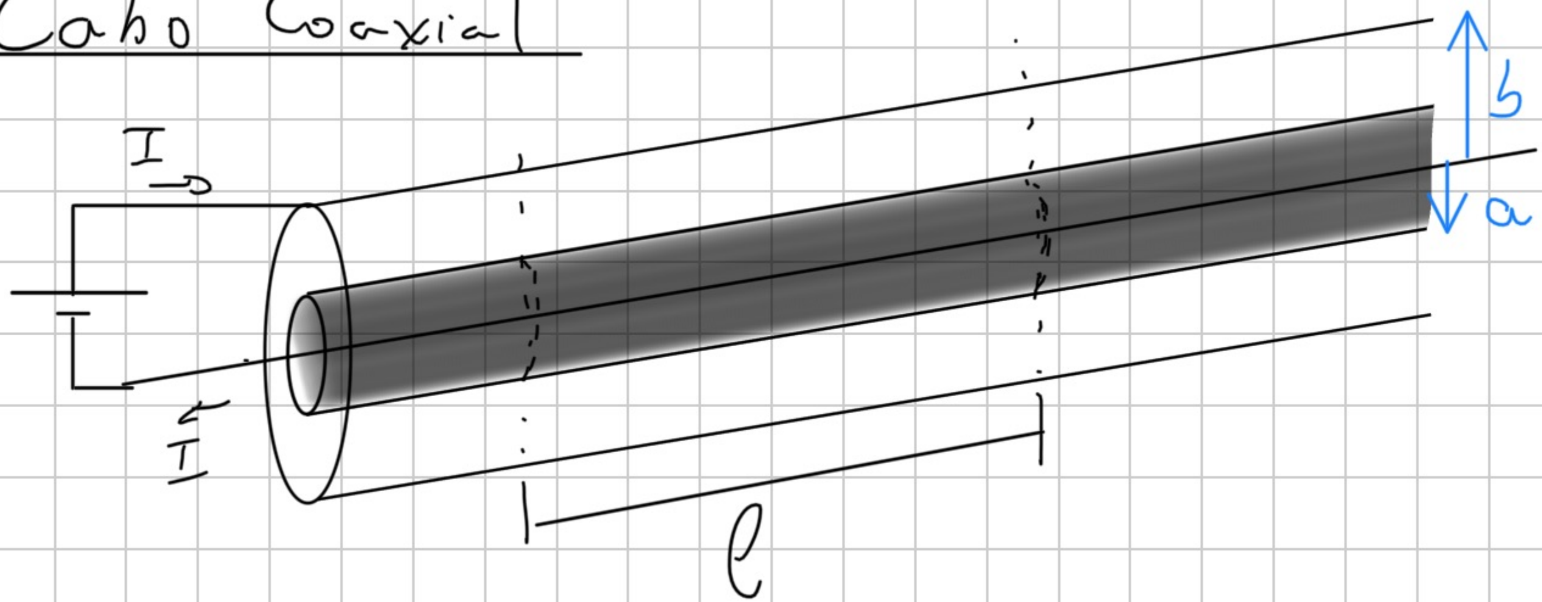
$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \longrightarrow \text{aponta para dentro do fio}$$

$$S = \frac{V}{d} \cdot \frac{I}{2\pi r}$$

$$\oint \vec{S} \cdot d\vec{a} = \int_{S_1} \frac{VI}{2\pi r d} \cdot -\hat{r} \cdot \hat{r} \cdot da = -\frac{V \cdot I}{2\pi r d} \cdot d \cdot 2\pi r$$

$$P_d = \frac{dU_{em}}{dt} = -\int \vec{S} \cdot d\vec{a} = V \cdot I$$

Cabo Coaxial



Qual a potência circulando pelo cabo?

$$\vec{E} = \frac{-Q/l}{2\pi \epsilon r} \hat{r} \qquad \vec{B} = \frac{\mu \cdot I}{2\pi r} \hat{\theta} \qquad \vec{H} = \frac{I}{2\pi r} \hat{\theta}$$

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{-Q \cdot I / l}{4\pi^2 r^2 \epsilon} \underbrace{\hat{r} \times \hat{\theta}}_{\vec{k}}$$

$$V = -\int_a^b E\, dr = \frac{Q}{\ell} \cdot \frac{1}{2\pi\epsilon} \int_a^b \frac{1}{r}\, dr = \frac{Q}{\ell} \frac{1}{2\pi\epsilon} \ln r \Big|_a^b$$

$$= \frac{Q}{\ell} \frac{1}{2\pi\epsilon} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{Q}{\ell} = 2\pi\epsilon \frac{V}{\ln(b/a)}$$

$$\vec{S} = V \cdot I \cdot \frac{1}{2\pi \ln(b/a)} \frac{1}{r^2} \hat{k}$$

$$P = \int \vec{S} \cdot d\vec{a} = \int_a^b \frac{V \cdot I}{2\pi \ln(b/a)} \frac{1}{r^2} 2\pi r\, dr = \boxed{V \cdot I}$$

$$\hat{k} \cdot 2\pi r\, dr$$

Conservação de Momento

O Tensor de Stress de Maxwell

Força sobre cargas: $\vec{F} = \int (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \rho \, dv$

$$= \int (\underbrace{\rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}}_{\text{densidade volumétrica de força}}) \, dv$$ (usando $\vec{J} = \rho \vec{v}$

$$\vec{f} = \rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}$$

Lei de Gauss: $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$

Lei de Ampère-Maxwell: $\nabla \times \vec{H} - \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} = \vec{J}$

$$\vec{f} = (\nabla \cdot \vec{D}) \vec{E} + (\nabla \times \vec{H}) \times \vec{B} - \left(\frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \right) \times \vec{B}$$

Como $\frac{\partial}{\partial t}(\vec{D}\times\vec{B}) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\vec{D}\right)\times\vec{B} + \vec{D}\times\left(\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}\right)$

Lei de Faraday $\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{D}\times\vec{B}) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\vec{D}\right)\times\vec{B} - \vec{D}\times(\nabla\times\vec{E})$$

$$\Rightarrow \vec{F} = (\nabla\cdot\vec{D})\cdot\vec{E} - \vec{B}\times(\nabla\times\vec{H}) - \vec{D}\times(\nabla\times\vec{E}) - \frac{\partial}{\partial t}(\vec{D}\times\vec{B})$$

$(\nabla\cdot\vec{B})\cdot\vec{H}$ $\rightarrow$ somando zero! $\underline{\nabla\cdot\vec{B}=0}$

Simétrico!

Mais um truque matemático: $\vec{E} \times (\nabla \times \vec{E}) = \frac{1}{2} \nabla (E^2) - (\vec{E} \cdot \nabla)\vec{E}$

$$\vec{F} = \epsilon \left[(\nabla \cdot \vec{E})\vec{E} + (\vec{E} \cdot \nabla)\vec{E} - \frac{1}{2} \nabla E^2 \right]$$

$$+ \frac{1}{\mu} \left[(\nabla \cdot \vec{B})\vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{B} - \frac{1}{2} \nabla B^2 \right] - \epsilon\mu \frac{\partial}{\partial t} \vec{S}$$

$$\downarrow$$

Dá para melhorar? Compactando com o Tensor de Maxwell $\overleftrightarrow{T}$

$$\nabla \cdot \overleftrightarrow{T} = \epsilon \left[(\nabla \cdot \vec{E})\vec{E} + (\vec{E} \cdot \nabla)\vec{E} - \frac{1}{2} \nabla E^2 \right]$$

$$+ \frac{1}{\mu} \left[(\nabla \cdot \vec{B})\vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{B} - \frac{1}{2} \nabla B^2 \right]$$

Mais um truque matemático: $\vec{E} \times (\nabla \times \vec{E}) = \frac{1}{2} \nabla (E^2) - (\vec{E} \cdot \nabla)\vec{E}$

$$\vec{f} = \underbrace{\epsilon \left[(\nabla \cdot \vec{E})\vec{E} + (\vec{E} \cdot \nabla)\vec{E} - \frac{1}{2} \nabla E^2 \right] + \frac{1}{\mu} \left[(\nabla \cdot \vec{B})\vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{B} - \frac{1}{2} \nabla B^2 \right]}_{\vec{G}} - \epsilon \mu \frac{\partial}{\partial t} \vec{S}$$

Dá para melhorar? Compactando com o Tensor de Maxwell $\overleftrightarrow{T}$

$$\overleftrightarrow{T} = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\nabla \cdot \overleftrightarrow{T} = \epsilon \left[(\nabla \cdot \vec{E})\vec{E} + (\vec{E} \cdot \nabla)\vec{E} - \frac{1}{2} \nabla E^2 \right] + \frac{1}{\mu} \left[(\nabla \cdot \vec{B})\vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{B} - \frac{1}{2} \nabla B^2 \right]$$

$$\vec{\nabla} = \begin{bmatrix} \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} \\ \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} \\ \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$(\nabla\cdot\overleftrightarrow{T})_j = \epsilon\left[(\nabla\cdot\vec{E})\vec{E}_j + (\vec{E}\cdot\nabla)\vec{E}_j - \frac{1}{2}\nabla_j E^2\right]$$

$$+\frac{1}{\mu}\left[(\nabla\cdot\vec{B})\vec{B}_j + (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{B}_j - \frac{1}{2}\nabla_j B^2\right]$$

Com isso: $\vec{F} = \int \vec{f}\cdot dv = \int(\nabla\cdot\overleftrightarrow{T})dv - \int \epsilon\mu \frac{\partial}{\partial t}\vec{S}\, dv$

$$\vec{F} = \oint_{\mathcal{S}} \overleftrightarrow{T}\cdot d\vec{a} - \epsilon\mu\frac{d}{dt}\int \vec{S}\cdot dv$$

$\overleftrightarrow{T} \to$ "stress"

↳ força/área ⟶ pressão + cisalhamento

$$(\nabla\cdot\overleftrightarrow{T})_j = \epsilon\left[(\nabla\cdot\vec{E})\vec{E}_j + (\vec{E}\cdot\nabla)\vec{E}_j - \frac{1}{2}\nabla_j E^2\right]$$

$$+ \frac{1}{\mu}\left[(\nabla\cdot\vec{B})\vec{B}_j + (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{B}_j - \frac{1}{2}\nabla_j B^2\right]$$

Com isso: $\vec{F} = \int \vec{f}\cdot dv = \int (\nabla\cdot\overleftrightarrow{T})\,dv - \int \epsilon\mu \frac{\partial}{\partial t}\vec{S}\,dv$

$$\vec{F} = \oint \underbrace{\overleftrightarrow{T}}\cdot d\vec{a} - \epsilon\mu \frac{d}{dt}\int \vec{S}\cdot dv$$

$\overleftrightarrow{T} \rightarrow$ "stress"

↳ força/área → pressão → T_{xx}, T_{yy}, T_{zz}

\+ cisalhamento

T_{xy}, T_{yz}, T_{xz}

Como $\vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{p} = -\frac{d}{dt}\int_V \epsilon\mu \vec{S} \cdot dv + \oint_S \overleftrightarrow{T} \cdot d\vec{a}$

Lembrando do teorema de Poynting:

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_V U_{EM} \, dv - \oint_S \vec{S} \cdot d\vec{a}$$

Temos um termo associado ao momento do campo E.M.

$$\vec{p}_{EM} = \int_V \epsilon\mu \vec{S} \cdot dv \rightarrow \underbrace{\vec{p}_{EM} = \mu\epsilon\vec{S}}_{\text{densidade de momento}}$$

Por fim

$$\underbrace{\nabla(-\overleftrightarrow{T})}_{\text{densidade de fluxo de momento}} = -\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}}_{\text{densidade de momento do campo}} (\vec{p}_{EM} + \vec{p})$$

$\vec{p}$ ↳ densidade de momento mecânico

<u>Resultado:</u> No espaço temos energia do campo

$$u_{EM} = \frac{1}{2}\left(\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{B}\cdot\vec{H}\right)$$

Momento do campo: $\vec{p}_{EM} = \mu\epsilon\vec{S}$ $\quad \vec{S} = \vec{E}\times\vec{H}$

e momento angular: $\vec{L}_{EM} = \vec{r}\times\vec{p}_{EM}$

, mas isso é consequência de $\vec{p}_{EM}$

$\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$