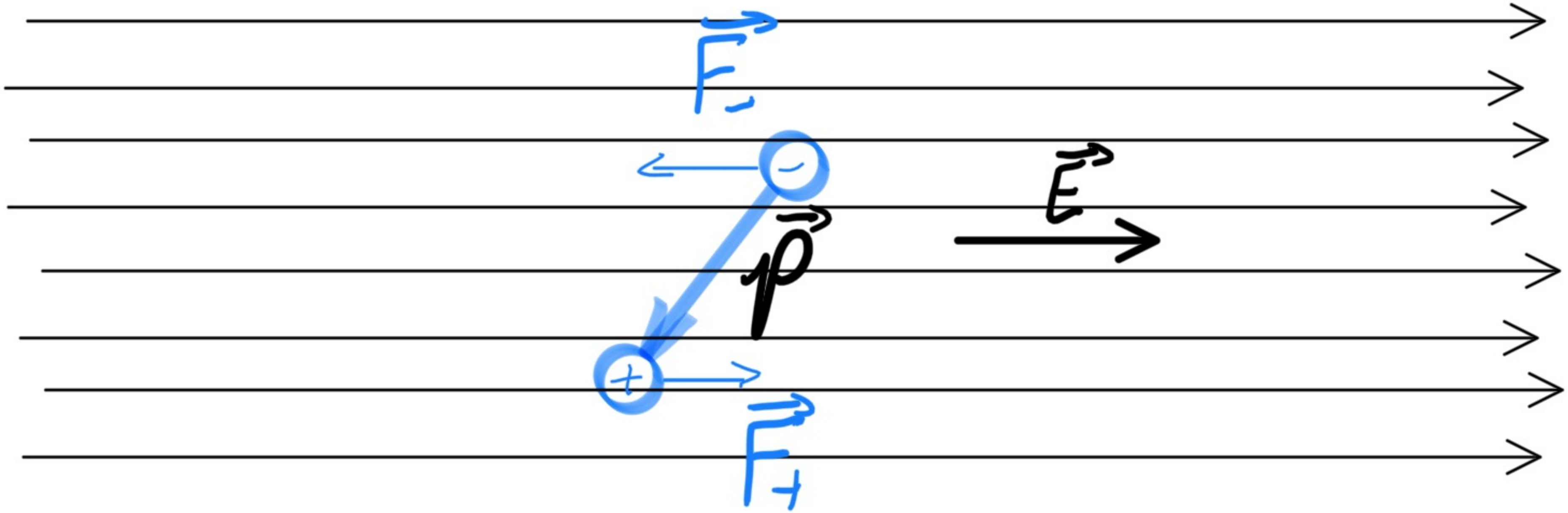
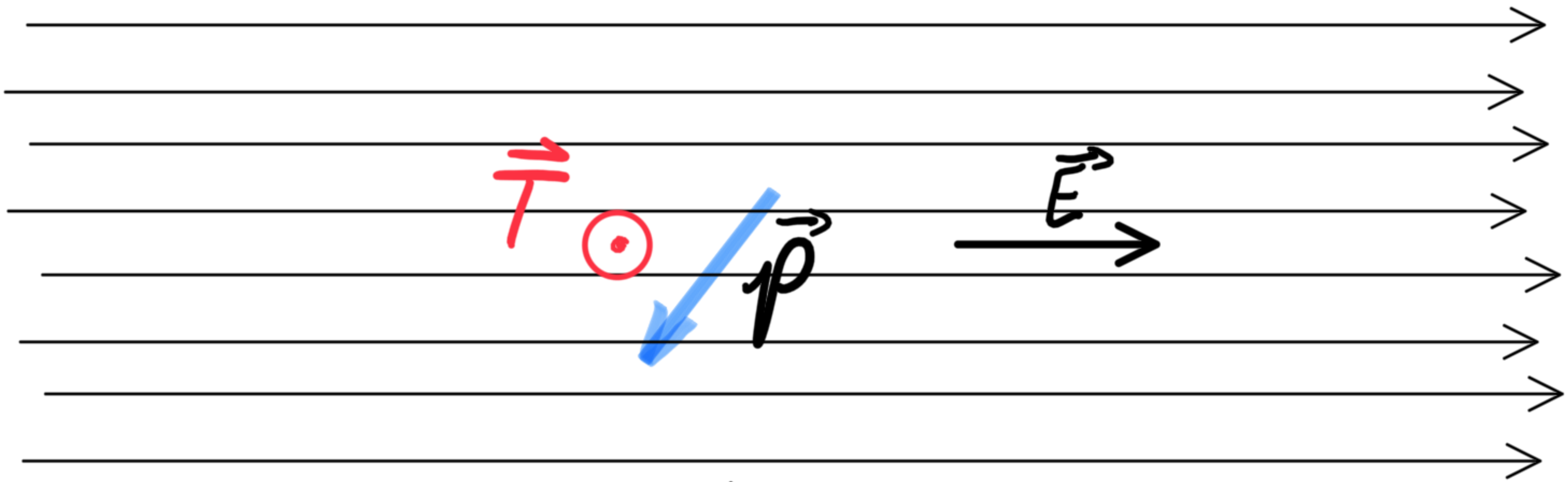
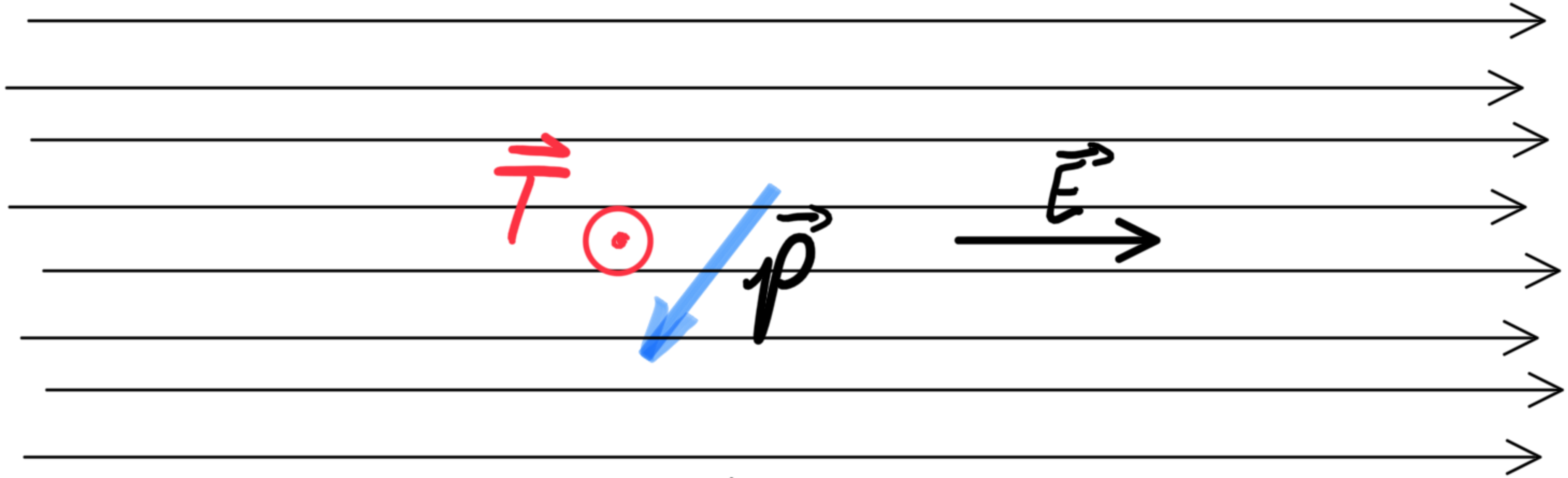
# Eletromagnetismo                Magnetismo

- Fenômenos paralelos aos da eletricidade.
- Observação de magnetismo natural: minério de ferro
- Aplicações práticas: alinhamento com a Terra, orientação norte-sul.
- Desenvolvimento da bússola – China, séc. XII.
- Como a eletricidade (*elektron*/âmbar), envolve uma força à distância
- Diferente da eletricidade, observada de forma geral, o magnetismo envolvia apenas alguns minérios que contém ferro, e objetos feitos com ferro ou ligas metálicas que contenham ferro.
- Qual a origem da orientação das agulhas de bússolas? Consolidação da ideia de magnetismo terrestre somente em 1600 (*terrella* de William Gilbert)

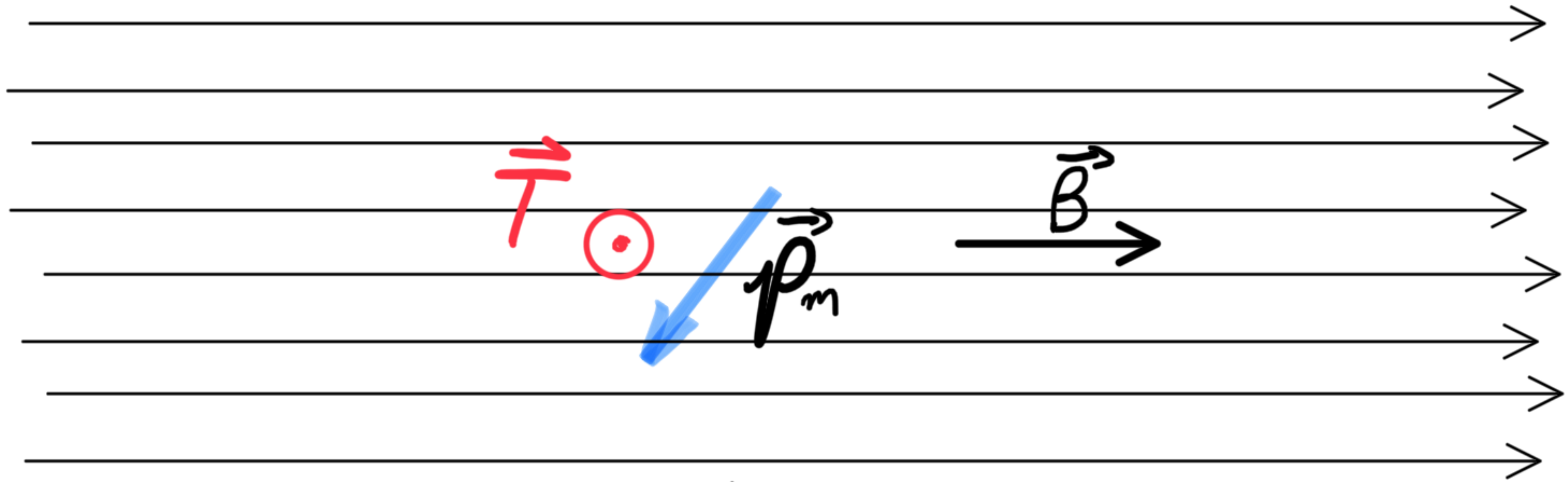


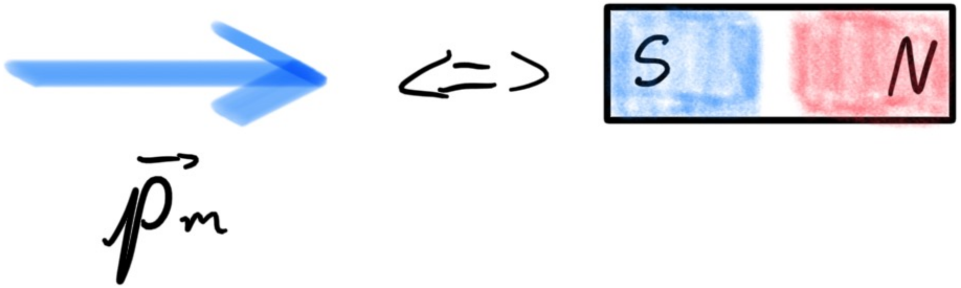

$$\vec{T} = \vec{p} \times \vec{E}$$




$$\vec{T} = \vec{p} \times \vec{E}$$




$$\vec{T} = \vec{p}_m \times \vec{B}$$




Referência norte e sul →

alinhamento com os polos terrestres

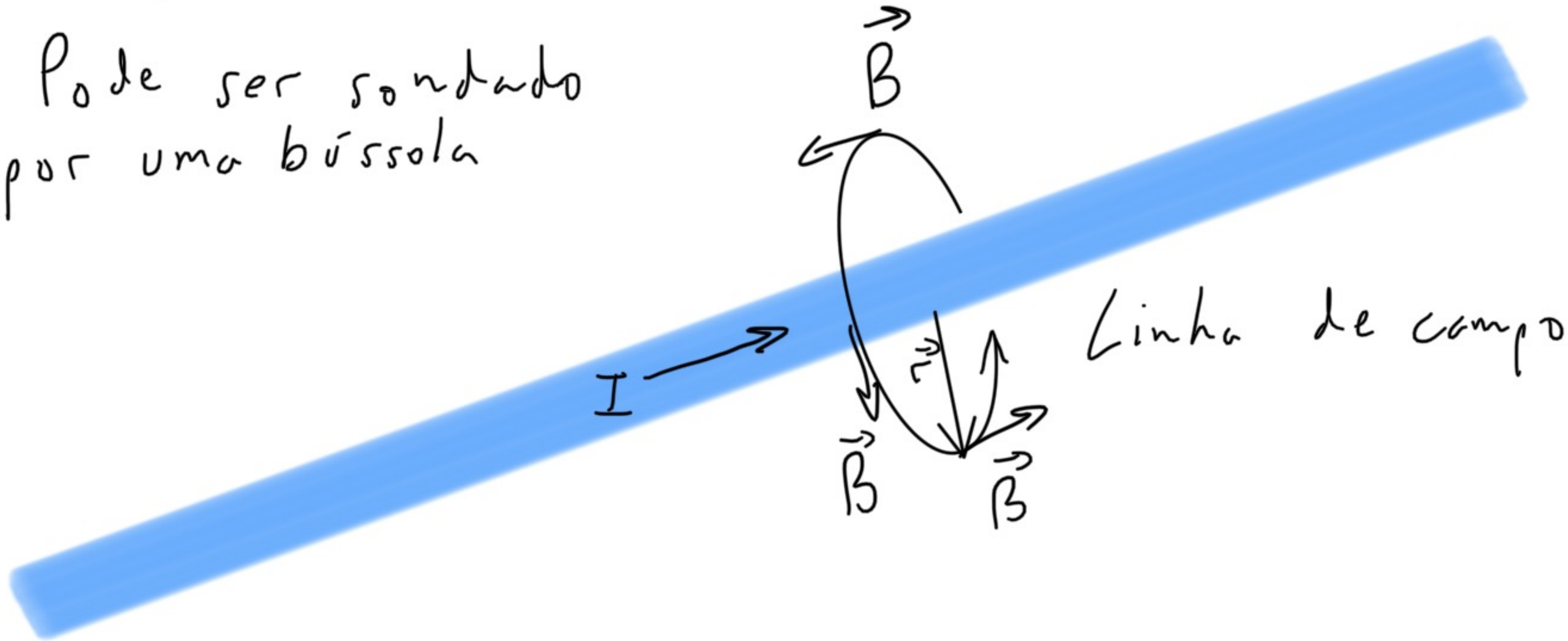
Linhas de campo de dipolo → equivalência

- Oested (1777-1851) – U. Copenhagen

  Corrente em um fio gerada por uma pilha voltaica - 1819.
- Acopla corrente elétrica com magnetismo.
- Curiosamente, o efeito não é radial!

## Campo de um fio

Pode ser sondado por uma bússola



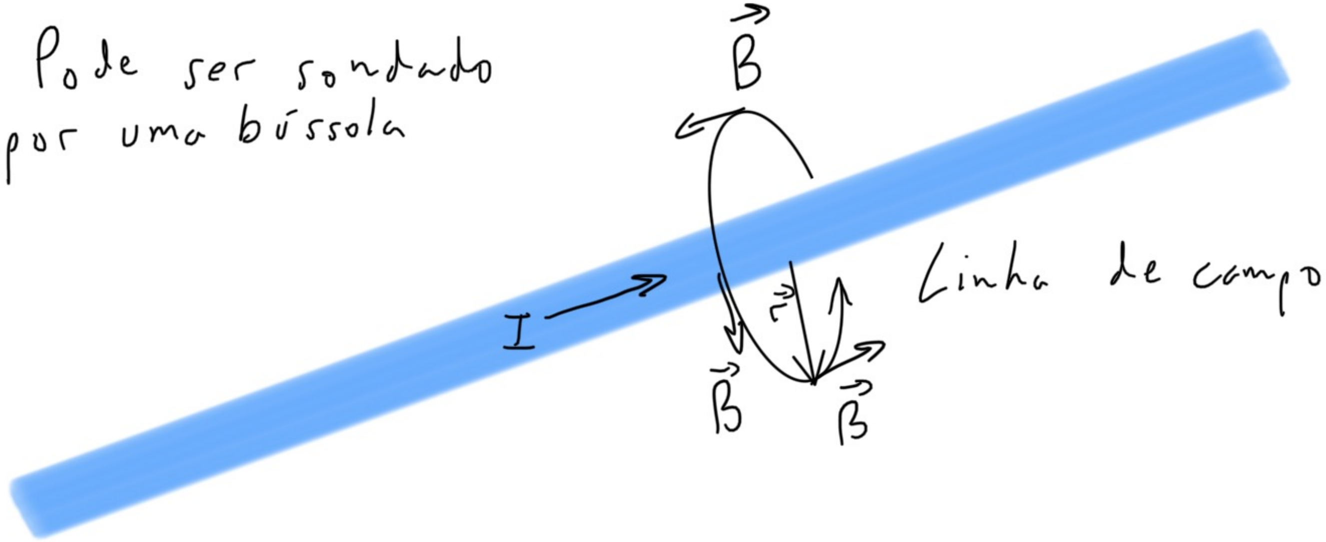
- Jean-Baptiste Biot (1774-1862) & Félix Savart (1791-1841) – École Polytechnique.
- Um modelo para o campo gerado no fio, inspirado na Lei de Coulomb (1785).

## Lei de Biot-Savart

Torque: $T_B \propto I \quad \longleftrightarrow \quad F_E \propto Q$

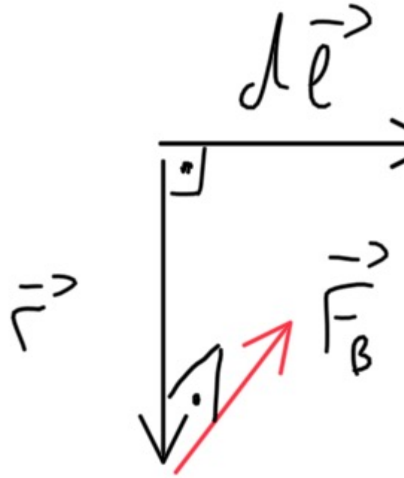
$$T_B \propto \frac{1}{r} \quad \longleftrightarrow \quad F_E = q \cdot \frac{Q}{2\pi \varepsilon_0 l r}$$

Pode ser sondado
por uma bússola



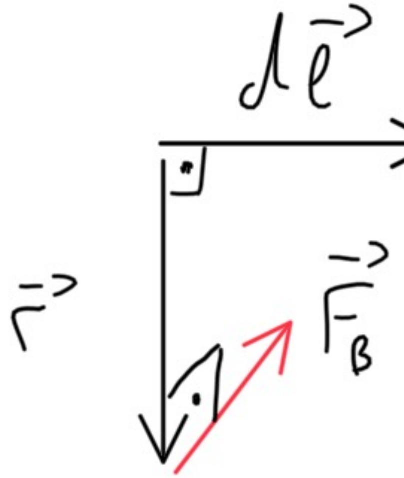

Direção: para um dipolo → $\vec{T} \perp \vec{F}$

Bússola: sonda a direção da força externa



Direção: para um dipolo $\rightarrow \vec{\tau} \perp \vec{F}$

Bússola: sonda a direção da força externa




Para simplificar, podemos usar aqui o conceito de campo magnético $\vec{B} \longleftrightarrow \vec{F}_B$

$|\vec{B}| \propto I$, $|\vec{B}| \propto 1/r^2$, $\vec{B} \propto d\vec{l} \times \vec{r}$

$$\Rightarrow \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{R^2} I d\vec{l} \times \hat{r}$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} N/A^2$$

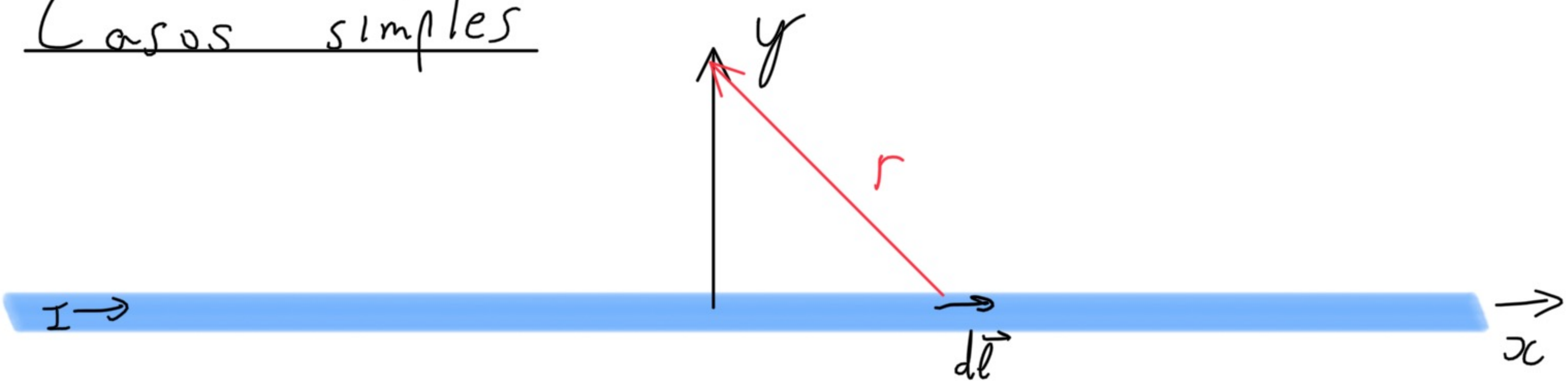
$$[B] = \frac{N}{A \cdot m} = \text{Tesla } (T)$$

Frequentemente usado: Gauss $\rightarrow$ $1G = 10^{-4} T$

<u>Correspondência com campo elétrico</u>

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} dQ \frac{\vec{r}}{r^3} \iff d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I d\vec{l} \times \frac{\vec{r}}{r^3}$$

## Casos simples

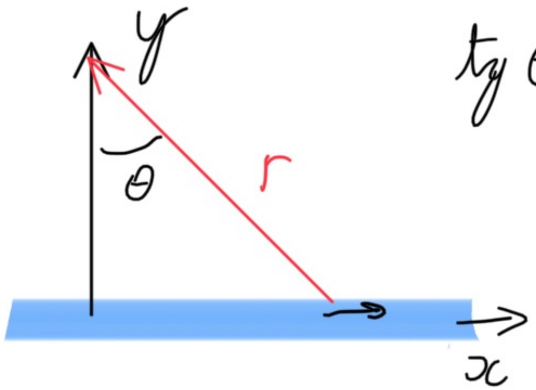



$$d\vec{l} = dx \cdot \hat{i} \qquad \vec{r} = -x\,\hat{i} + y\,\hat{j}$$

$$\vec{B} = \int d\vec{B} = \int_{-l/2}^{l/2} \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \frac{\hat{i} \times (-x\,\hat{i} + y\,\hat{j})}{[x^2+y^2]^{3/2}}\, dx$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{y \cdot \hat{k}}{[x^2+y^2]^{3/2}}\, dx$$

$$\int_{-l/2}^{l/2} \frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}\, dx = ?$$




$$tg\,\theta = x/y \Rightarrow x = y\, tg\,\theta$$

$$\frac{dx}{d\theta} = y \cdot \frac{d}{d\theta}\, tg\,\theta = y \cdot \frac{\cos^2\theta + sen^2\theta}{\cos^2\theta}$$

$$= y\, sec^2\theta$$

$$\Rightarrow \int_{-\theta_m}^{\theta_m} \frac{y}{(y^2 tg^2\theta + y^2)^{3/2}}\, y\, sec^2\theta\, d\theta = \frac{1}{y}\int_{-\theta_m}^{\theta_m} \frac{sec^2\theta}{(1+tg^2\theta)^{3/2}}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{y}\int_{-\theta_m}^{\theta_m} \frac{sec^2\theta}{sec^3\theta}\, d\theta = \frac{1}{y}\int_{-\theta_m}^{\theta_m} \cos\theta\, d\theta = \frac{sen\,\theta_m - sen(-\theta_m)}{y} = \frac{2\, sen\,\theta_m}{y}$$

(onde usamos $1 + tg^2\theta = 1 + \frac{sen^2\theta}{\cos^2\theta} = sec^2\theta$)

$$\therefore\ \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{2}{y}\, \text{sen}\,\theta_m \cdot \hat{k}$$

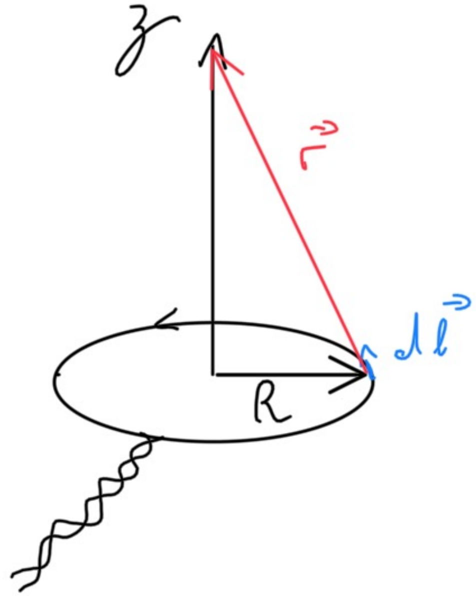
Como: $\text{sen}\,\theta_m = \dfrac{l/2}{\sqrt{y^2 + (l/2)^2}}$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\, \frac{1}{y} \cdot \frac{l}{\sqrt{l^2 + 4y^2}}\, \hat{k}$$

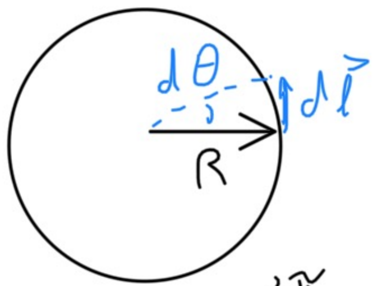
no limite $l >> y$ $\qquad \vec{B} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi y}\, \hat{k}$

Outro exemplo simples: Espira

$$\vec{B} = \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \cdot R \cdot d\theta \, \hat{\theta} \times (-R \cdot \hat{r} + z \hat{k})}{[R^2+z^2]^{3/2}}$$




com $\hat{r} \times \hat{\theta} = \hat{k}$




$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[ \int_0^{2\pi} \frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}} - (\hat{\theta} \times \hat{r}) \, d\theta + \int_0^{2\pi} \frac{Rz}{(R^2+z^2)^{3/2}} (\hat{\theta} \times \hat{k}) \, d\theta \right]$$

$$\hat{\theta} \times \hat{r} = -\hat{k} \qquad \hat{\theta} \times \hat{k} = \hat{r}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[ \frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}} \cdot \int_0^{2\pi} \hat{k} \cdot d\theta + \frac{Rz}{(R^2+z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \hat{r} \, d\theta \right]$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}} \cdot \int_0^{2\pi} \hat{k} \cdot d\theta + \frac{Rz}{(R^2+z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \hat{r}\, d\theta\right]$$

$$\int_0^{2\pi} \hat{k}\, d\theta = \hat{k}\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \hat{k}$$

$$\int_0^{2\pi} \hat{r}\, d\theta = \int_0^{2\pi} (\cos\theta\, \hat{i} + \operatorname{sen}\theta\, \hat{j})\, d\theta = \hat{i}\int_0^{2\pi} \cos\theta\, d\theta + \hat{j}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\theta\, d\theta$$

$$\int_0^{2\pi} \hat{r}\, d\theta = 0 \; !$$

$$\therefore \vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{2R}\left(\frac{1}{\sqrt{1+(z/R)^2}}\right)^3 \hat{k}$$

$$\therefore \vec{B}(z) \simeq \frac{\mu_0 I}{2R} \left( \frac{1}{\sqrt{1+(z/R)^2}} \right)^3 \hat{k}$$

Note: $\vec{B}(0) = \dfrac{\mu_0 I}{2R} \hat{z}$ ; $\lim\limits_{|z|>>R} \vec{B}(z) \simeq \dfrac{\mu_0 I}{2} \dfrac{R^2}{z^3} \hat{k}$

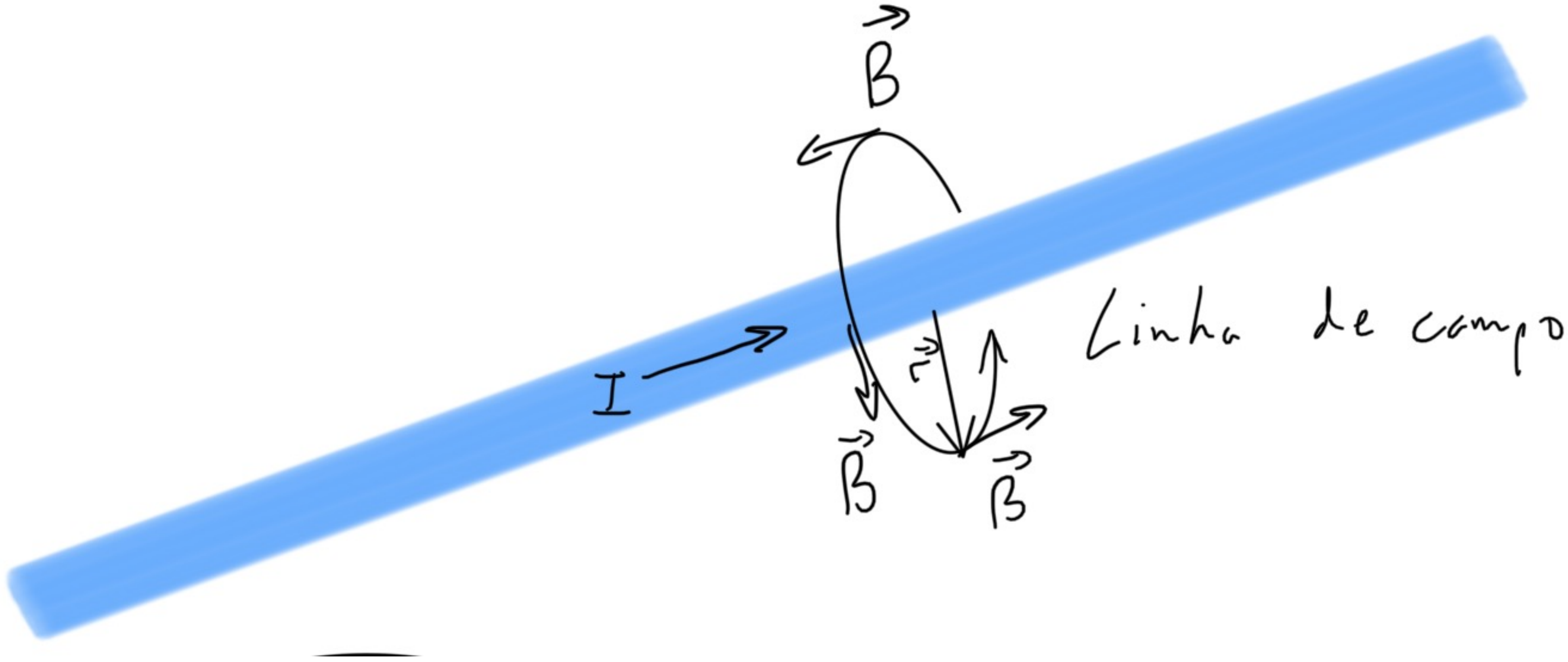
$\vec{B}(z) \propto \dfrac{1}{z^3} \hat{k} \rightarrow$ característica de dipolo!

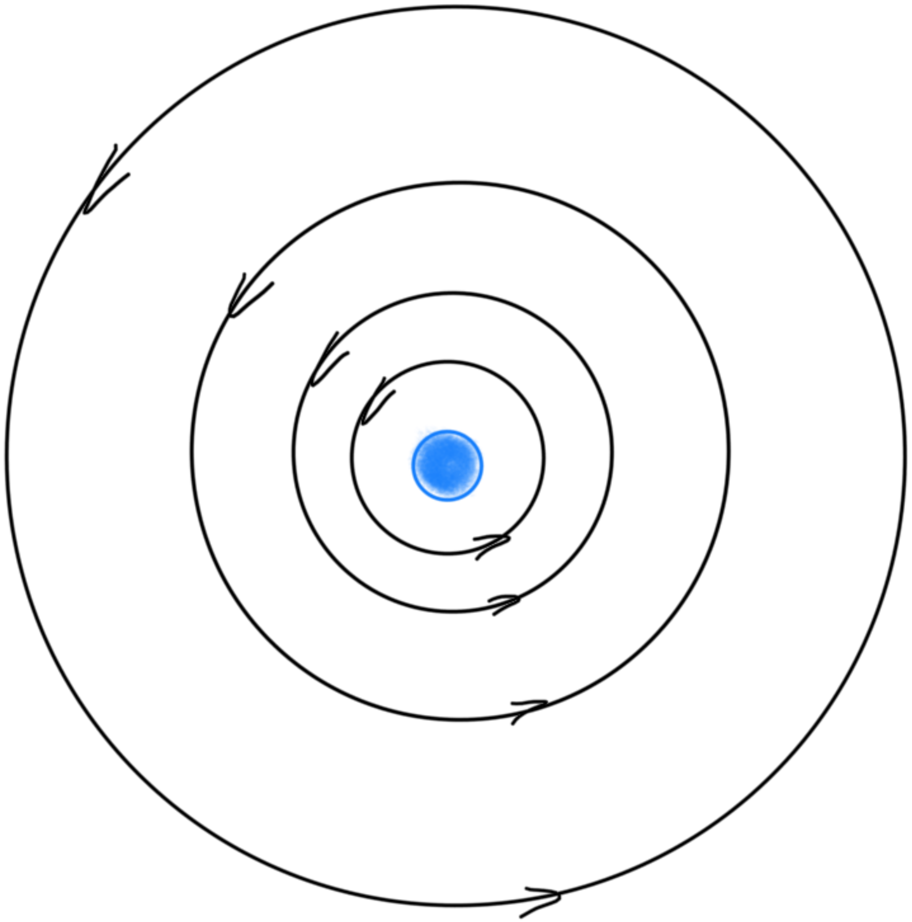
$$\vec{E} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} p \frac{1}{z^3} \hat{k} \iff \vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \underbrace{(I \cdot \pi R^2)}_{} \frac{1}{z^3} \hat{k}$$

momento de dipolo $\underline{m}$

# Aula 11: Lei de Gauss, Lei de Ampère

## Linhas de campo de uma corrente





Linhas contínuas de campo, sem sorvedouros ou fontes !

Campo elétrico: $\nabla\cdot\vec{D}=\rho$

$$\int_V \nabla\cdot\vec{D}\cdot dv = \oint_S \vec{D}\cdot d\vec{a} = Q$$

Se não há fontes: $Q=0$, $\rho=0$, $\nabla\cdot\vec{D}=0$

Sem fontes de linha de campo $\rightarrow$ $\nabla\cdot\vec{B}=0$

$$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{a}=0$$

Se não há fontes: $Q=0$, $\rho=0$, $\nabla\cdot\vec{D}=0$

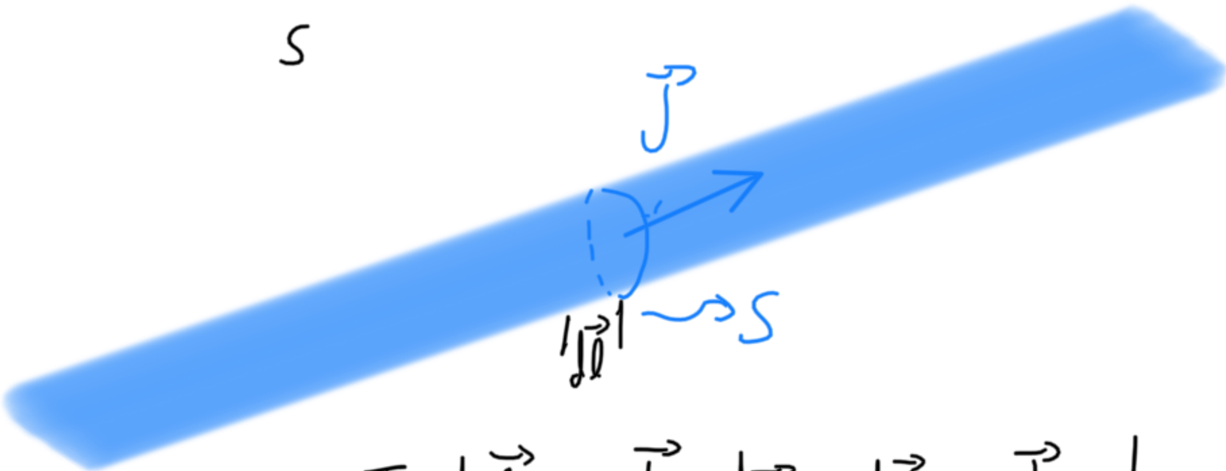
Sem fontes de linha de campo $\rightarrow$ $\nabla\cdot\vec{B}=0$

$$\int_S \vec{B}\cdot d\vec{a}=0$$

Mas existem correntes: geradores de campo

Vamos associar uma densidade de corrente $\vec{J}$

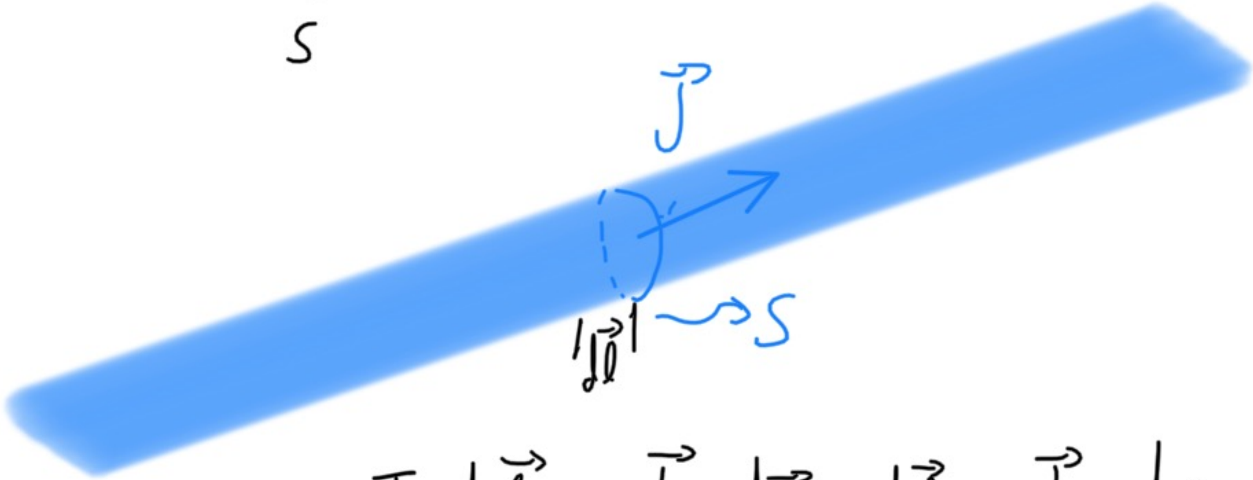
tal que $$\int_S \vec{J}\cdot d\vec{a} = I$$




$$I\cdot d\vec{l} = \vec{J}\cdot d\vec{a}\cdot d\vec{l} = \vec{J}\cdot dv$$

Vamos associar uma densidade de corrente $\vec{J}$

tal que $\displaystyle\int_S \vec{J} \cdot d\vec{a} = I$




$$I \cdot d\vec{l} = \vec{J} \cdot d\vec{a} \cdot d\vec{l} = \vec{J} \cdot dv$$

Lei de Biot-Savart: $\displaystyle\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}\,') \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} dv$

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \cdot \frac{\vec{J} \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} dv$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \cdot \frac{\vec{J} \times (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \, dv'$$

Como

$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{B} - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B})$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \left[ \vec{J} \times \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \right] = \left[ \nabla \times \vec{J}(\vec{r}') \right] \cdot \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} - \vec{J} \cdot \nabla \times \left[ \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \right]$$

$$\nabla = \left( \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \rightarrow \text{atua em } \vec{r}, \text{ não em } \vec{r}'$$

$$\Rightarrow \nabla \times \vec{J}(\vec{r}') = 0$$

e como $\nabla \dfrac{1}{|\vec{r}|} = -\dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$

pois: $\dfrac{\partial}{\partial x} \dfrac{1}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}} = -\dfrac{1}{2} \dfrac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \cdot 2x = -\dfrac{x}{|\vec{r}|^3}$

$\therefore \nabla \times \dfrac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = \nabla \times \nabla \dfrac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$

Mas vimos para o potencial: $\nabla \times (\nabla V) = 0$

$V$ pode ser qualquer função!

$\Rightarrow \nabla \times \dfrac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = 0$

$\Rightarrow \boxed{\nabla \cdot \vec{B} = 0}$

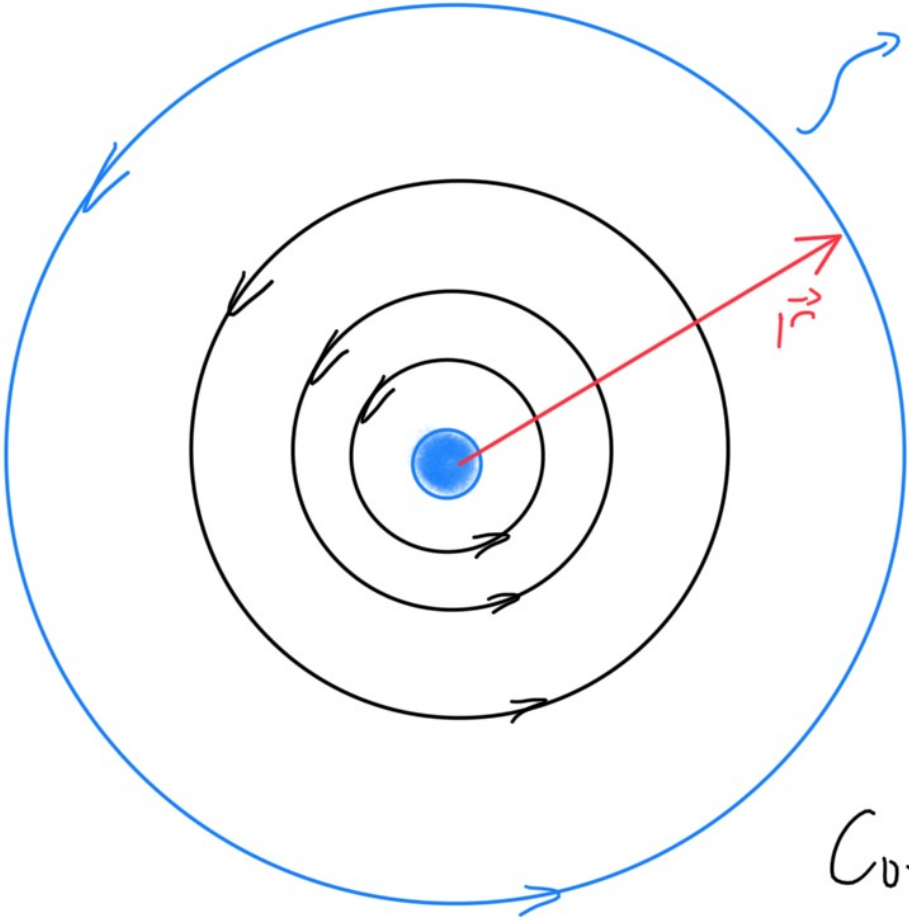
# Consolidando o eletromagnetismo (até aqui)

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \iff \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \times \vec{B} = ? \iff \nabla \times \vec{E} = 0 \iff \vec{E} = -\nabla V(r)$$

Vimos que $\oint_S \nabla \times \vec{E}\, d\vec{a} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}$ (teorema de Stokes - aula 3)

Para o fio:




$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot \hat{\theta}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot \hat{\theta} \cdot r\,d\theta \cdot \hat{\theta}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} I \cdot 2\pi = \mu_0 I$$

$$= \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{a}$$

Como $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{B})\, d\vec{a}$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

Mas isso é geral?

Sim! / $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{J} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \, dv$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \times \left[ \vec{J}(\vec{r}') \times \left( \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) \right] dv$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \times \left[ \vec{J}(\vec{r}') \times \nabla \frac{-1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] dv$$

O que é $\nabla \times (A \times B)$?

Conta é direta, porém extensa...

$$\nabla \times (A \times B) = (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} + (\nabla \cdot \vec{B})\vec{A} - (\nabla \cdot \vec{A})\vec{B}$$

$$\nabla \times (A \times B) = (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} + (\nabla \cdot \vec{B})\vec{A} - (\nabla \cdot \vec{A})\vec{B}$$

Como $\vec{J}'$ não depende de $\vec{r}$, suas derivadas se anulam

$$\Rightarrow \int \nabla \times \left[ \vec{J}(\vec{r}') \times \nabla \frac{-1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] dv =$$

$$= \int \left( \nabla \cdot \nabla \frac{-1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \cdot \vec{J} \, dv - \int (\vec{J} \cdot \nabla) \nabla \left( \frac{-1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dv$$

$$= \int \left(\nabla \cdot \nabla \frac{-1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) \cdot \vec{J}\, dv \;-\; \int (\vec{J} \cdot \nabla)\, \nabla\left(\frac{-1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) dv$$

$\downarrow$

Lembra o laplaciano do potencial de uma carga pontual, ou seja, extremamente concentrada? $V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$

$$\rightarrow \nabla^2 V(\vec{r}) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \rightarrow \rho = 0 \text{ em todo espaço}$$

exceto em $\vec{r} = \vec{r}'$, onde a densidade diverge

$\rightarrow$ Função delta ($\delta$) de Dirac: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1$

Propriedade: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \cdot f(x)\, dx = f(0)$

$$= \int \left(\nabla \cdot \nabla \frac{-1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) \cdot \vec{J} \, dv \;-\; \int (\vec{J} \cdot \nabla) \, \nabla\left(\frac{-1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) dv$$

$$\downarrow$$

Esta é mais trabalhosa... Mas podemos transformar a integração no volume para integração na superfície

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{C} + \vec{C} \cdot \nabla) \vec{B} \, dv = \oint_S \vec{B} \, (\vec{C} \cdot \hat{n}) \, da$$

Se $\nabla \cdot \vec{J} = 0$ (o que é verdade no caso <u>estacionário</u>)

$$\int (\vec{J} \cdot \nabla) \, \nabla\left(\frac{-1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) dv + \int (\nabla \cdot \vec{J}) \, \nabla\left(\frac{-1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) dv$$

$$= \oint \nabla\left(\frac{-1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) \cdot (\vec{J} \cdot \hat{n}) \, da$$

$$\int (\vec{J}\cdot\nabla)\,\nabla\left(\frac{-1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right) dv + \int (\nabla\cdot\vec{J})\,\nabla\left(\frac{-1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right) dv$$

$$= \oint \nabla\left(\frac{-1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right) \cdot (\vec{J}\cdot\hat{n})\, da$$

Estendendo a fronteira do nosso problema, no limite em que $\vec{J}=0$, este termo se anula

$$\int \nabla\times\left[\vec{J}(\vec{r}\,')\times\nabla\frac{-1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right] dv =$$

$$= \int \left(\nabla\cdot\nabla\frac{-1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)\cdot\vec{J}\, dv - \int (\vec{J}\cdot\nabla)\,\nabla\left(\frac{-1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right) dv$$

$$= 4\pi\int \delta(\vec{r})\,\vec{J}(\vec{r}\,')\, dv \qquad\qquad 0$$

## Conclusão: Lei de Ampère

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \times \left[ \vec{J}(\vec{r}\,') \times \left( \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \right) \right] dv$$

$$= \mu_0 \int \delta(\vec{r}\,') \, \vec{J}(\vec{r}\,') \, dv = \mu_0 \vec{J}(\vec{r})$$

# Consolidando o eletromagnetismo (até aqui)

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \iff \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \iff \nabla \times \vec{E} = 0 \iff \vec{E} = -\nabla V(r)$$

## Fontes:

Correntes estacionárias

$\downarrow$

$\vec{J}(\vec{r})$

$\uparrow$

Biot-Savart

Cargas estáticas

$\downarrow$

$\rho(\vec{r})$

$\uparrow$

Coulomb

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \iff \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \iff \nabla \times \vec{E} = 0 \iff \vec{E} = -\nabla V(r)$$

Fontes:

Correntes estacionárias $\downarrow$ $\vec{J}(\vec{r})$ $\uparrow$ Biot-Savart

Cargas estáticas $\downarrow$ $\rho(\vec{r})$ $\uparrow$ Coulomb

---

Força elétrica $\rightarrow$ Campo elétrico

Torque magnético $\rightarrow$ Campo magnético

Força magnética $\rightarrow$ ?