SEL 0449 - Processamento Digital de Imagens Médicas

SEL 5895 – Introdução ao Processamento Digital de Imagens

Aula 5 – Transformada de Fourier

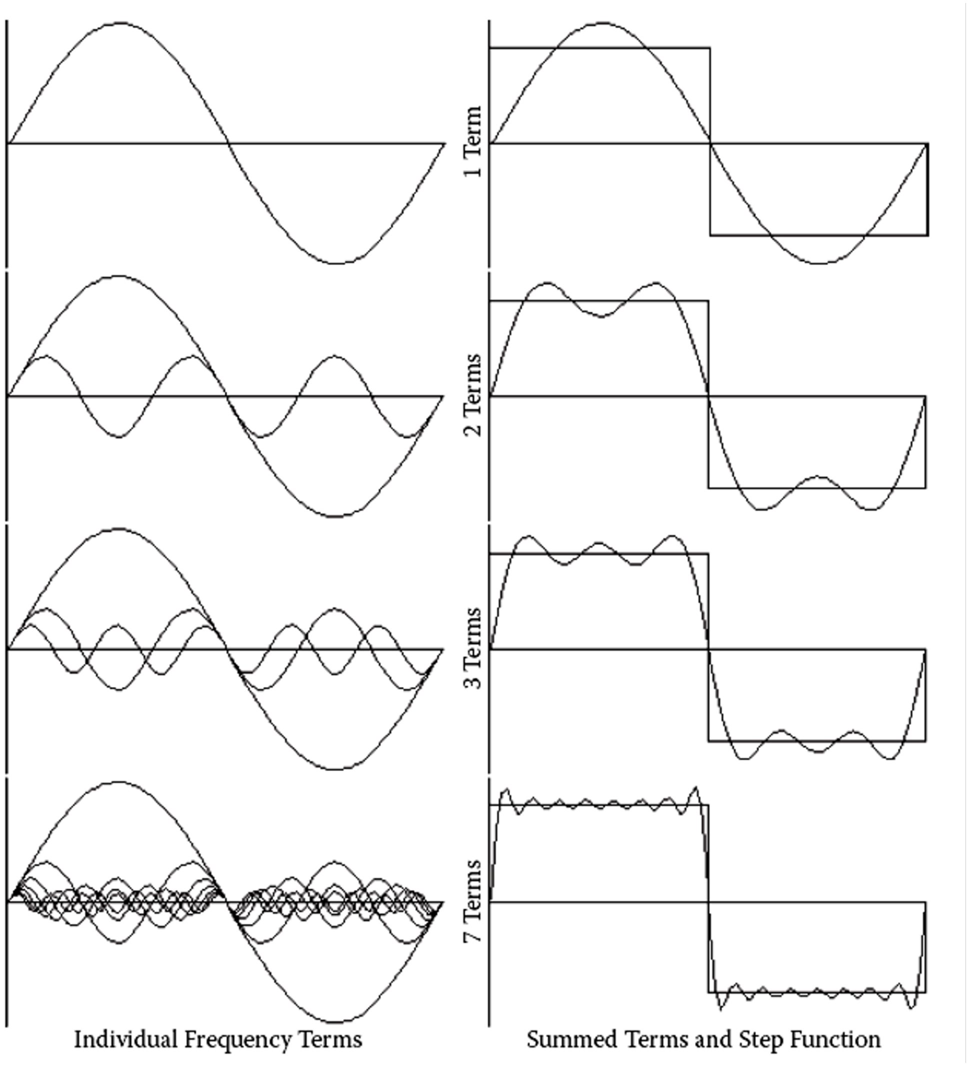
Prof. Dr. Marcelo Andrade da Costa Vieira

mvieira@sc.usp.br

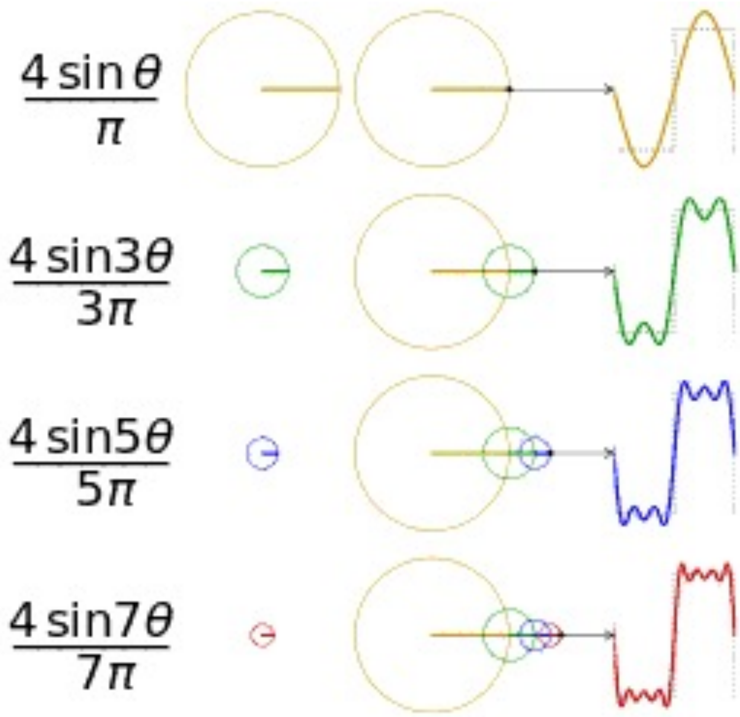
Jean Baptiste Joseph Fourier

Nascimento: 21 de março de 1768 em Auxerre, França.
Morte: 16 de maio de 1830 em Paris, França.

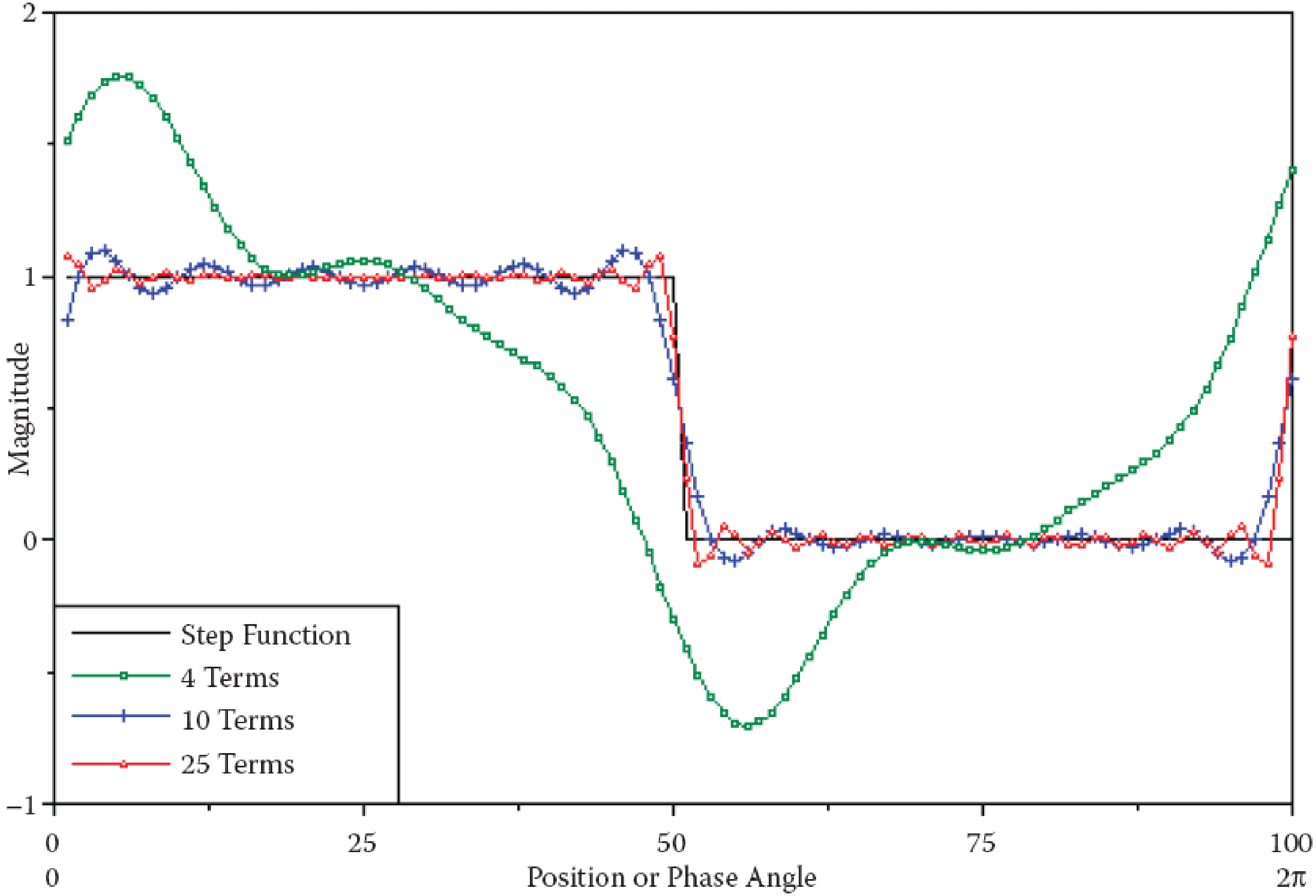
Exemplo: Função Degrau



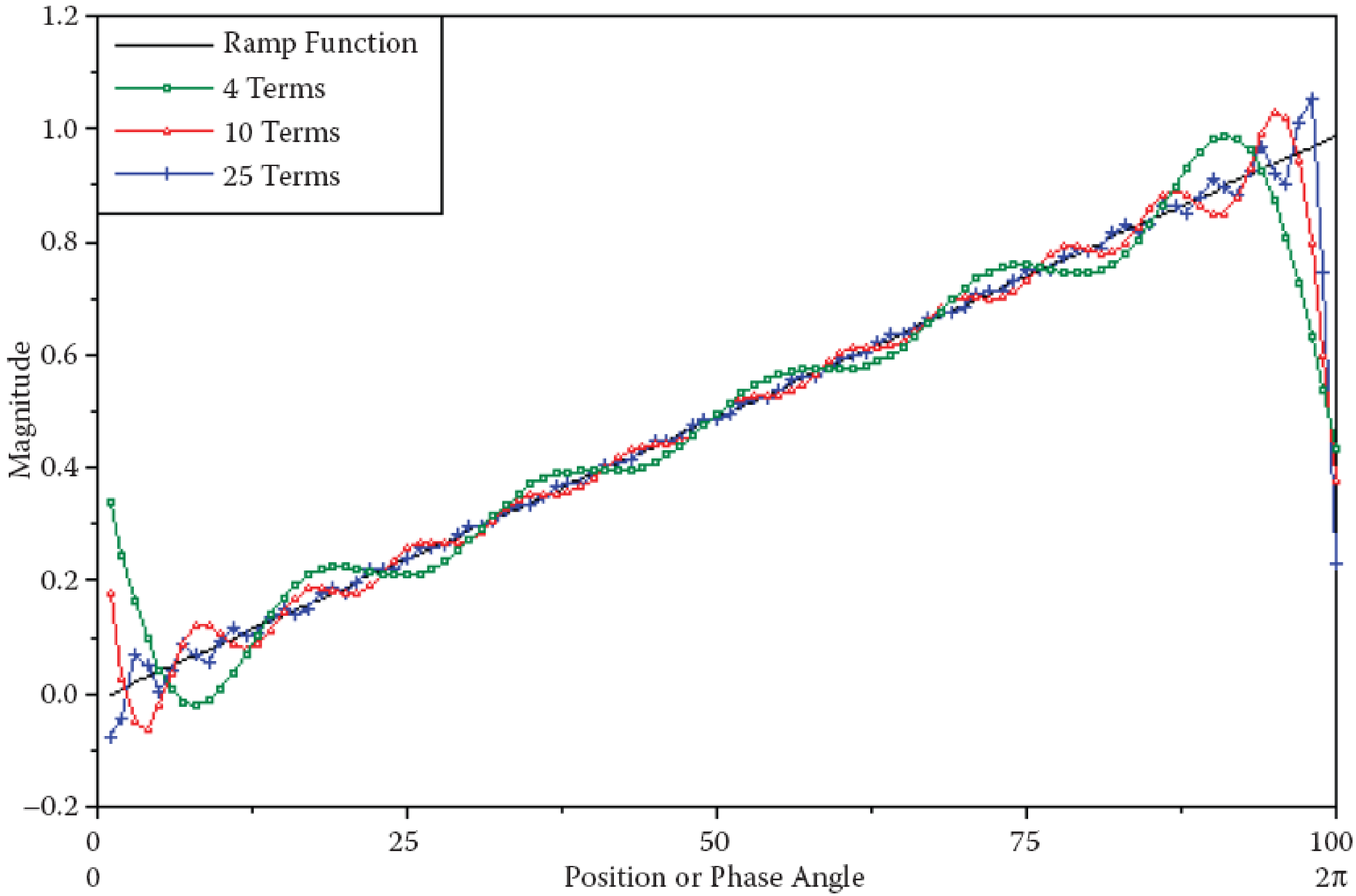
Exemplo: Função Degrau



Exemplo: Função Degrau



Exemplo: Função Rampa



Série de Fourier

Apenas para funções periódicas de frequência fundamental f_0

1.3.2. Série de Fourier na forma trigonométrica

Uma função x(t) periódica com período T pode ser expressa pela série trigonométrica de Fourier abaixo:

frequência fundamental

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(2\pi f_0 t) + a_2 \cos(2\pi 2 f_0 t) + a_3 \cos(2\pi 3 f_0 t) + \cdots + b_1 sen(2\pi f_0 t) + b_2 sen(2\pi 2 f_0 t) + \cdots \quad (1.1)$$

Valor Médio (DC) **1º harmônico** **1º harmônico**

ou, de outra forma:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(2\pi n f_0 t) + b_n sen(2\pi n f_0 t) \right] \quad (1.2)$$

em que $f_0 = 1/T$ é chamada de freqüência fundamental do sinal

Série de Fourier

Apenas para funções <u>periódicas</u> de frequência fundamental f_0

A série anterior pode também ser expressa, na forma compacta, por:

$$x(t) = E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} E_n \cos(2\pi n f_0 t + \theta_n) \qquad (1.3)$$

em que: $E_0 = \frac{a_0}{2}$ representa o valor médio da função.

$$E_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \text{e} \quad \theta_n = arctg\left(-\frac{b_n}{a_n}\right)$$

Forma Exponencial

Usando-se a fórmula de Euler:

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + jsen(\theta)$$

A série de Fourier pode ser escrita na forma:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{j2\pi n f_0 t}$$

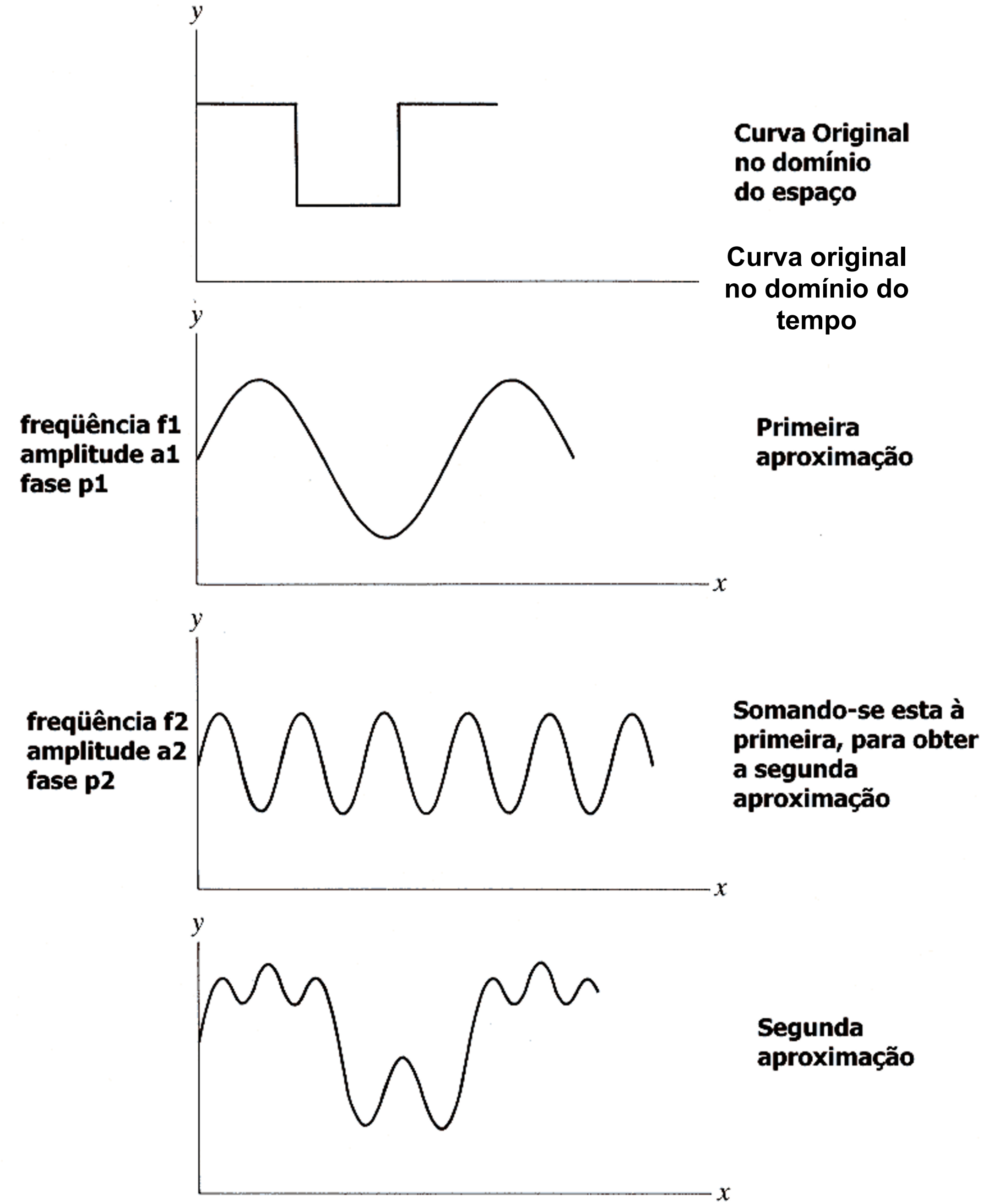
Forma Exponencial

Como os coeficientes A_n são números complexos, eles podem ser caracterizados por um módulo e uma fase.

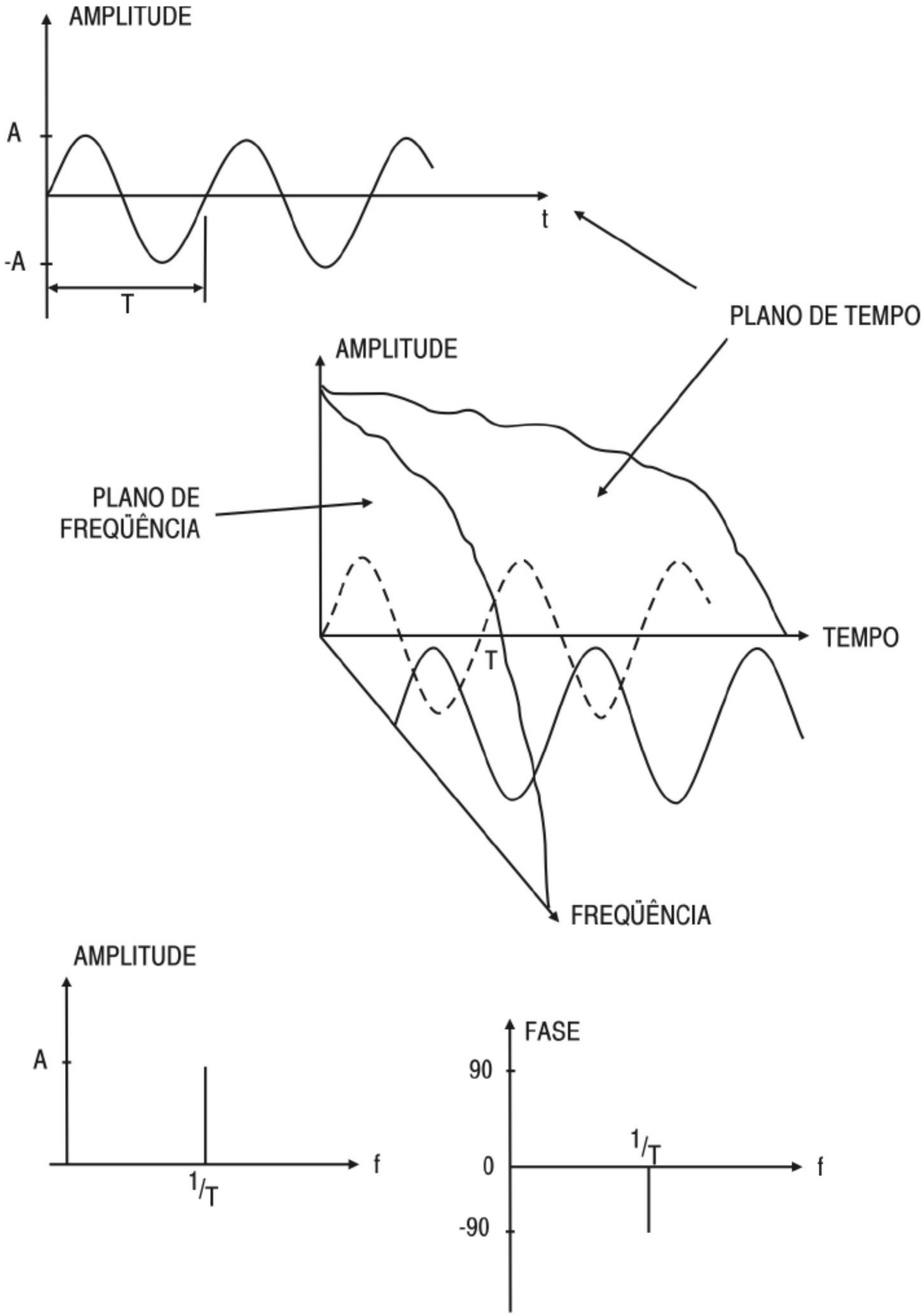
$$A_n = |A_n| e^{j\theta_n} \tag{1.25}$$

em que:

$$|A_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \qquad \theta_n = \arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$



Um sinal no **domínio do tempo (t)** pode ser aproximado através de uma **soma de senos e cossenos** com frequências (f_1, f_2, f_3, ...f_n) de amplitudes (a_1, a_2, ... a_n) e fases (p_1, p_2, ...p_n)



$$y = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$\omega = 2\pi/T$$

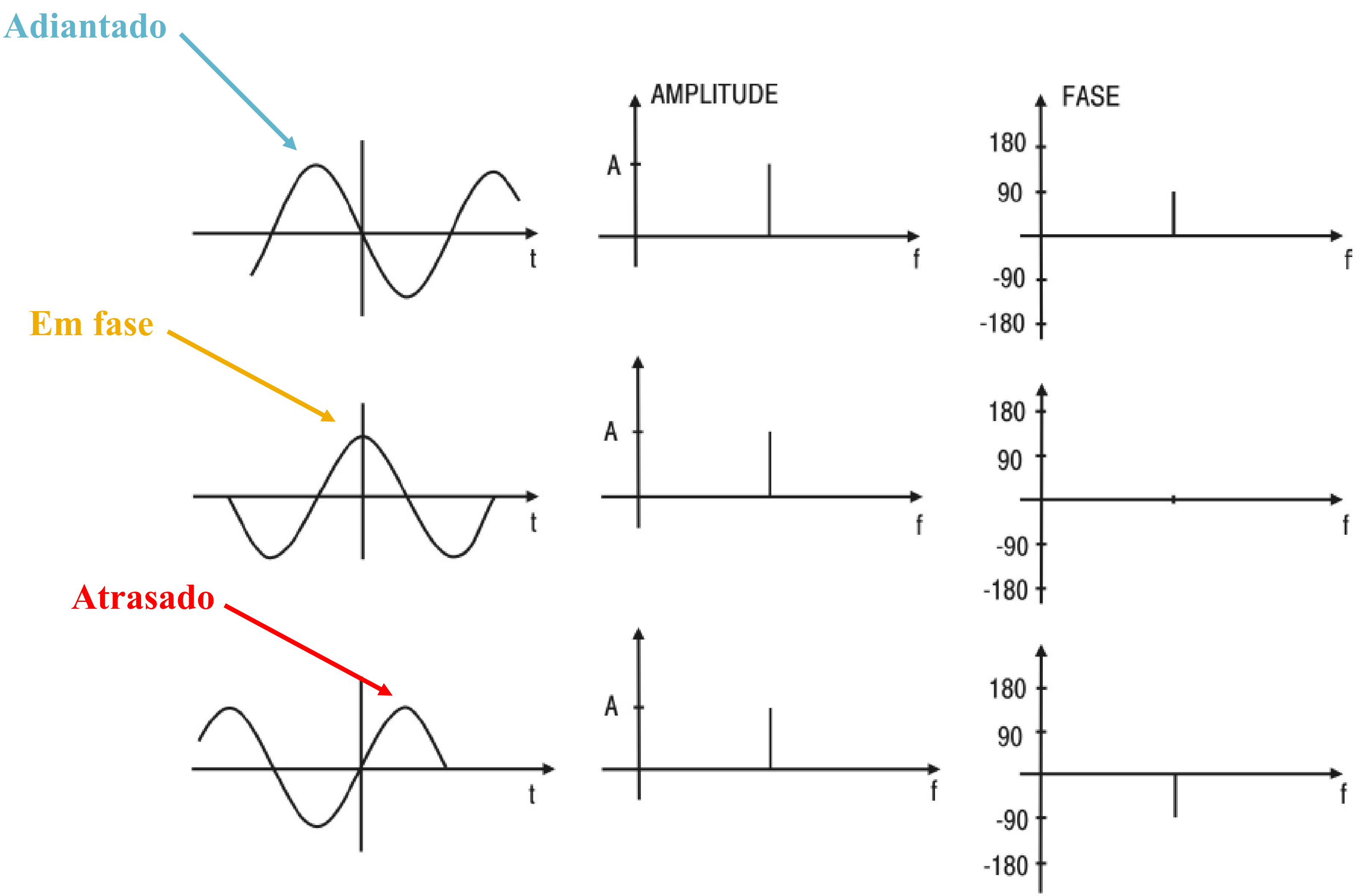
$$T = 1/f$$

$$\omega = 2\pi f$$

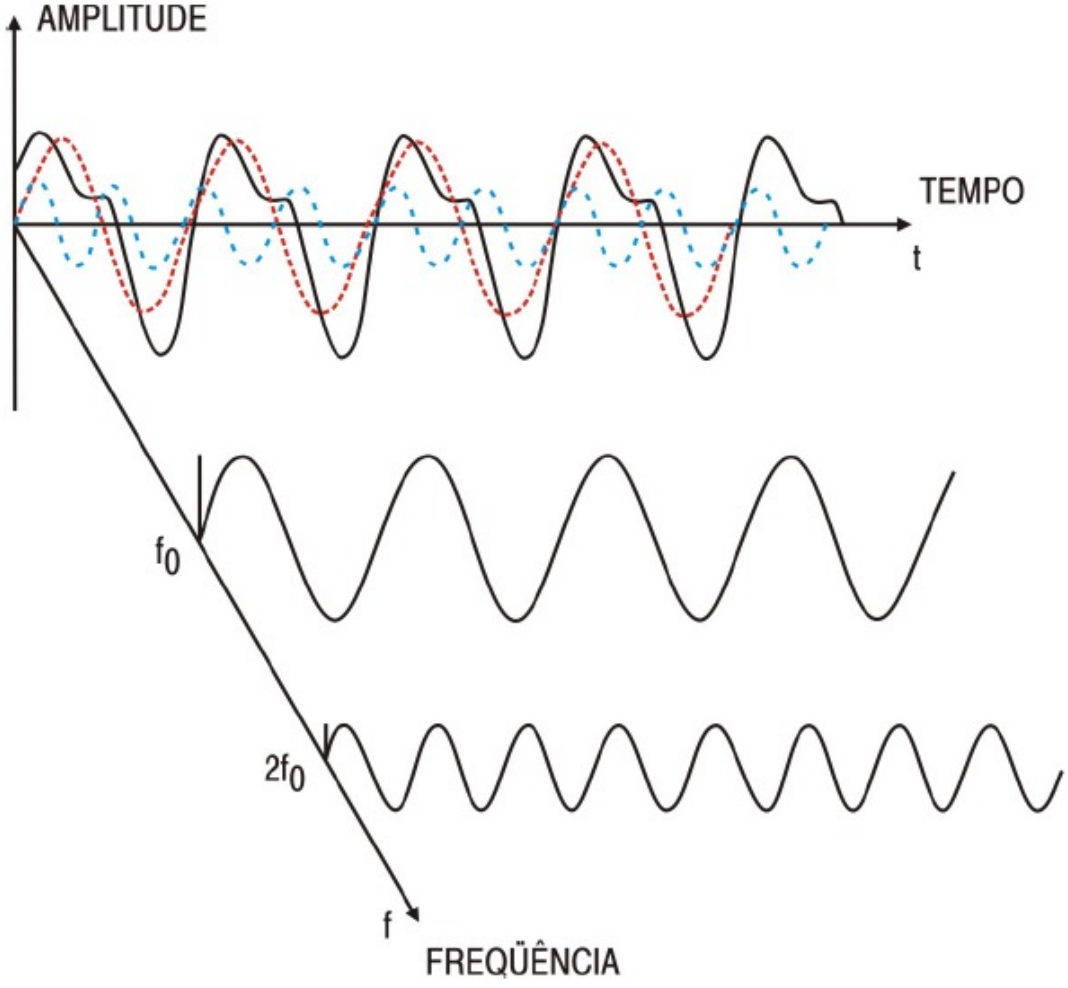
$$y = A \cos(2\pi f t + \varphi_0)$$

Espectro (Plano das Frequências)

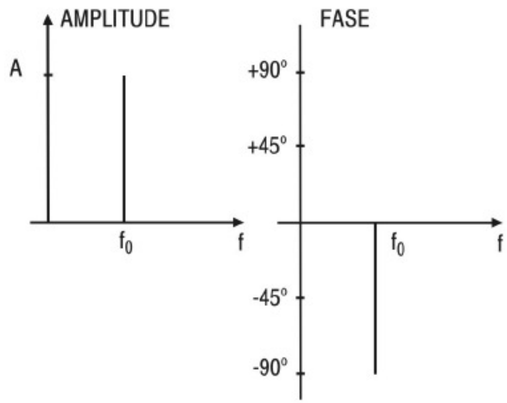
Fase



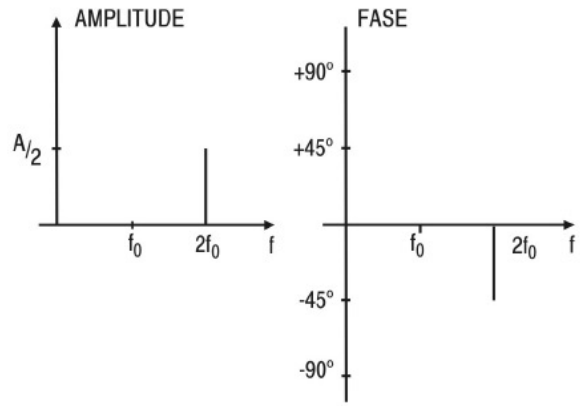
Espectro



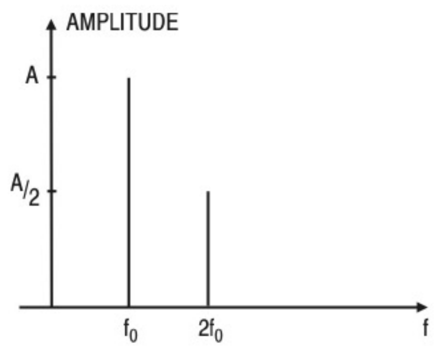
Amplitude e Fase

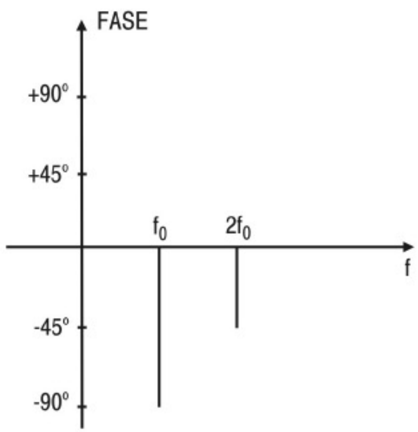


a) Senóide com freqüência f_0, amplitude A e fase -90º.



b) Senóide com freqüência $2f_0$, amplitude A/2 e fase -45º.





Amplitude e Fase

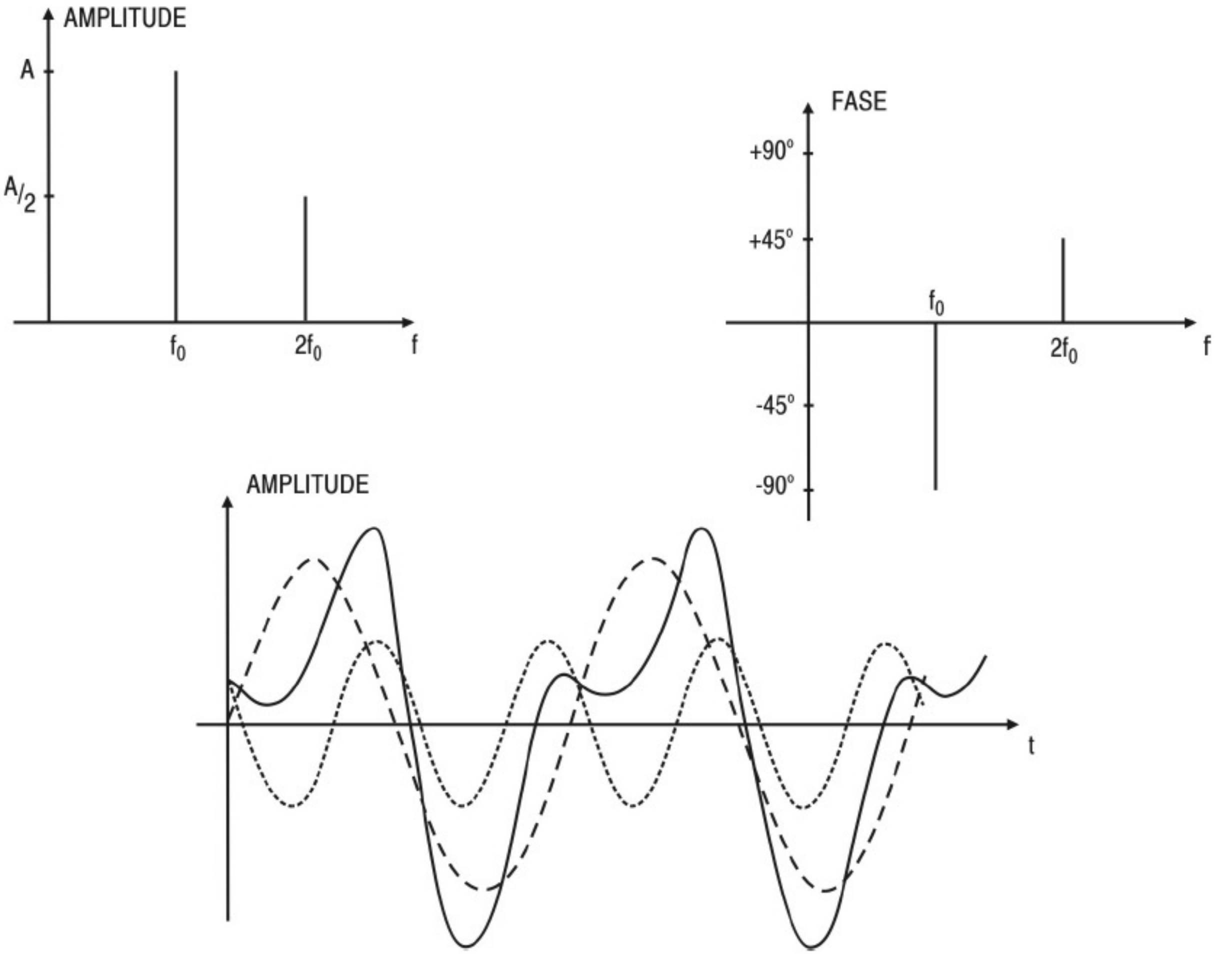


Figura 1.5: Soma de dois sinais senoidais com variação na fase de uma das componentes.

Transformada de Fourier

Para funções não-periódicas

Considera-se a frequência fundamental f_0 com lim → 0

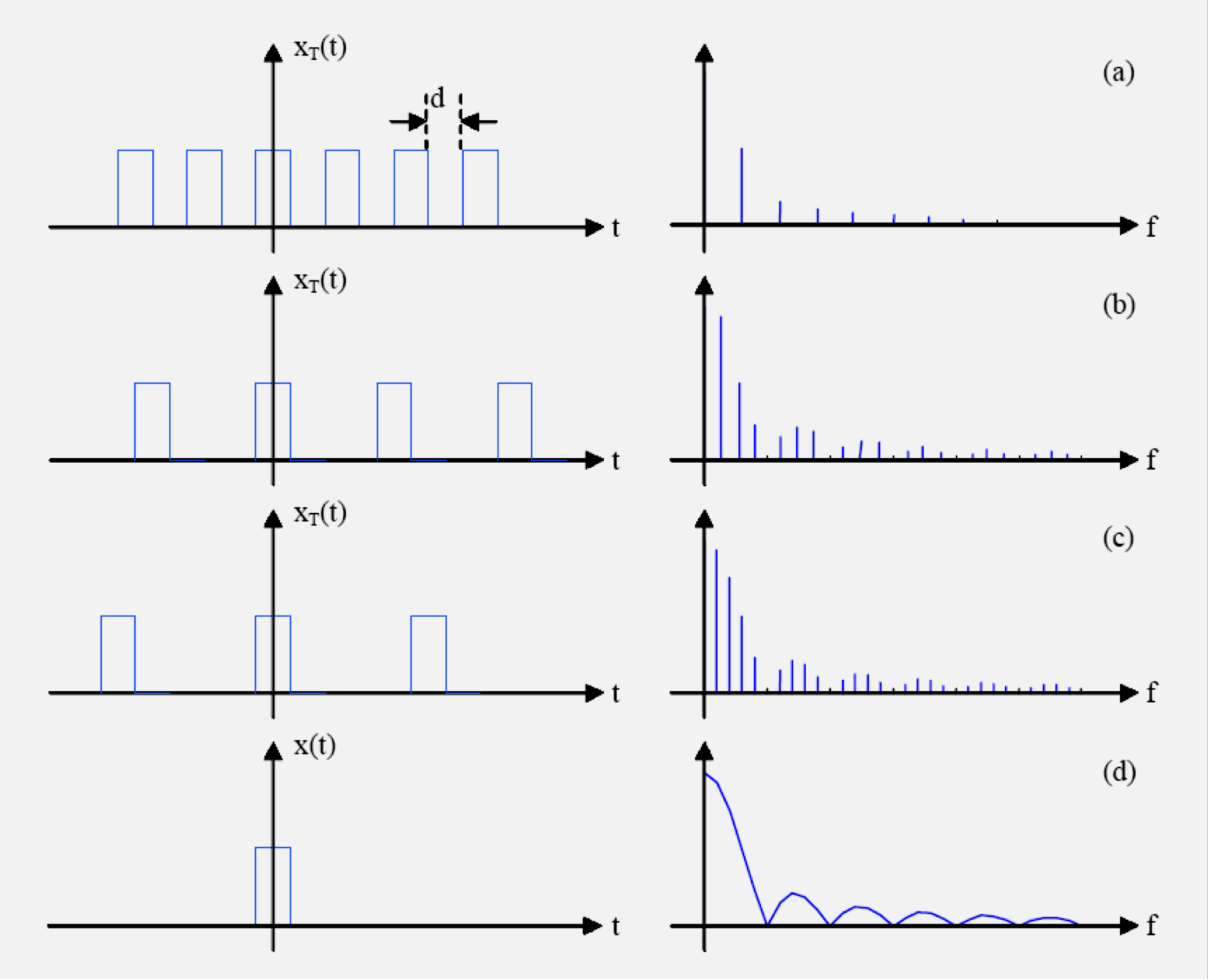
- A medida que f_0 diminui, o espaçamento entre os períodos da função no domínio do tempo aumentam.

- Conseqüentemente, o espaçamento entre os harmônicos da série de Fourier diminui, tendendo à zero (Função contínua no domínio da freqüência).

- A Transformada de Fourier nada mais é do que a Série de Fourier com f_0 de limite → 0, que converge para uma integral.

$$x(t) = \lim_{T\to\infty} x_T(t) \longrightarrow x(t) = \lim_{T\to\infty}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} X(nf_0) e^{j2\pi f_0 t}\right\} \longrightarrow x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft}\, df$$

Transformada de Fourier



Transformada de Fourier

Seja f(x) uma função contínua de uma variável real x.

A **Transformada de Fourier** de f(x) é definida por:

$$\Im\{f(x)\} = F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-j2\pi ux} dx$$

E a **Transformada Inversa de Fourier** é dada por:

$$\Im^{-1}\{F(u)\} = f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) \cdot e^{j2\pi ux} du$$

Transformada de Fourier

Usando-se a fórmula de Euler, o termo exponencial dentro da integral, pode ser colocado na forma:

$$e^{-j2\pi ux} = \cos(2\pi ux) - j\,sen(2\pi ux)$$

O que mostra que F(u) é uma soma infinita de senos e cossenos e que cada valor de (u) determina a freqüência de seu correspondente par (seno-cosseno).

A variável (u) é denominada de Variável de Frequência.

Transformada de Fourier.

$$\boxed{F(u) = R(u) + jI(u)}$$

A Magnitude de F(u) é chamada de **Espectro de Fourier** de f(x):

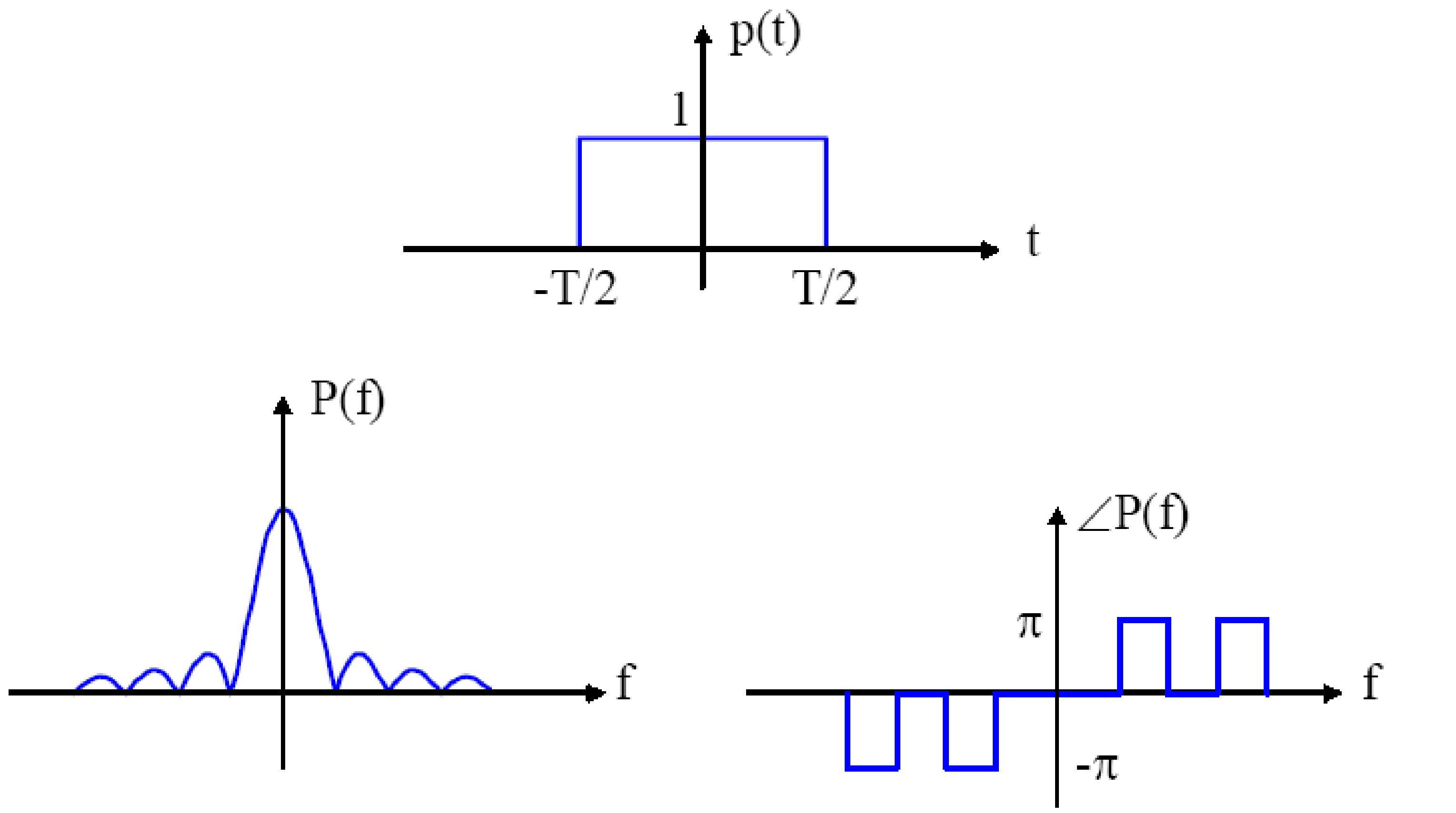
$$|F(u)| = \left[R^2(u) + I^2(u)\right]^{1/2}$$

E o ângulo de fase é dado por: $\phi(u) = \tan^{-1}[\frac{I(u)}{R(u)}]$

O quadrado do Espectro é chamado de Espectro de Potência de f(x) ou de Densidade Espectral:

$$P(u) = |F(u)|^2 = R^2(u) + I^2(u)$$

Espectro de Fourier



Fase

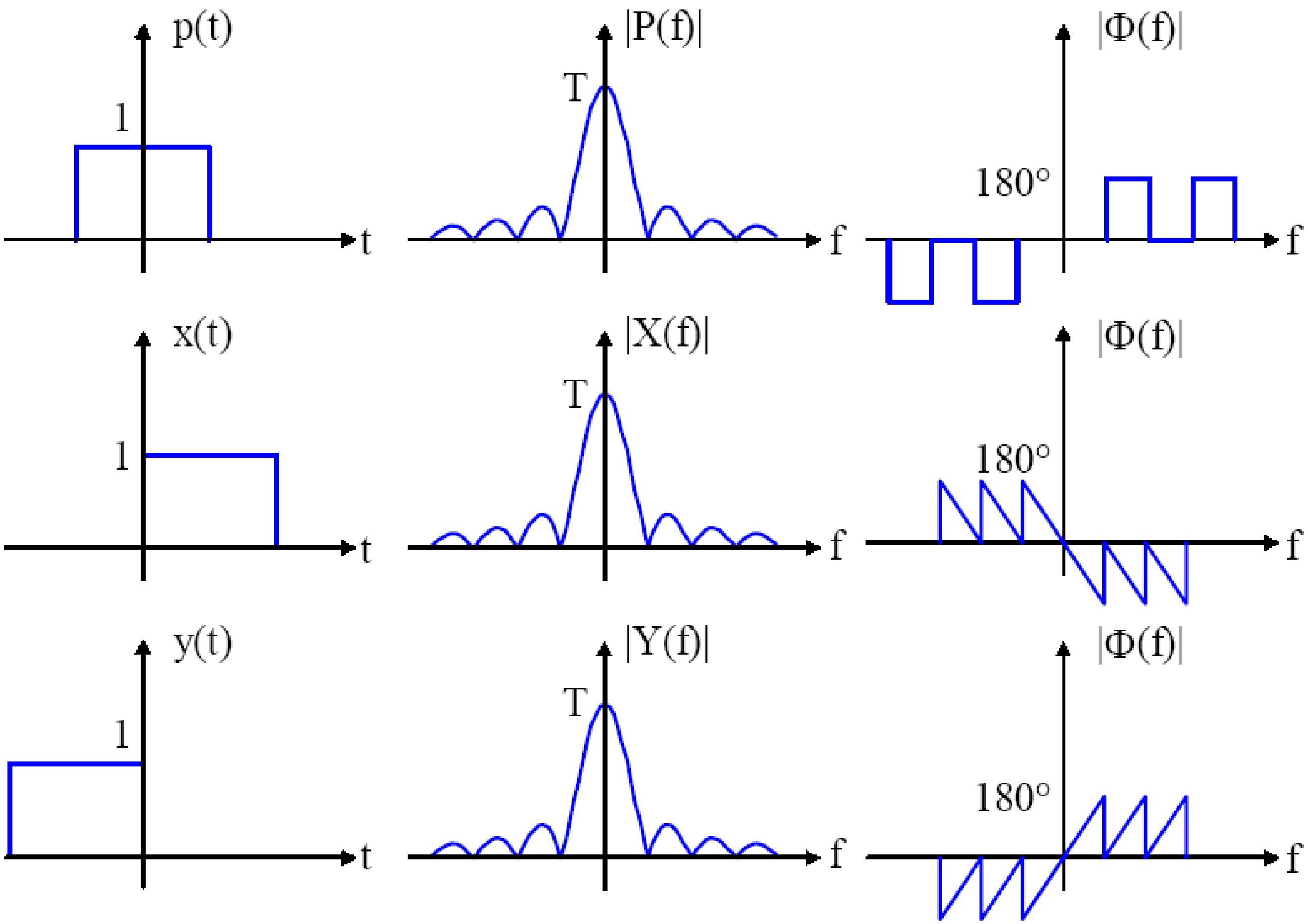
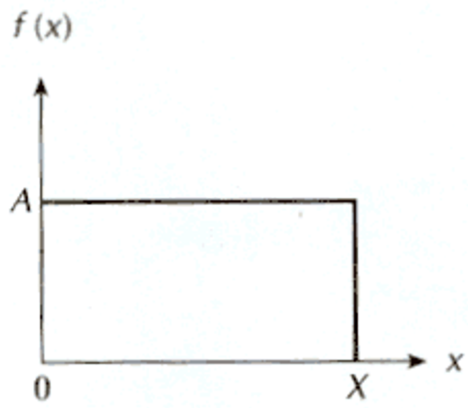


Figura 6: Ilustração da propriedade do deslocamento no domínio do tempo.

Exemplo

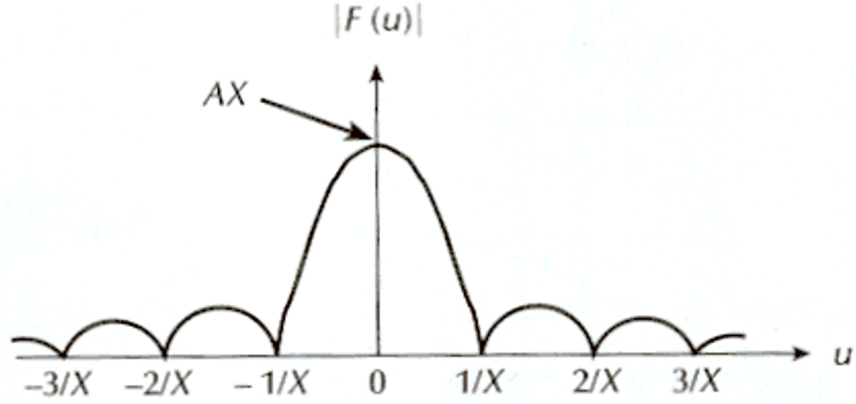


Sua Transformada de Fourier é obtida através da equação:

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp[-j2\pi ux]dx = \int_{0}^{X} A\exp[-j2\pi ux]dx =$$

$$F(u) = AX\frac{sen(\pi uX)}{(\pi uX)}$$

Exemplo



$$|F(u)| = AX\left|\frac{\text{sen}(\pi uX)}{(\pi uX)}\right|$$

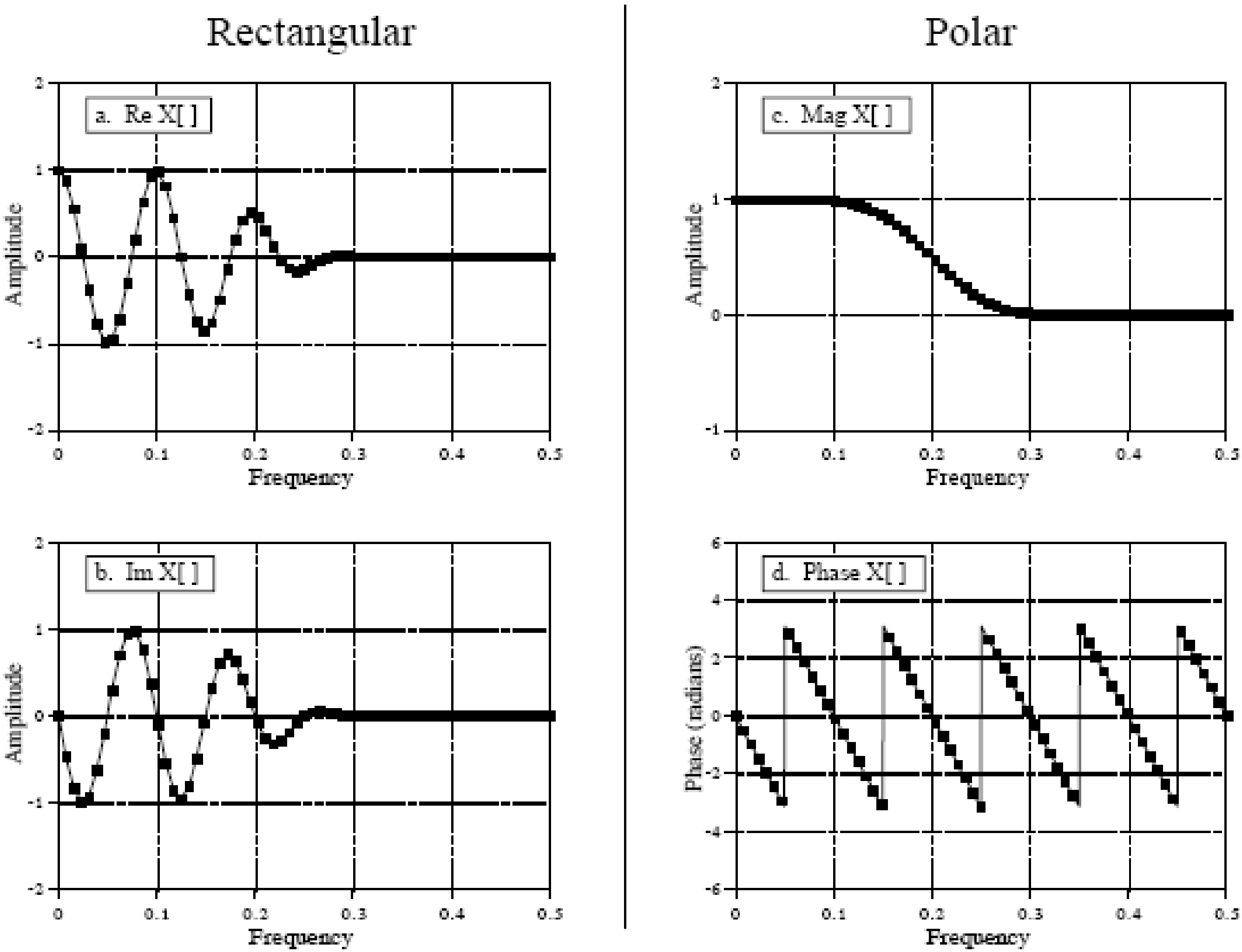
Função Sinc

Variando-se o valor de (u) na equação, obtém-se as infinitas amplitudes das freqüências que constituem a função f(x).

Forma Retangular x Forma Polar

$a_1, a_2, a_3 \ldots$
Amplitudes dos Cossenos

$b_1, b_2, b_3 \ldots$
Amplitudes dos Senos

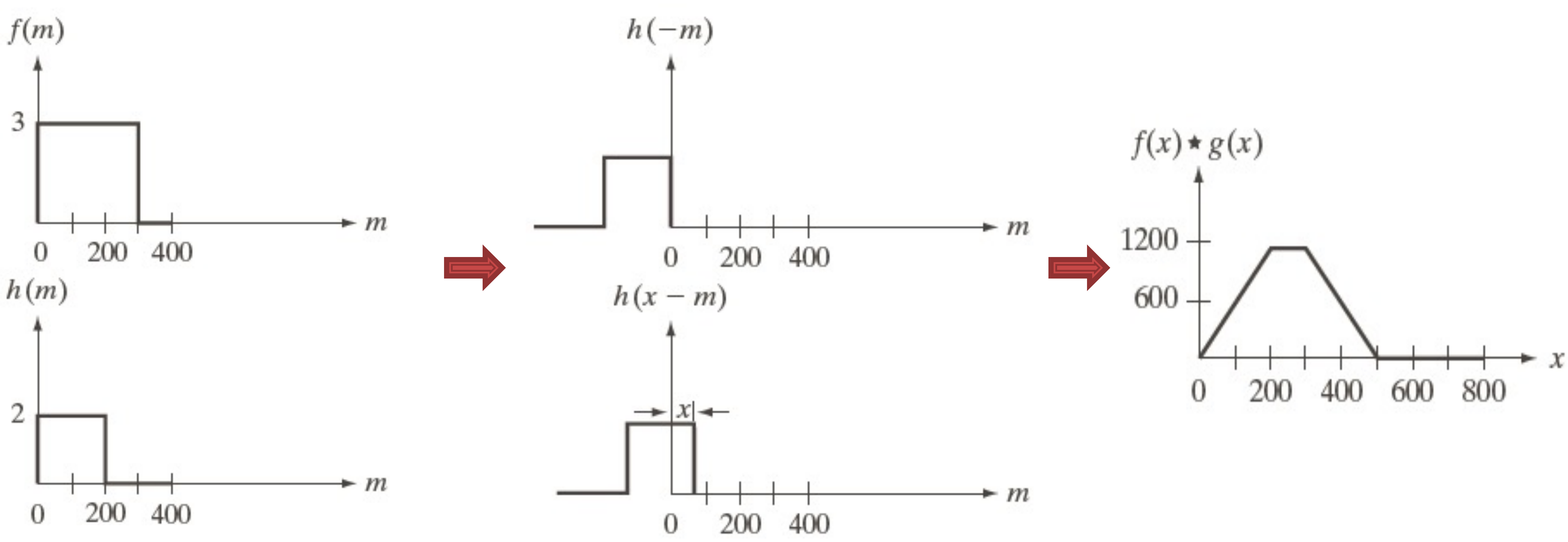


Transformada de Fourier de Funções Discretas

Teorema da Convolução

A convolução 1-D de duas funções contínuas f(x) e h(x):

$$f(x) * h(x) = \int_0^x f(x)h(x-m)dm$$



Teorema da Convolução

A convolução 1-D de duas funções contínuas f(t) e h(t):

$$f(t) \star h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

A transformada de Fourier da convolução de duas funções f(t) e h(t):

$$\begin{aligned} \Im\{f(t) \star h(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau \right] e^{-j2\pi\mu t}\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\, e^{-j2\pi\mu t}\, dt \right] d\tau \end{aligned}$$

Teorema da Convolução

A propriedade de translação da Transf. de Fourier mostra que:

$$\Im\{h(t)\} = H(\mu)$$

$$\Im\{h(t - \tau)\} = H(\mu)\mathrm{e}^{-j2\pi\mu\tau}$$

Substituindo:

$$\Im\{f(t) \star h(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\left[H(\mu)e^{-j2\pi\mu\tau}\right]d\tau$$

$$= H(\mu)\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-j2\pi\mu\tau}\, d\tau$$

$$= H(\mu)F(\mu)$$

Teorema da Convolução

$$f(x) * g(x) \Leftrightarrow F(u)G(u)$$

Convolução
no domínio do tempo/espaço

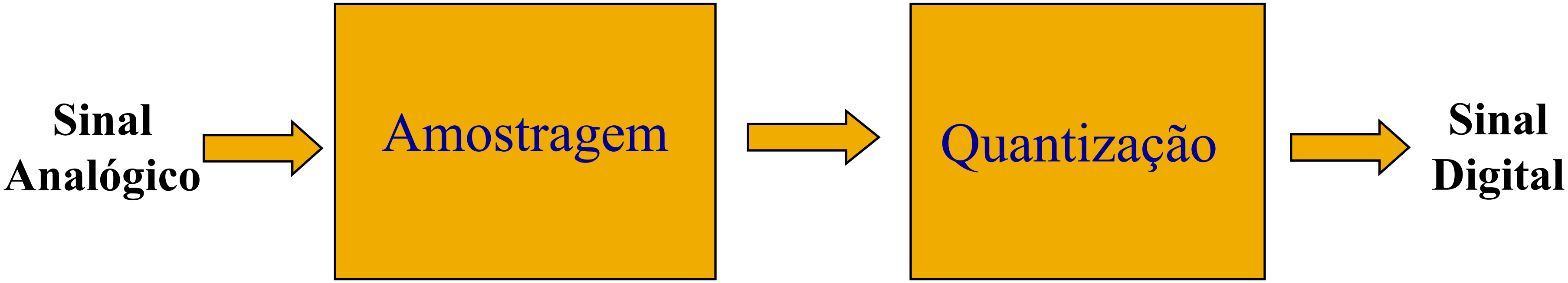
Multiplicação
no domínio da frequência

Teorema da Convolução

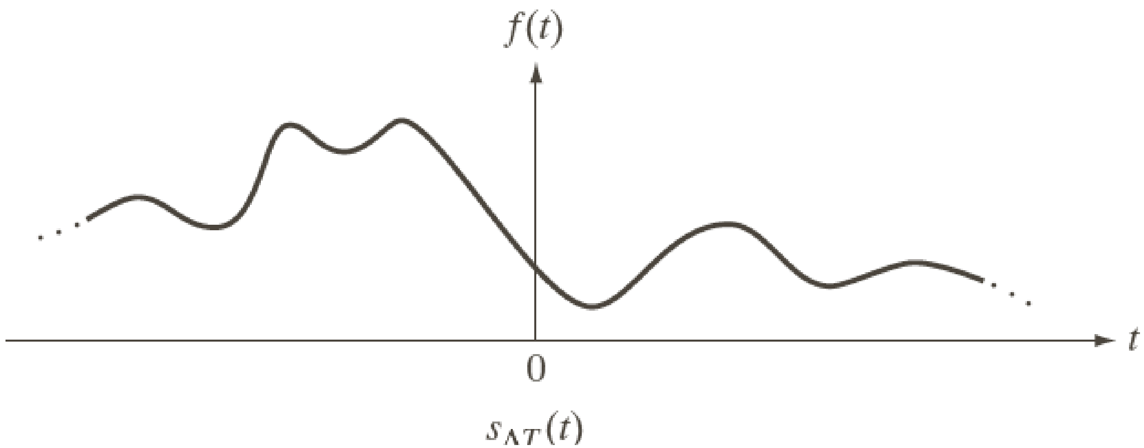
$$f(x)g(x) \Leftrightarrow F(u) * G(u)$$

Multiplicação *no domínio do tempo/espaço* ⟺ ***Convolução*** *no domínio da frequência*

Digitalização



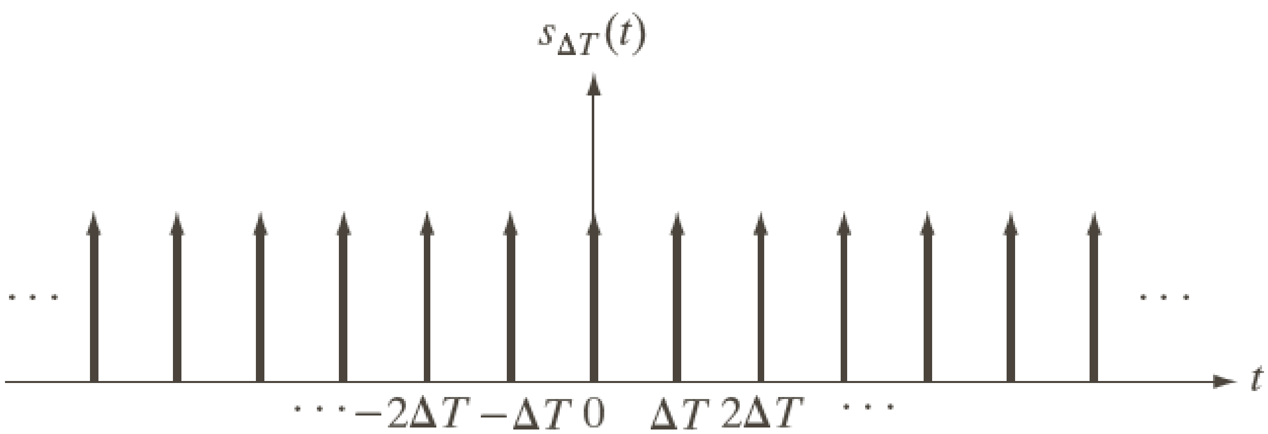
Amostragem



Função contínua

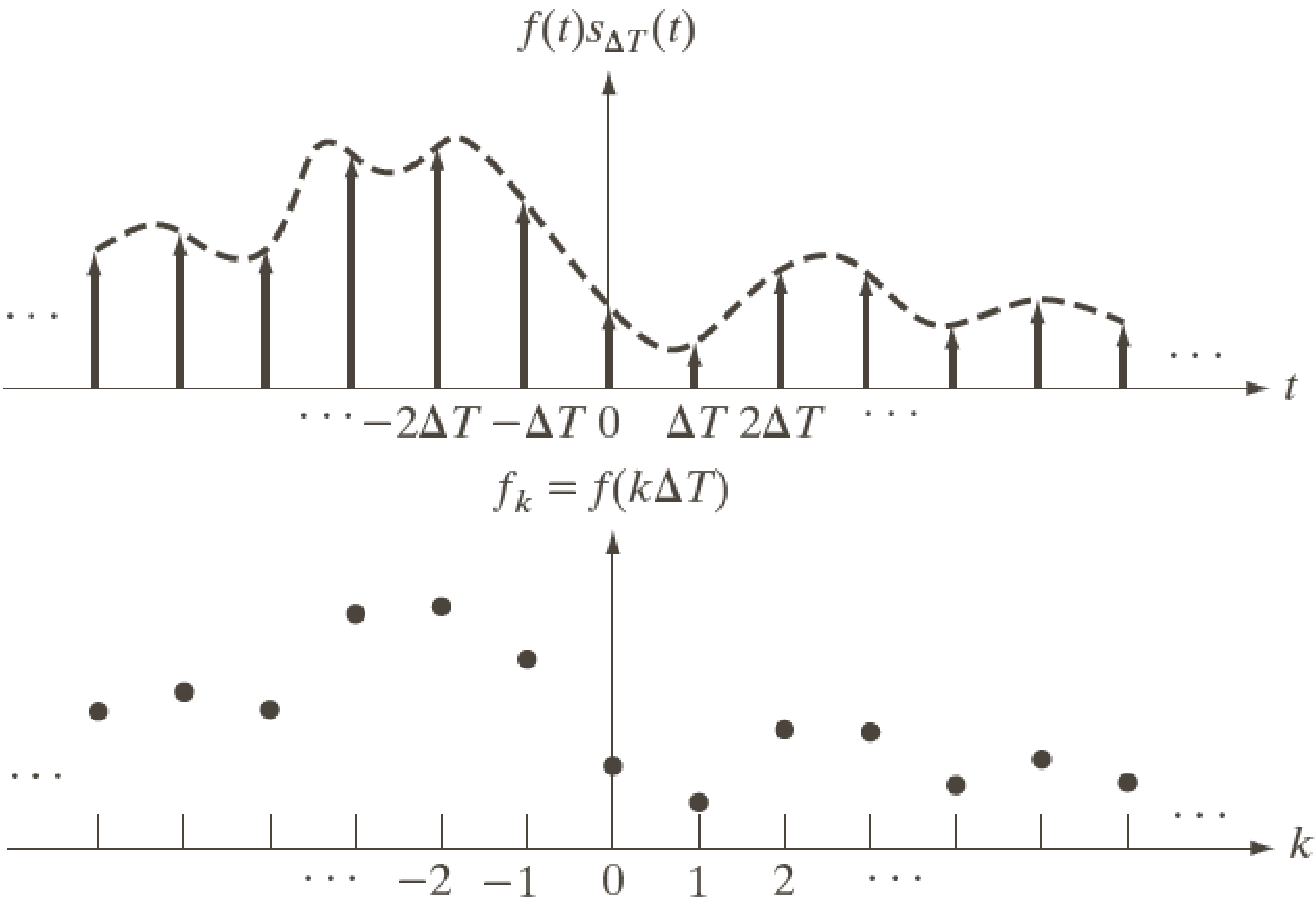
X

X



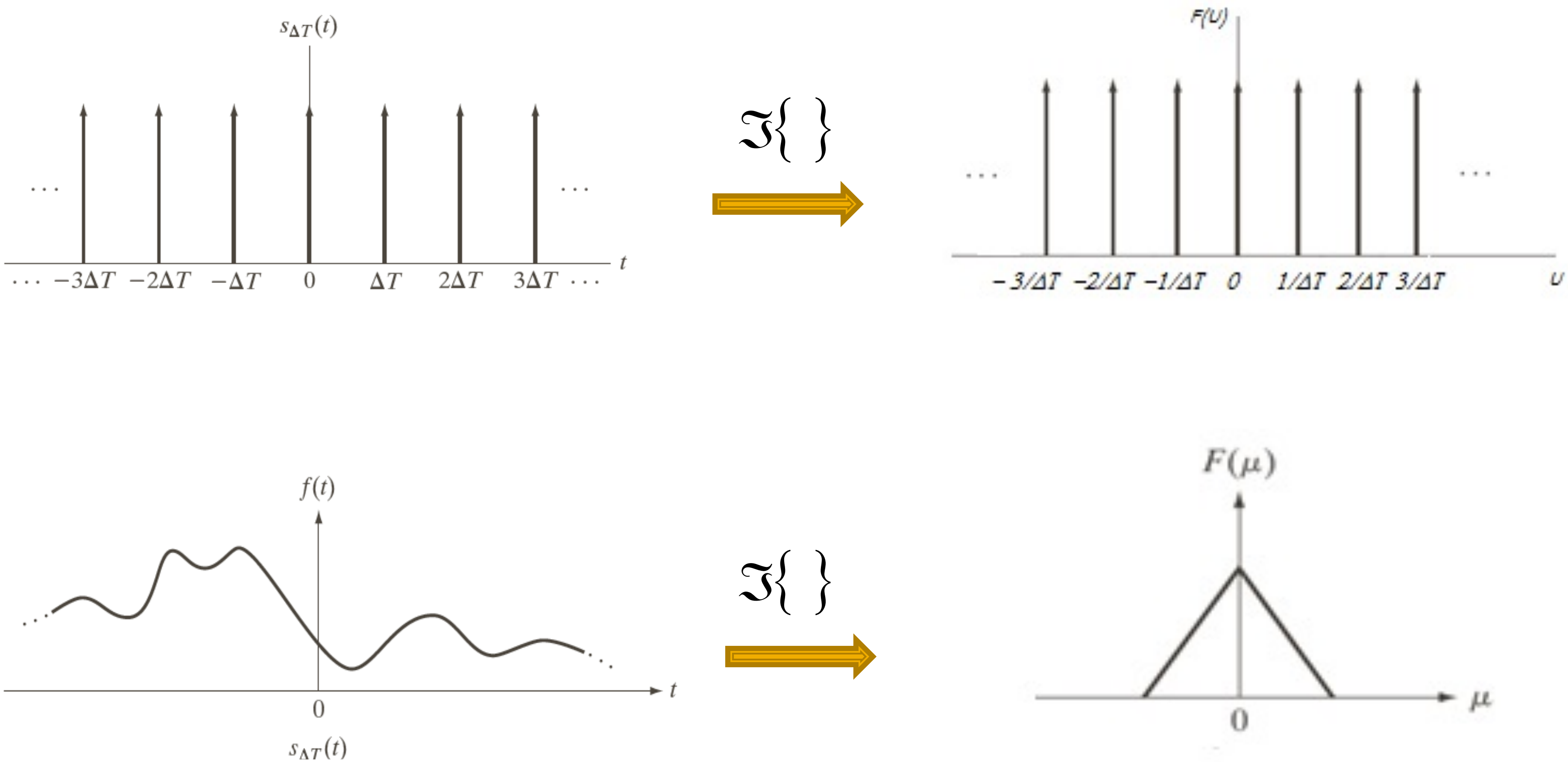
Trem de impulsos

Amostragem

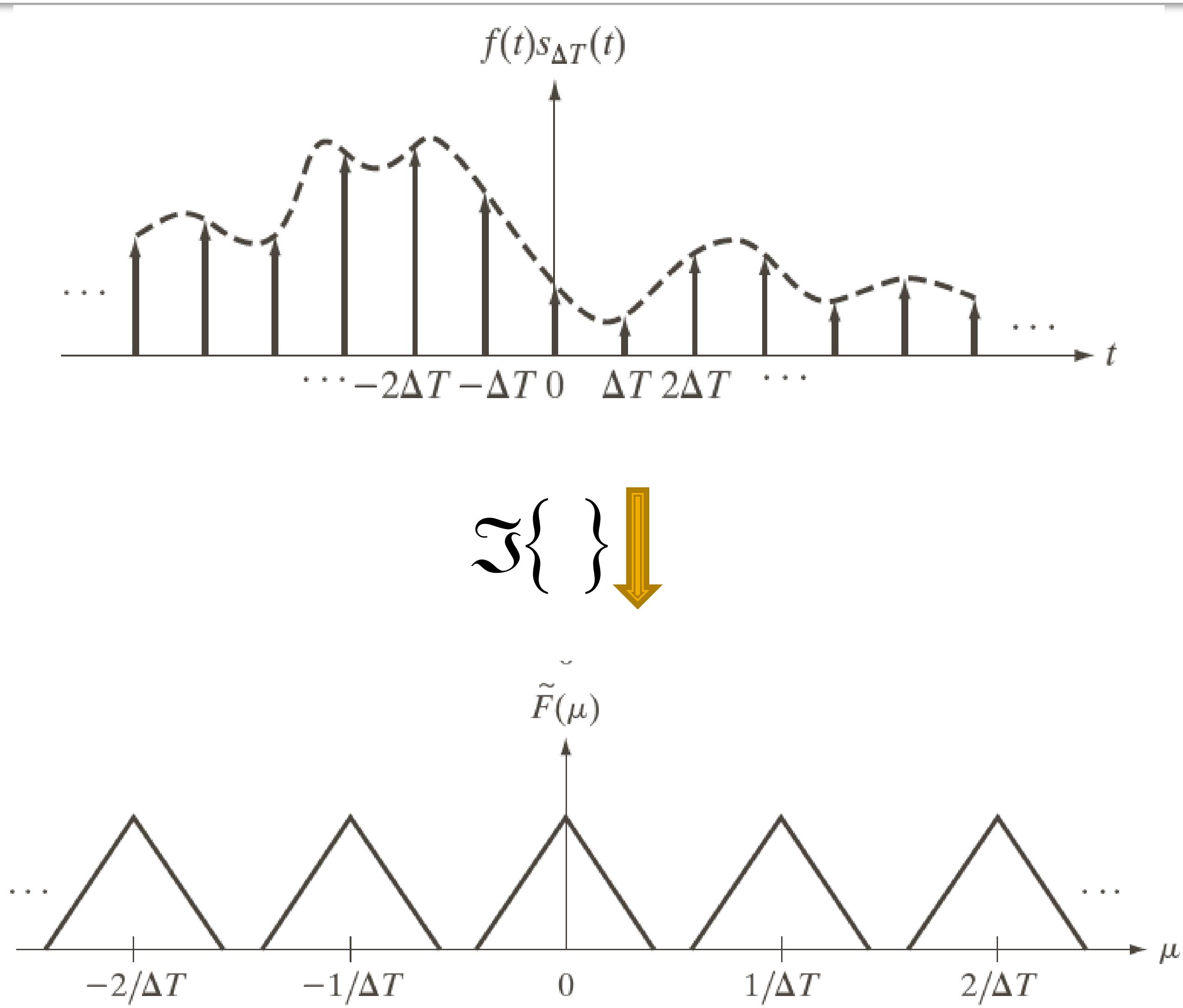


$f(t)s_{\Delta T}(t)$
t
$\cdots -2\Delta T \; -\Delta T \; 0 \quad \Delta T \; 2\Delta T \quad \cdots$
$f_k = f(k\Delta T)$
k
$\cdots \; -2 \; -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad \cdots$

No domínio da frequência



No domínio da frequência



No domínio da frequência

- A transformada de Fourier de uma função amostrada finita é uma função contínua, periódica e infinita

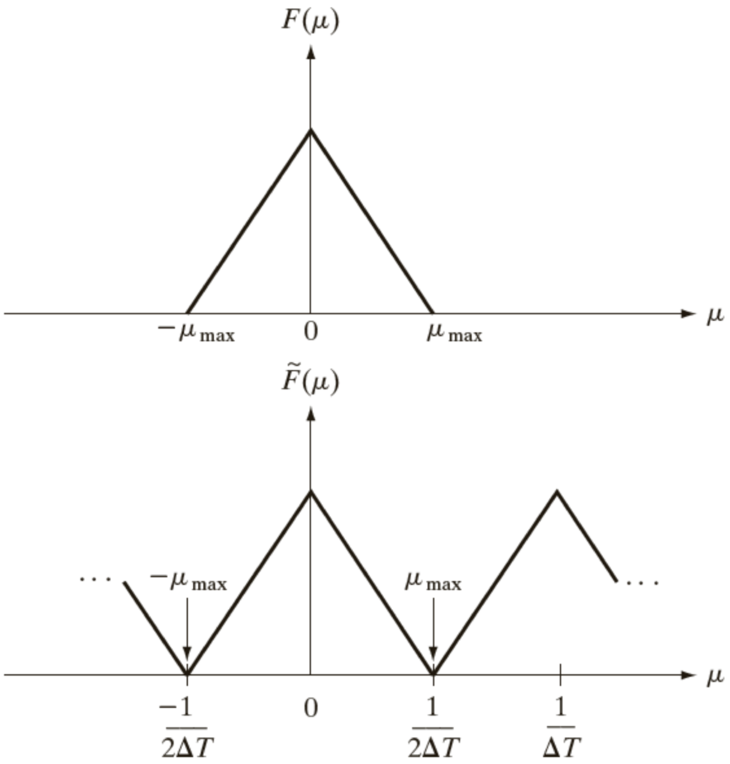
- No domínio da frequência, o espectro se repete em infinitos períodos.

- O equivalente do domínio do tempo para essa característica é a convolução circular.

Taxa de Amostragem e *Aliasing*

Qual seria um bom critério para a escolha de Δx?

- O centro da região sobreposta está em: $u = \dfrac{1}{2\Delta T}$

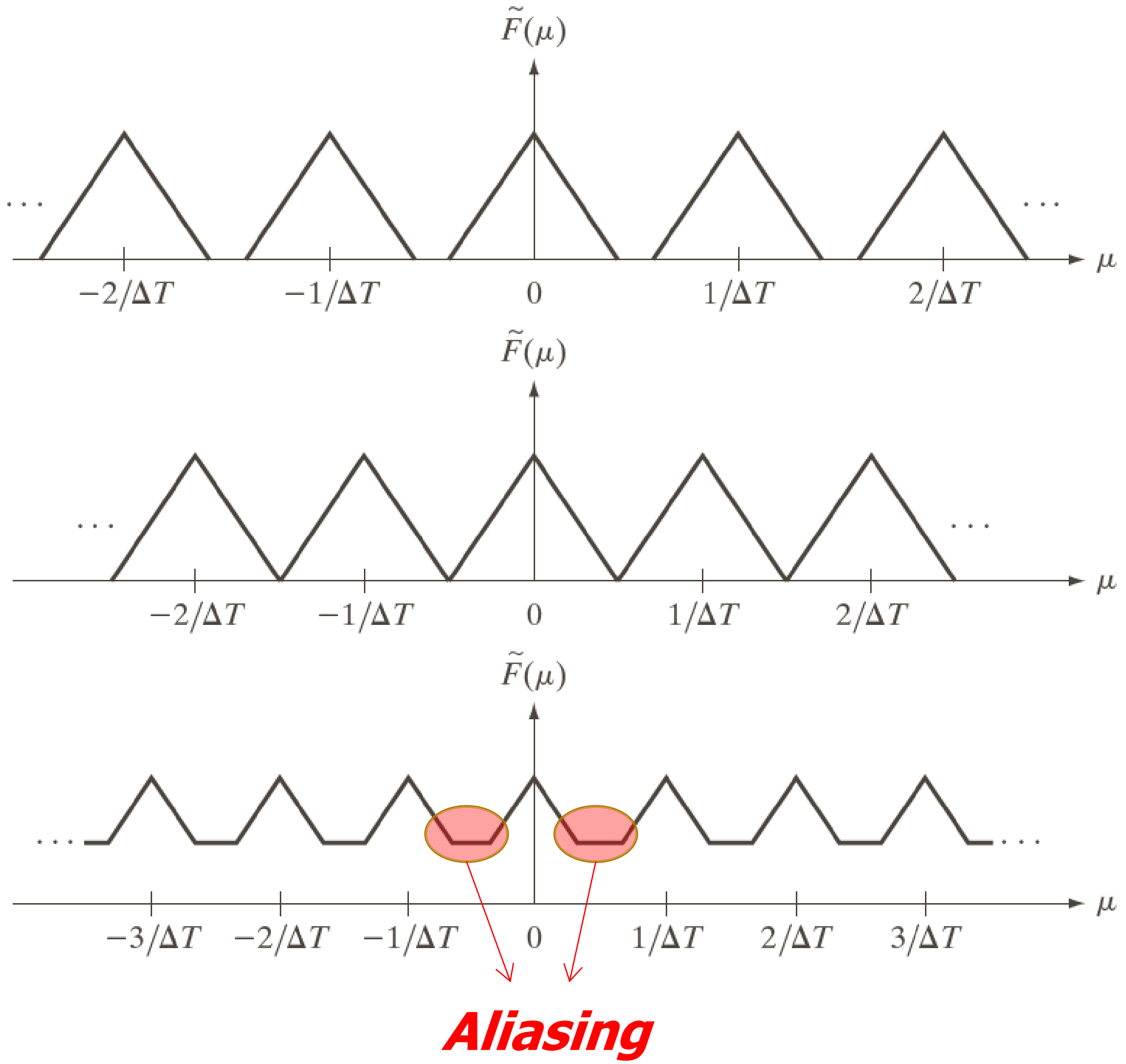


Amostragem e *Aliasing*

Sobre-amostragem

Amostragem crítica

Sub-amostragem

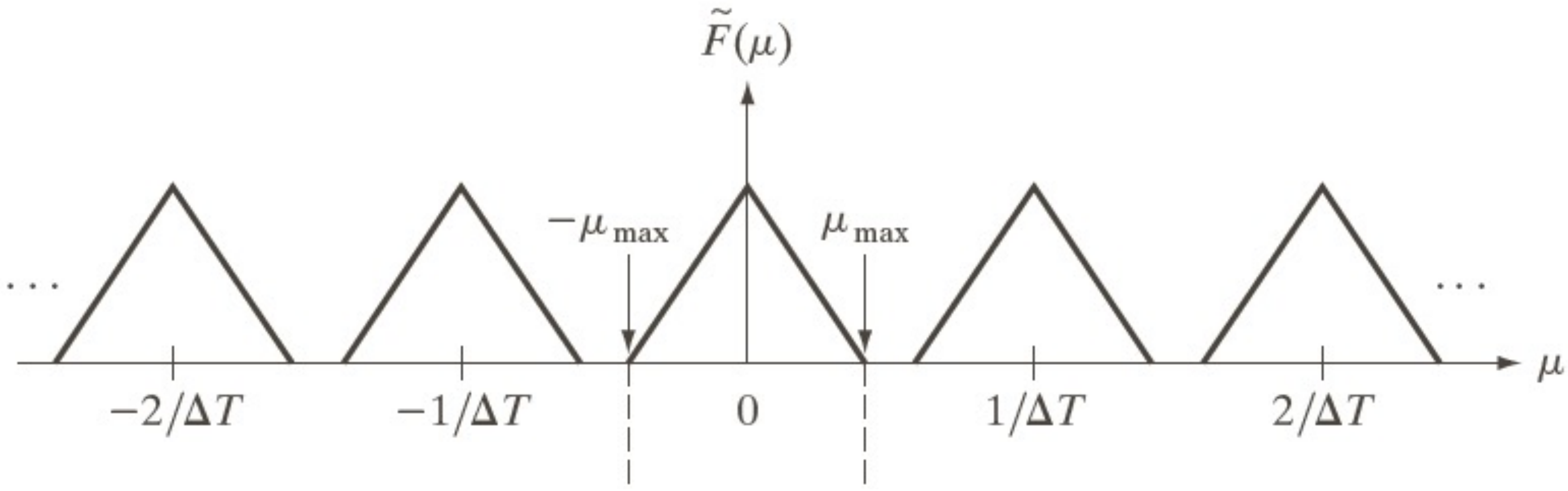


Teorema de Nyquist

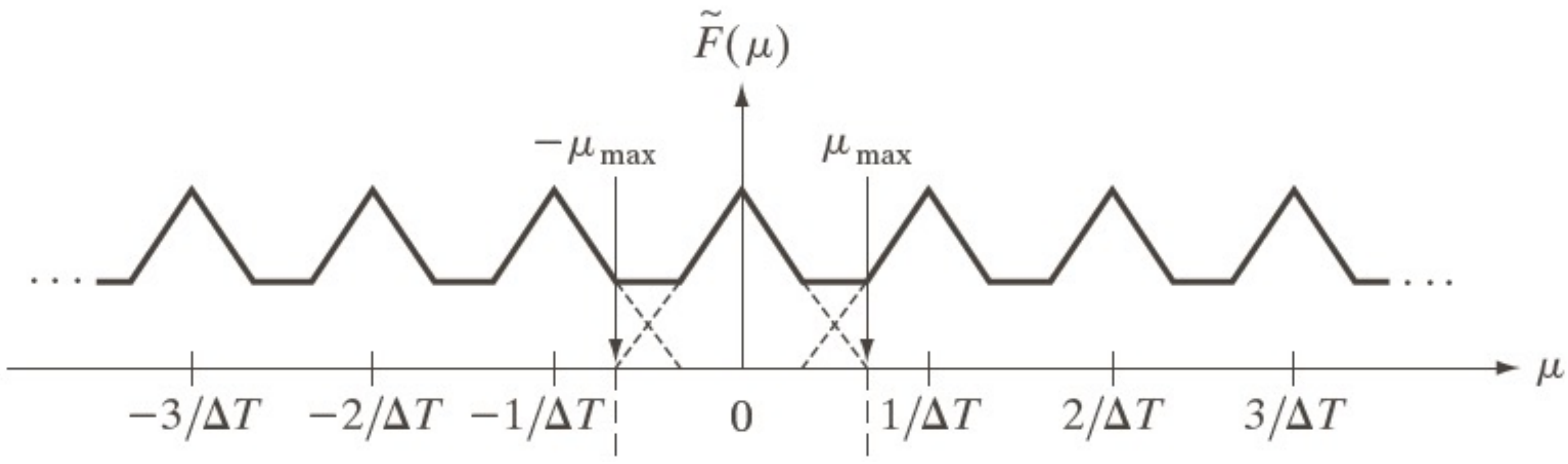
"Se um sinal contínuo tem componente espectral de frequência mais alta igual a $\mu_{máx}$, então o sinal original pode ser amostrado sem *aliasing* se a taxa de amostragem for maior ou igual a $2\mu_{máx}$, ou seja, o período de amostragem ΔT for menor do que $1/2\mu_{máx}$."

$$\frac{1}{2\Delta T} \geq u_{máx} \iff \Delta T \leq \frac{1}{2u_{máx}}$$

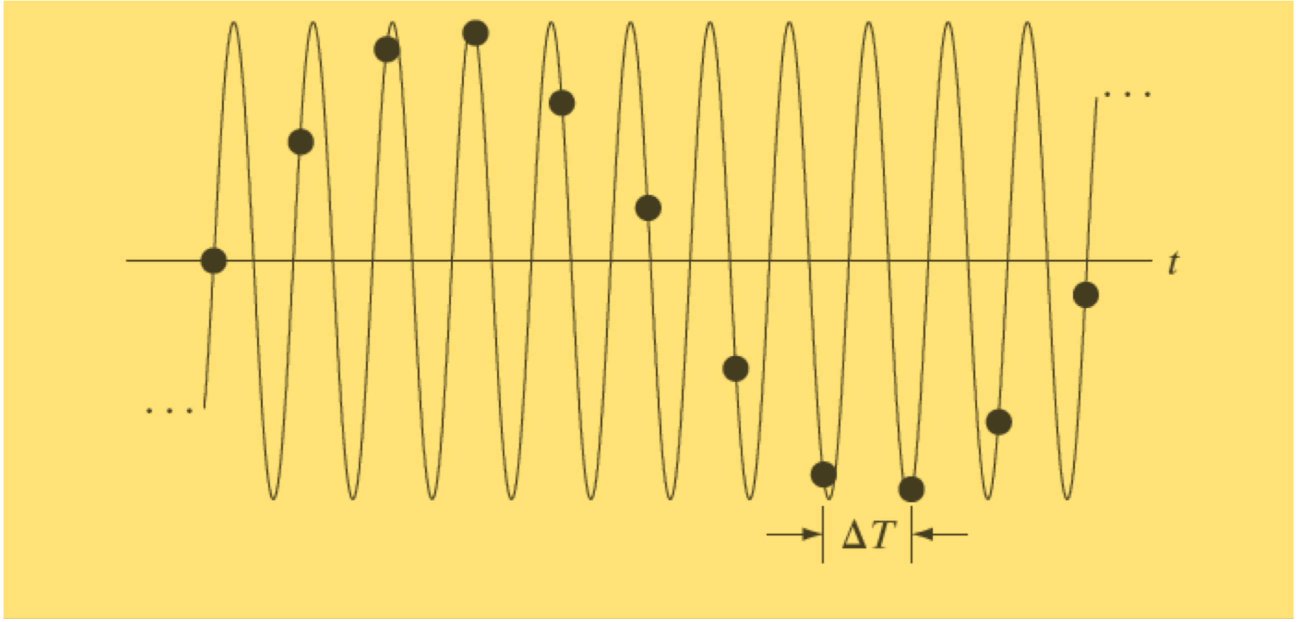
Amostragem sem *aliasing*



Amostragem com *aliasing*

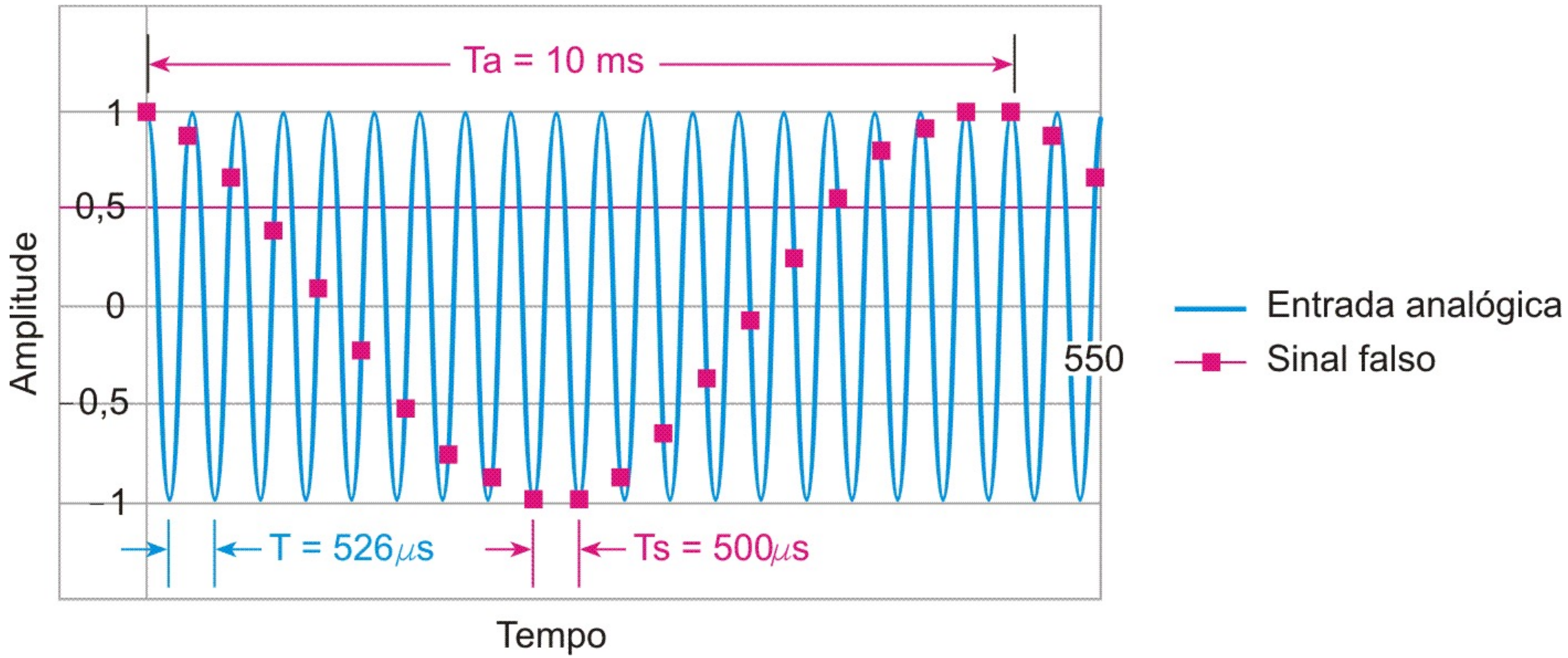


Aliasing no domínio do tempo



O *aliasing* cria um sinal "falso"de frequência menor do que o sinal original

Aliasing no domínio do tempo

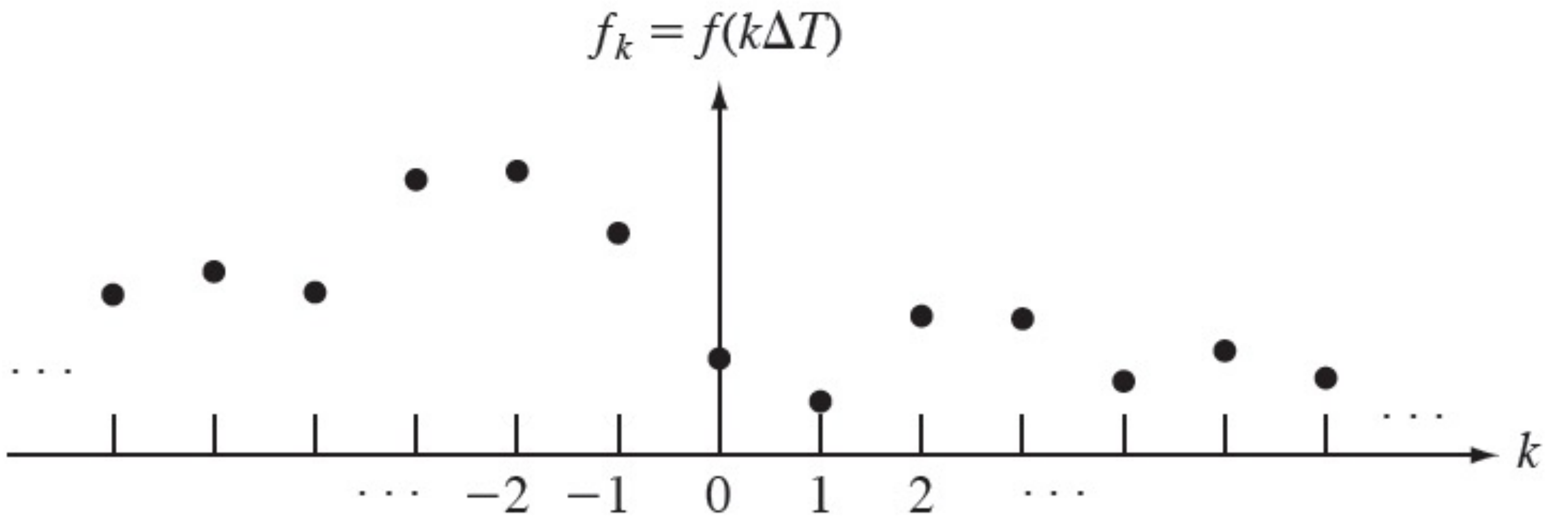


f_{sinal} = 1,9 kHz → T_{sinal} = 526 μs

Taxa de amostragem = 500μs → $f_{sampling}$ = 2,0kHz

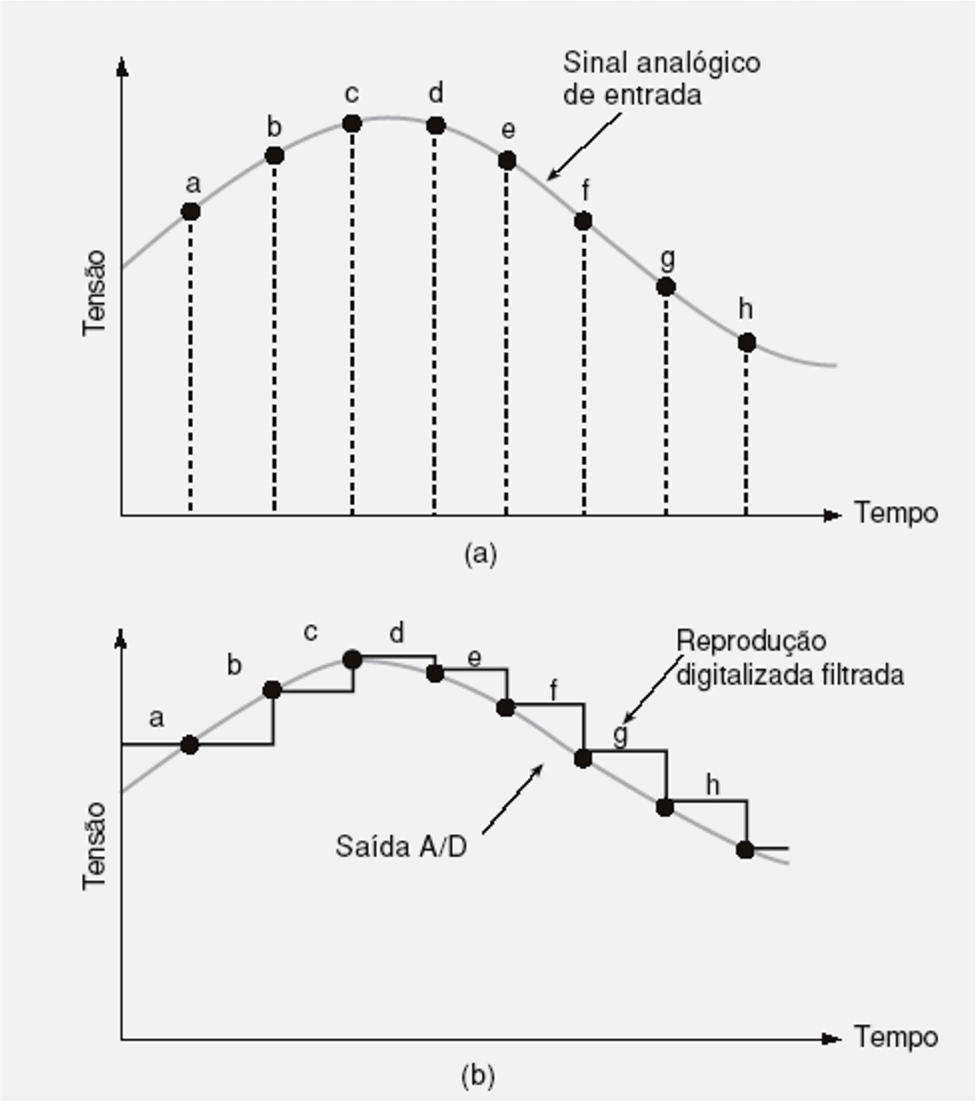
Sinal Reconstruído = 2,0kHz – 1,9kHz = 100Hz (T=10ms)

Reconstrução do Sinal Digital



Como reconstruir o sinal original a partir do sinal digitalizado?

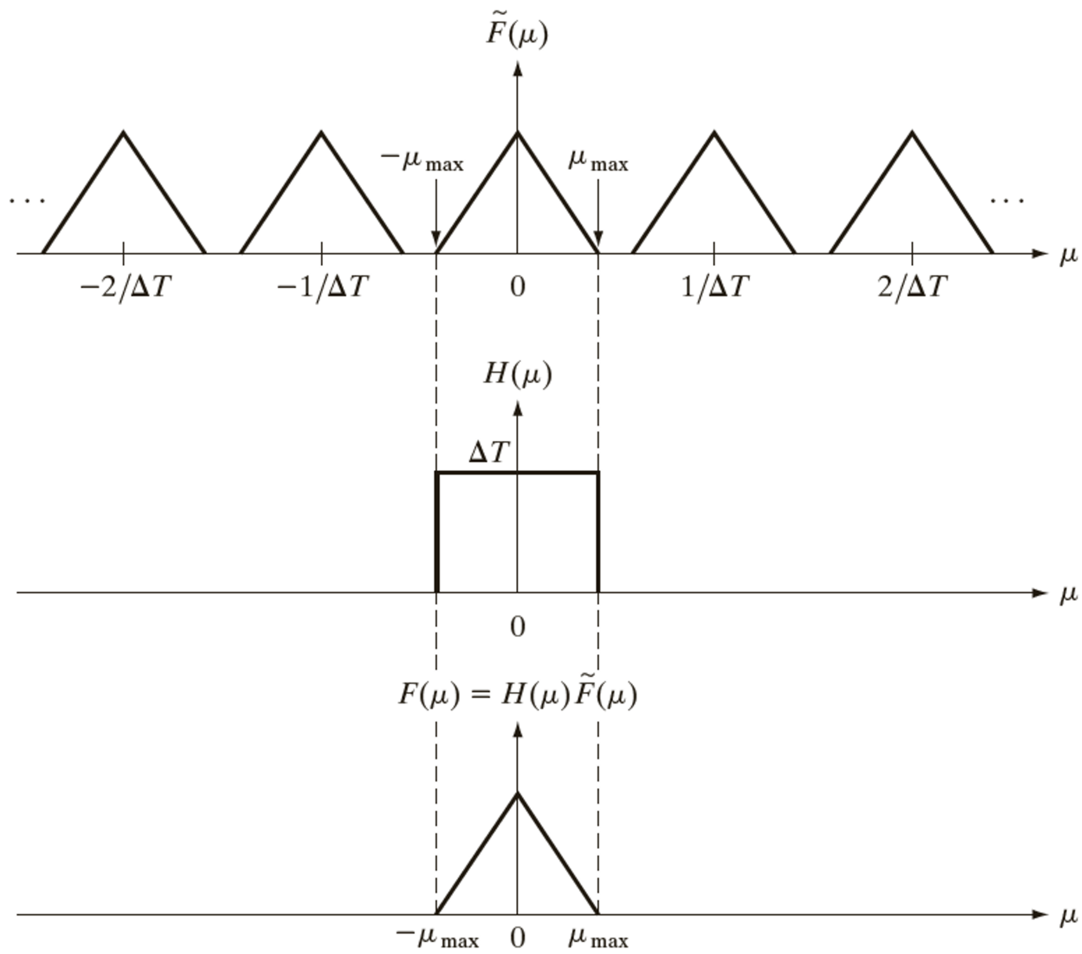
Reconstrução do Sinal Digital
No domínio do tempo



- Sinal sem *aliasing*
- Filtro passa baixa

Reconstrução do Sinal Digital

No domínio da frequência



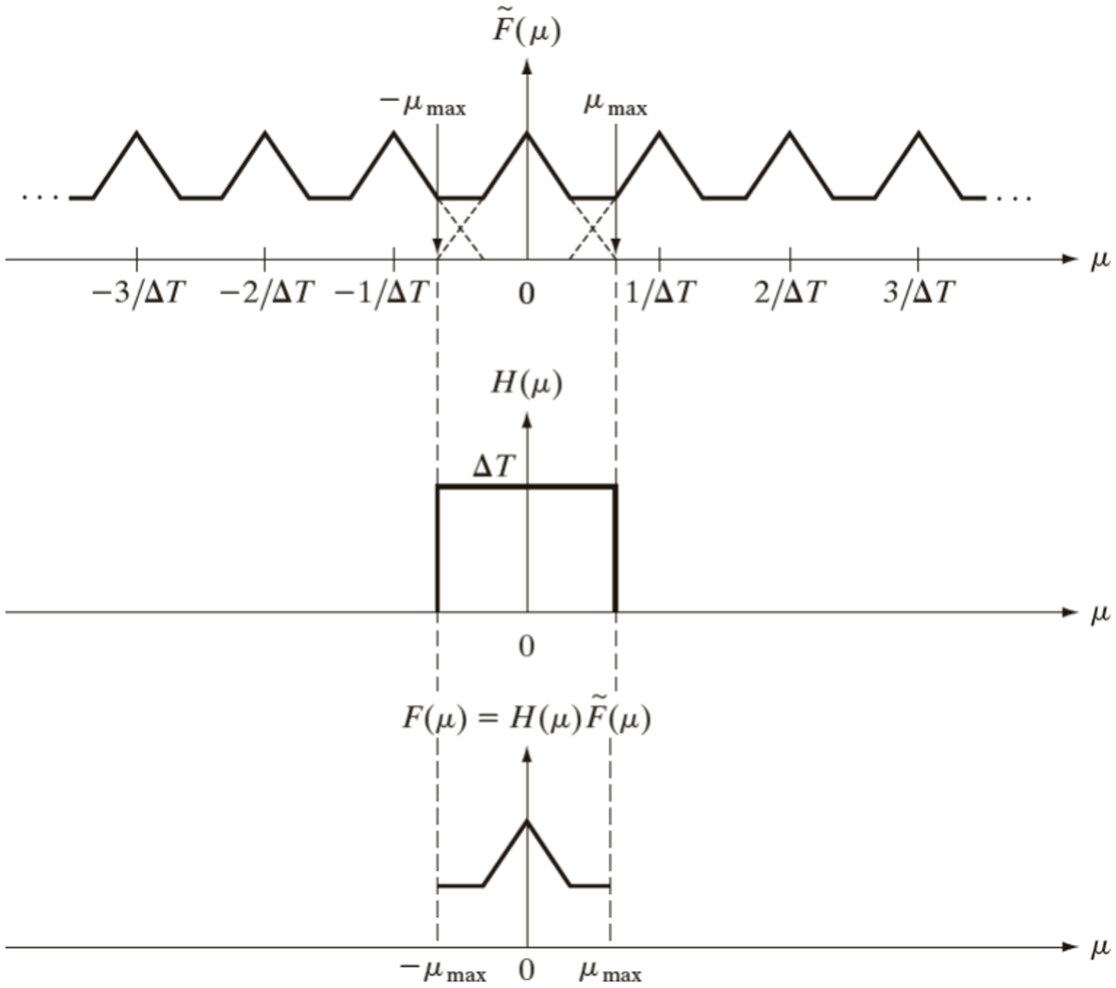
Amostragem sem *aliasing*

Filtro passa baixa

Sinal original

Reconstrução do Sinal Digital

No domínio da frequência



Amostragem com *aliasing*

Filtro passa baixa

Sinal distorcido

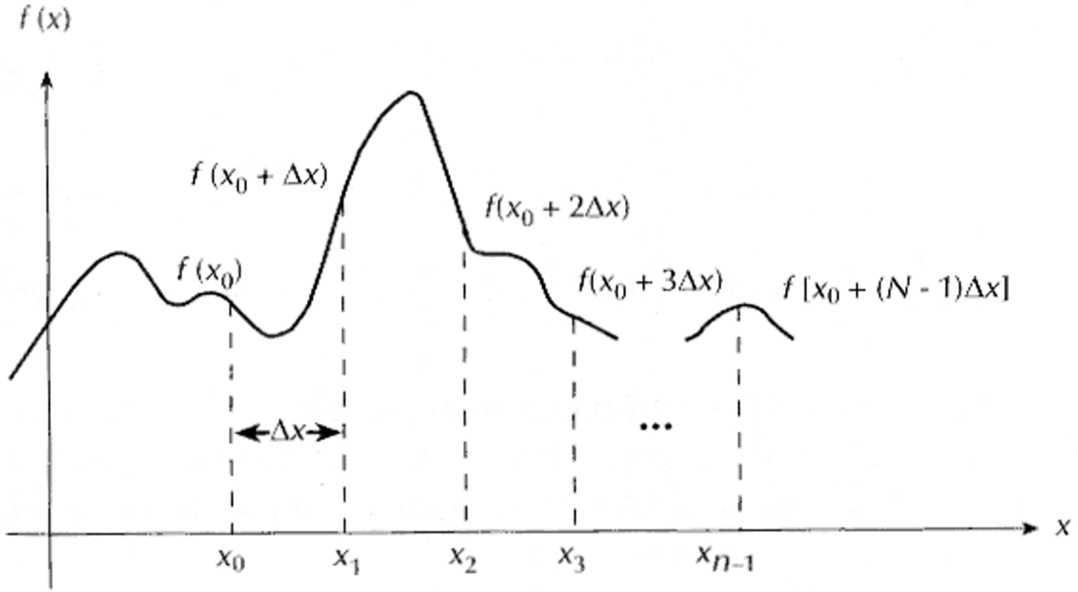
DFT

Transformada Discreta de Fourier

A Transformada Discreta de Fourier (1-D)

Uma função contínua f(x) pode ser digitalizada numa sequência de N amostras separadas de Δx unidades:

$$\{f(x_0), f(x_0+\Delta x), f(x_0+2\Delta x), \ldots\ldots f(x_0+[N-1]\Delta x\}$$



$$f(x) = f(x_0 + x\Delta x)$$

Para x = 0, 1, 2, ...N-1

f(x) = {f(0), f(1), f(2), ...f(N-1)}

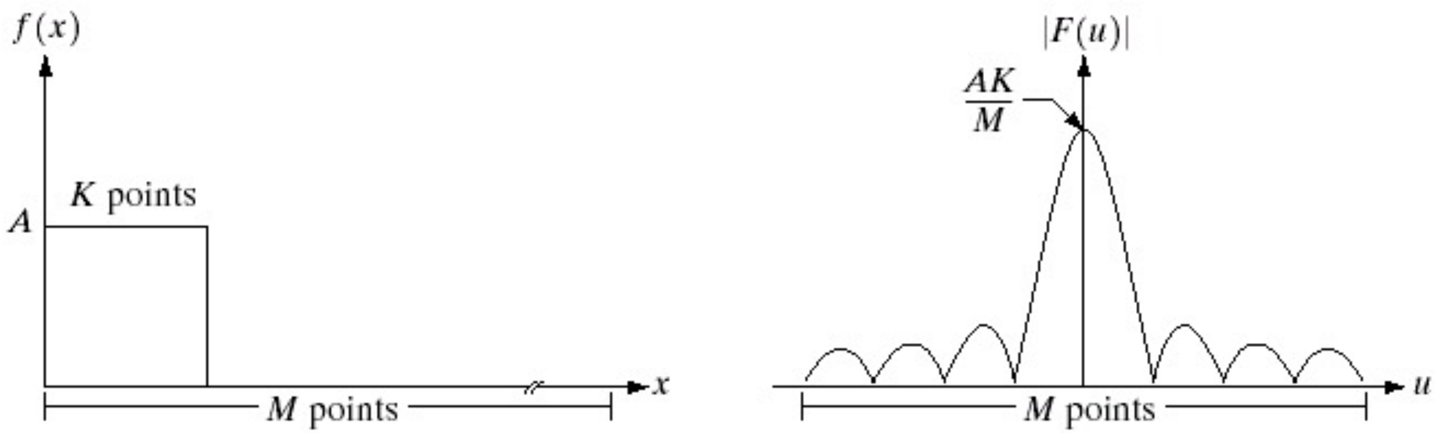
A Transformada Discreta de Fourier (1-D)

- Vimos que a transformada de Fourier de uma função amostrada finita é uma função contínua, periódica e infinita

- Como no domínio da frequência o espectro se repete em infinitos períodos, o cálculo da DFT é feito em apenas um período.

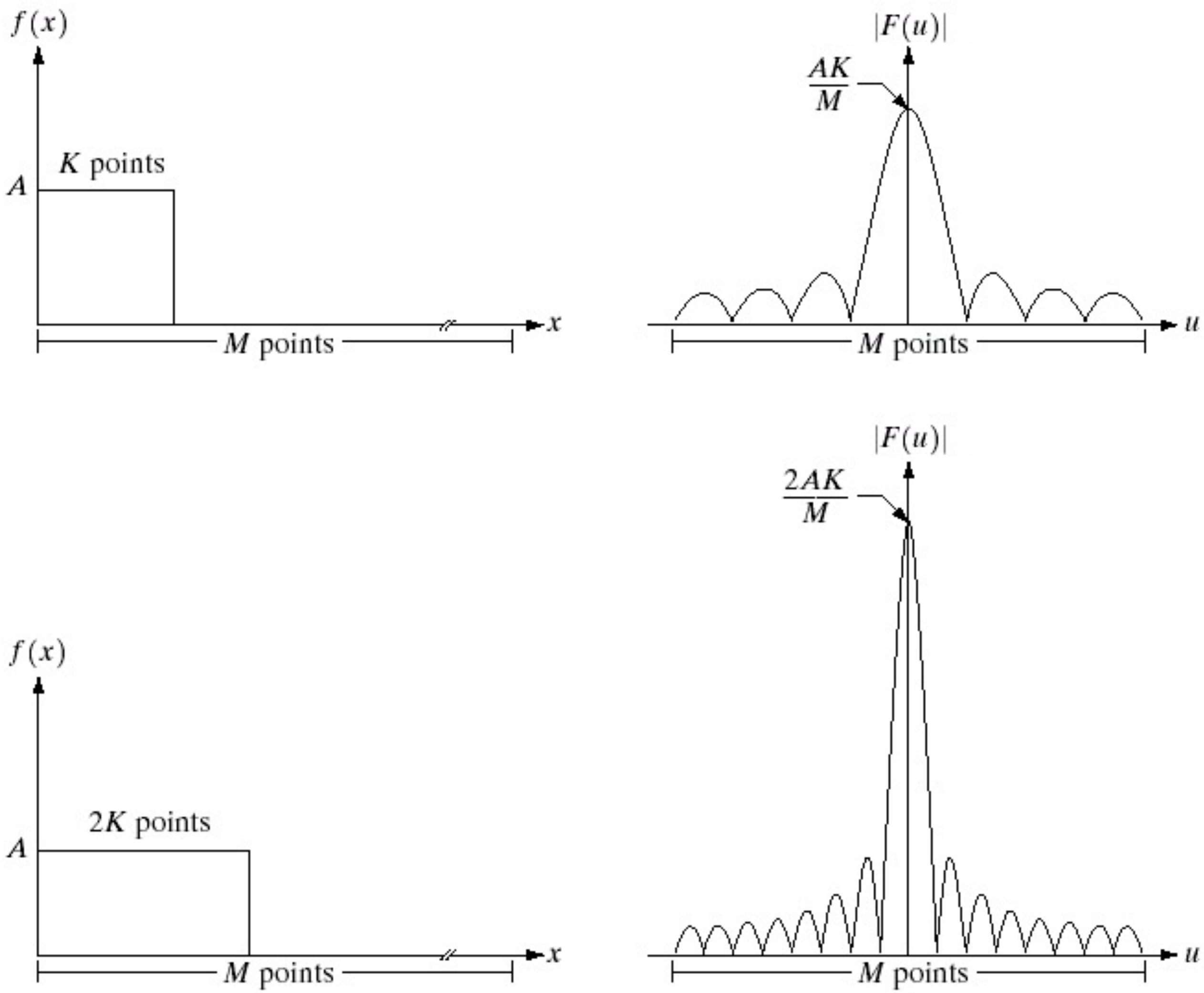
- O equivalente do domínio do tempo para essa característica da periodicidade da DFT é a convolução circular.

A Transformada Discreta de Fourier (1-D)



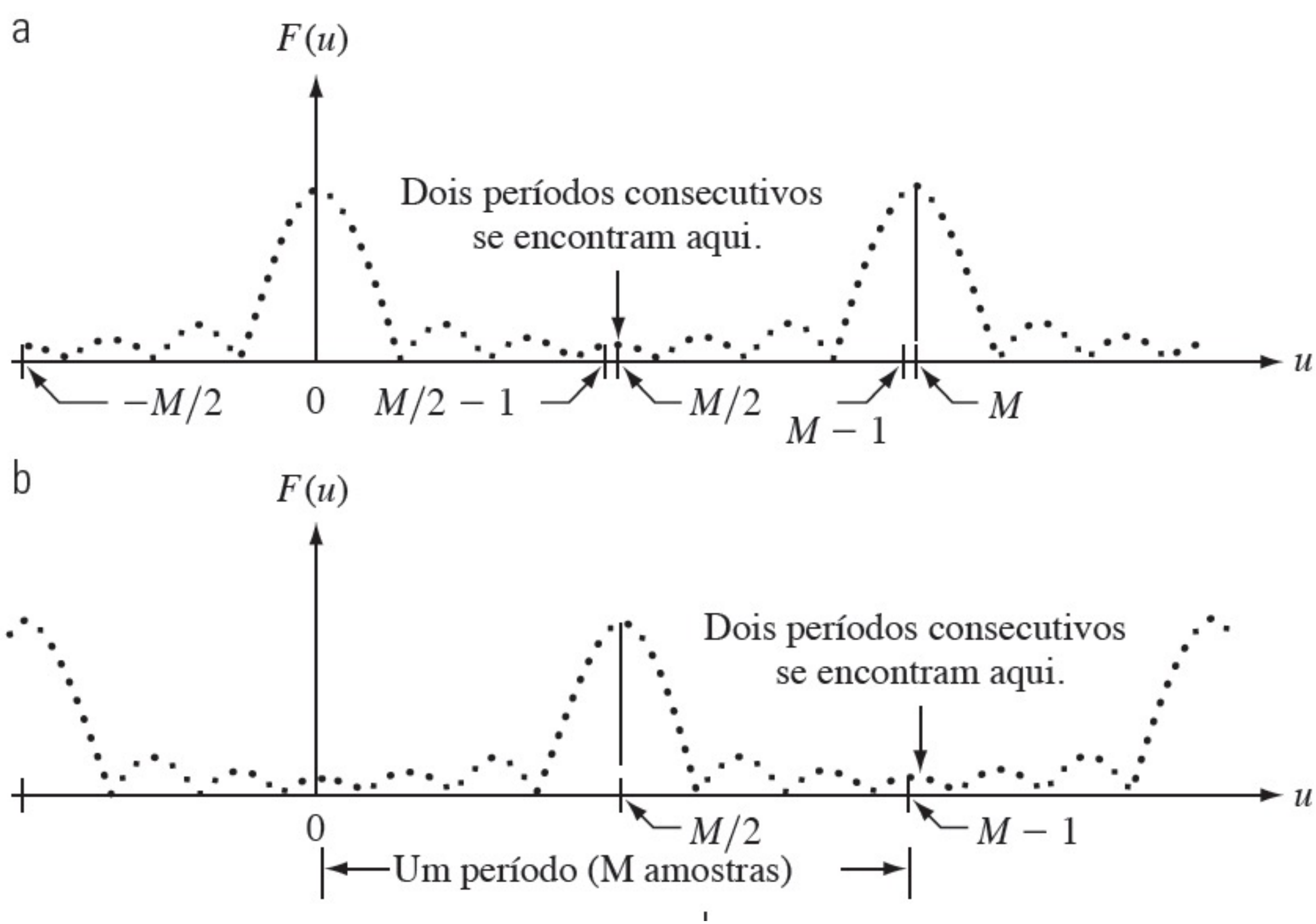
A transformada discreta de Fourier é calculada para o mesmo número de amostras a função original.

Exemplo



$f(x)$
A
K points
M points
x
$|F(u)|$
$\frac{AK}{M}$
u
M points
$f(x)$
A
$2K$ points
M points
x
$|F(u)|$
$\frac{2AK}{M}$
u
M points

Periodicidade da DFT



A Transformada Discreta de Fourier (1-D)

O par de **Transformadas Discretas de Fourier** que se aplica a funções amostradas unidimensionais é dado por:

$$F(u) = \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1} f(x)\exp[-j2\pi\, ux / N]$$

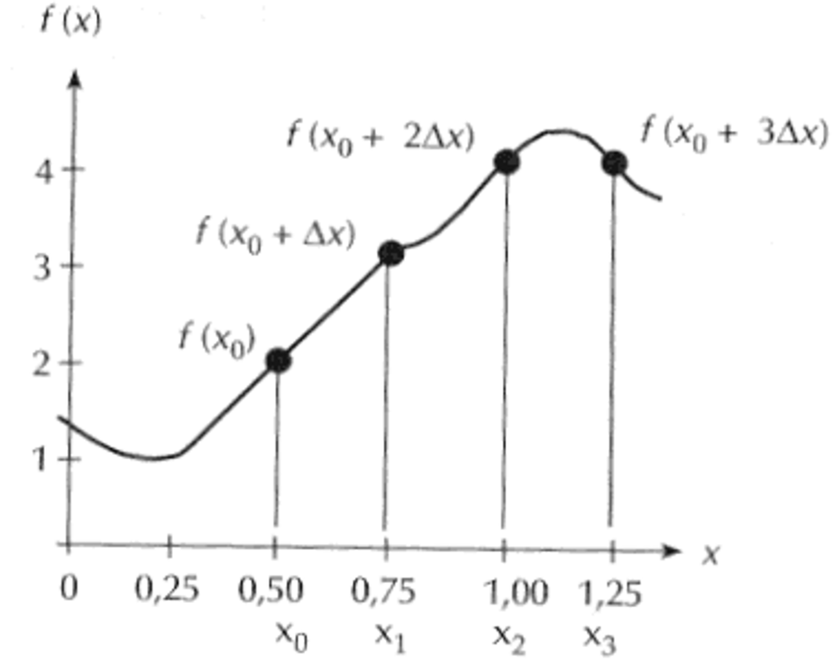
Para u = 0,1,2,........N-1

$$f(x) = \sum_{u=0}^{N-1} F(u)\exp[j2\pi\, ux / N]$$

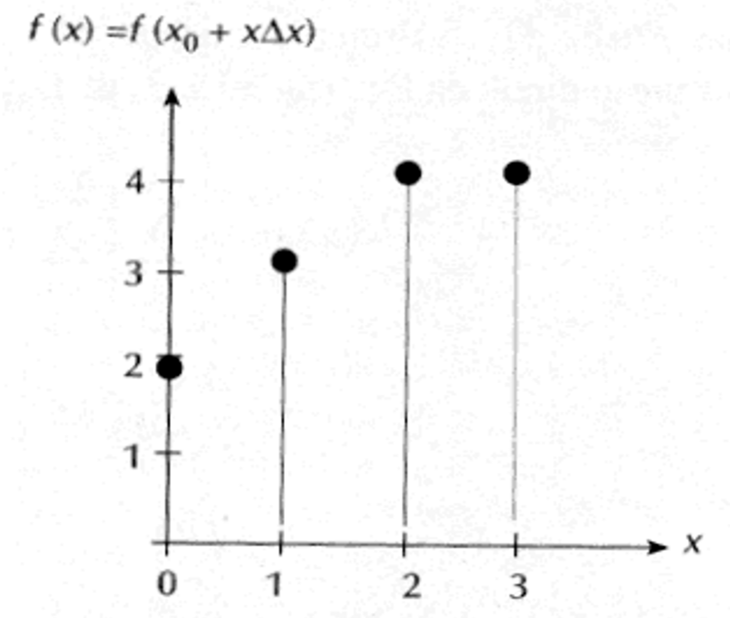
Para x = 0,1,2,........ N-1

Exemplo: DFT direta

Função contínua 1-D amostrada:



Função discreta :



$$F(u) = \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1} f(x)\exp[-j2\pi ux/N]$$

$$\boxed{\begin{aligned} f(0) &= 2 \\ f(1) &= 3 \\ f(2) &= 4 \\ f(3) &= 4 \end{aligned}}$$

Exemplo

$$F(u) = \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1} f(x)\exp[-j2\pi ux/N]$$

$$\boxed{\begin{aligned} F(0) &= \frac{1}{4}\sum_{x=0}^{3} f(x)\exp[0] \\ &= \frac{1}{4}[f(0)+f(1)+f(2)+f(3)] \\ &= \frac{1}{4}[2+3+4+4] = 3{,}25 \end{aligned}}$$

$$F(1) = \frac{1}{4}\sum_{x=0}^{3} f(x)\exp[-j2\pi x/4]$$

$$= \frac{1}{4}[2e^{0} + 3e^{-j\pi/2} + 4e^{-j\pi} + 4e^{-j3\pi/2}]$$

$$= \frac{1}{4}\left[2 + 3(\cos\frac{\pi}{2} - jsen\frac{\pi}{2}) + 4(\cos\pi - jsen\pi) + 4(\cos\frac{3\pi}{2} - jsen\frac{3\pi}{2})\right]$$

$$\boxed{F(2) = -\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{1}{4}[2 + 3(0-j) + 4(-1-j0) + 4(0-j(-1))]$$

$$= \frac{1}{4}[2 - 3j - 4 + 4j]$$

$$\boxed{F(3) = -\frac{1}{4}[2+j]}$$

$$= \frac{1}{4}(-2+j)$$

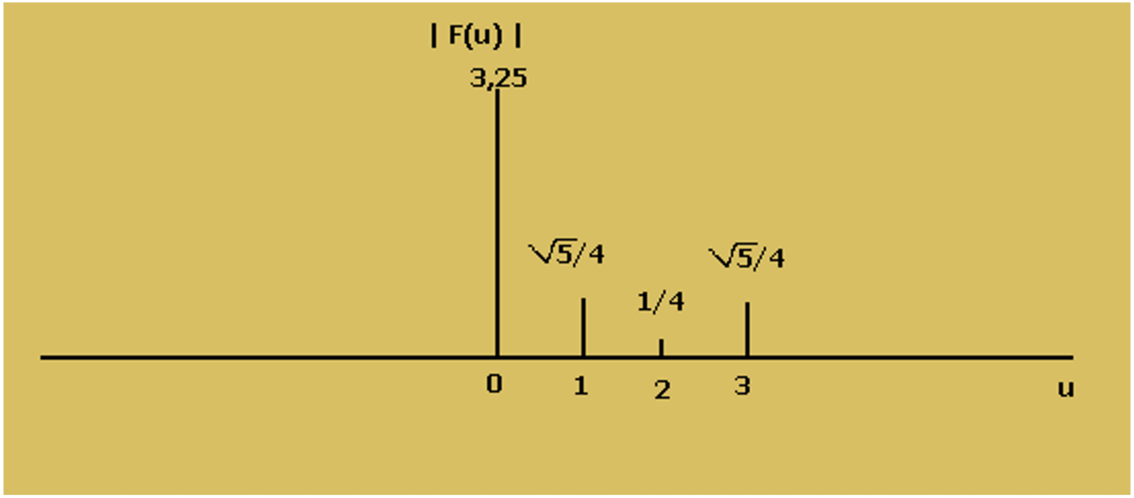
Exemplo

$$|F(0)| = 3{,}25$$

$$|F(2)| = \left[\left(\frac{1}{4}\right)^2\right]^{1/2} = \frac{1}{4}$$

$$|F(1)| = \left[\left(\frac{2}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2\right]^{1/2} = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

$$|F(3)| = \left[\left(\frac{2}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2\right]^{1/2} = \frac{\sqrt{5}}{4}$$



Exemplo: DFT inversa

$$f(x)=\sum_{u=0}^{N-1}F(u)\exp[j2\pi ux/N]$$

$$\begin{aligned}
f(0)&=\sum_{u=0}^{3}F(u)\exp[0]\\
&=F(0)+F(1)+F(2)+F(3)\\
&=3{,}25+\frac{1}{4}(-2+j)-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}(2+j)\\
&=3{,}25-\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}j\right)-\left(\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{4}j\right)\\
&=3{,}25-1{,}25\\
&=2
\end{aligned}$$

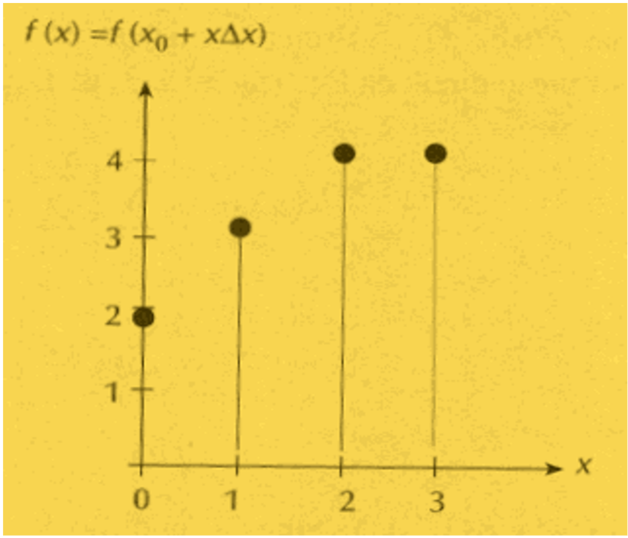
$$\begin{aligned}
f(1)&=\sum_{u=0}^{3}F(u)\exp[j2\pi u/4]\\
&=3{,}25e^{0}+\frac{\sqrt{5}}{4}e^{j\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{4}e^{j\pi}+\frac{\sqrt{5}}{4}e^{j\frac{3\pi}{2}}\\
&=3{,}25+\frac{1}{4}\left[\sqrt{5}\left(\cos\frac{\pi}{2}+j\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{2}\right)+(\cos\pi+j\,\mathrm{sen}\,\pi)+\sqrt{5}\left(\cos\frac{3\pi}{2}+j\,\mathrm{sen}\frac{3\pi}{2}\right)\right]\\
&=3{,}25+\frac{1}{4}\left[\sqrt{5}(0+j)+(-1+j0)+\sqrt{5}(0-j)\right]\\
&=3{,}25-0{,}25\\
&=3
\end{aligned}$$

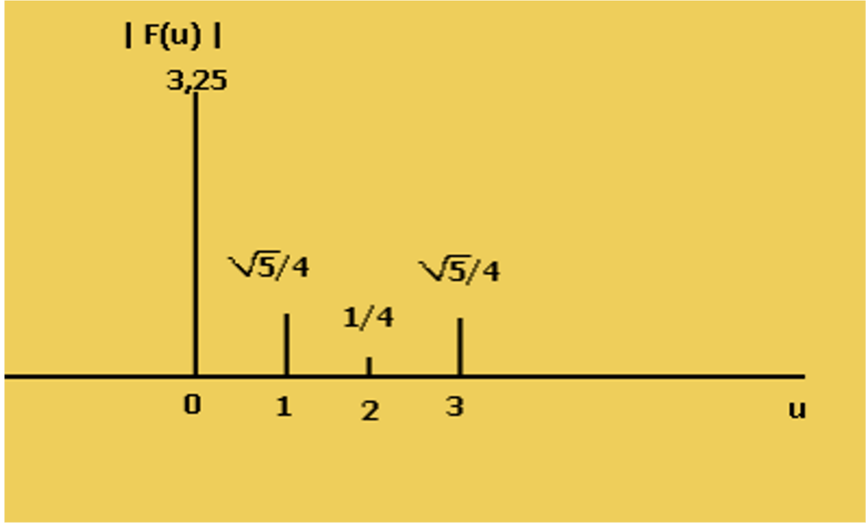
$$f(2)=4$$

$$f(3)=4$$

Exemplo

As duas representações da função podem ser obtidas uma da outra, com o mesmo número de amostras, sendo uma no domínio do tempo e outra no domínio da frequência





Transformada de Fourier 2-D

A Transformada de Fourier 2-D de uma função contínua f(x,y) é :

$$\Im\{f(x,y)\} = F(u,v) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\exp[-j2\pi(ux+vy)dxdy$$

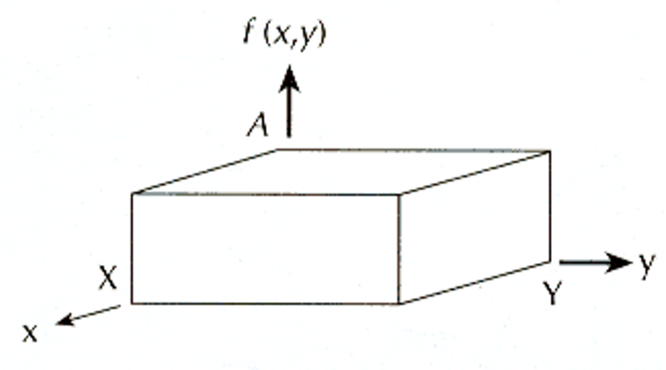
A Transformada Inversa é dada por:

$$\Im\{F(u,v)\} = f(x,y) = \iint_{-\infty}^{\infty} F(u,v)\exp[j2\pi(ux+vy)dudv$$

Sendo que (u) e (v) são as variáveis de frequência.

Exemplo

Seja a função 2-D f(x,y) no domínio do espaço:



A Transformada de Fourier 2-D é dada pela equação:

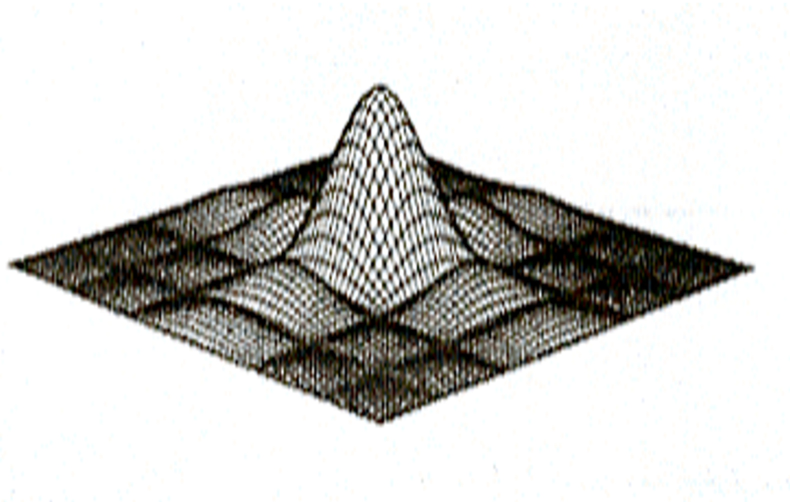
$$F(u,v) = \int\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\exp[-j2\pi(ux+vy)dxdy \ =$$

$$= A\int_0^X \exp[-j2\pi ux]dx \int_0^Y \exp[-j2\pi vy]dy$$

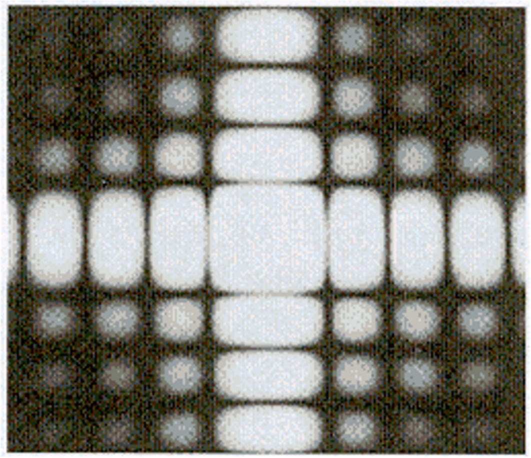
Exemplo

$$|F(u,v)| = AXY\left|\frac{\text{sen}(\pi uX)}{(\pi uX)}\right|\left|\frac{\text{sen}(\pi vY)}{(\pi vY)}\right|$$

Espectro de Fourier



Espectro como uma Imagem de Intensidades



A Transformada Discreta de Fourier (2-D)

O par de **Transformadas Discretas de Fourier** de uma função f(x,y) amostrada (M x N), é dado por:

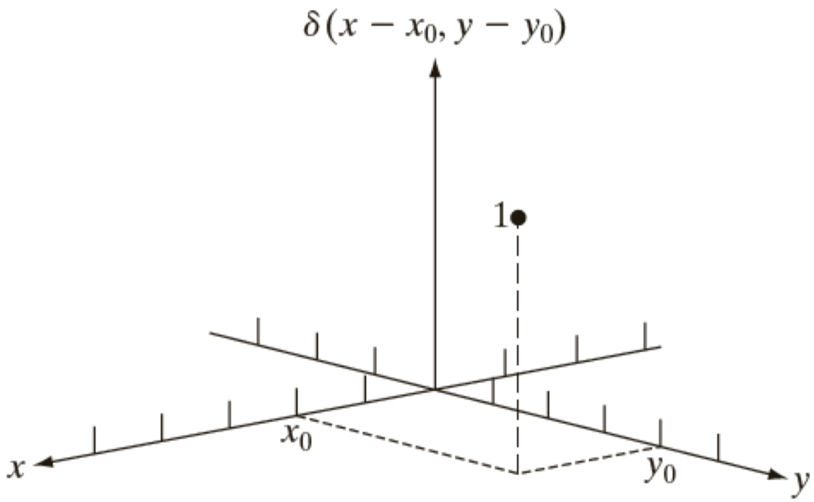
$$F(u,v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \exp[-j2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})]$$

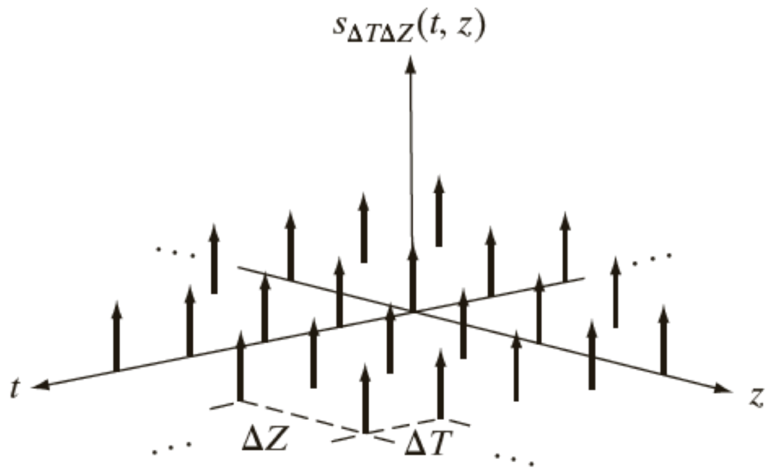
Para u = 0,1,2,........M-1 Para v = 0,1,2,........N-1

$$f(x,y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u,v) \exp[j2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})]$$

Para x = 0,1,2,........ M-1 Para y = 0,1,2,........ N-1

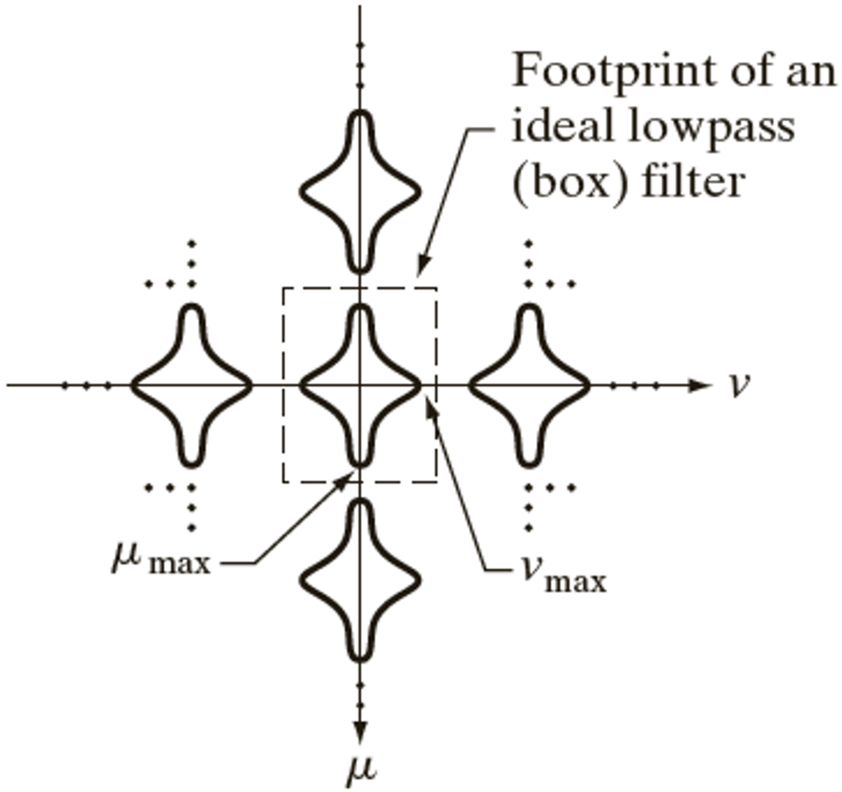
Amostragem 2-D

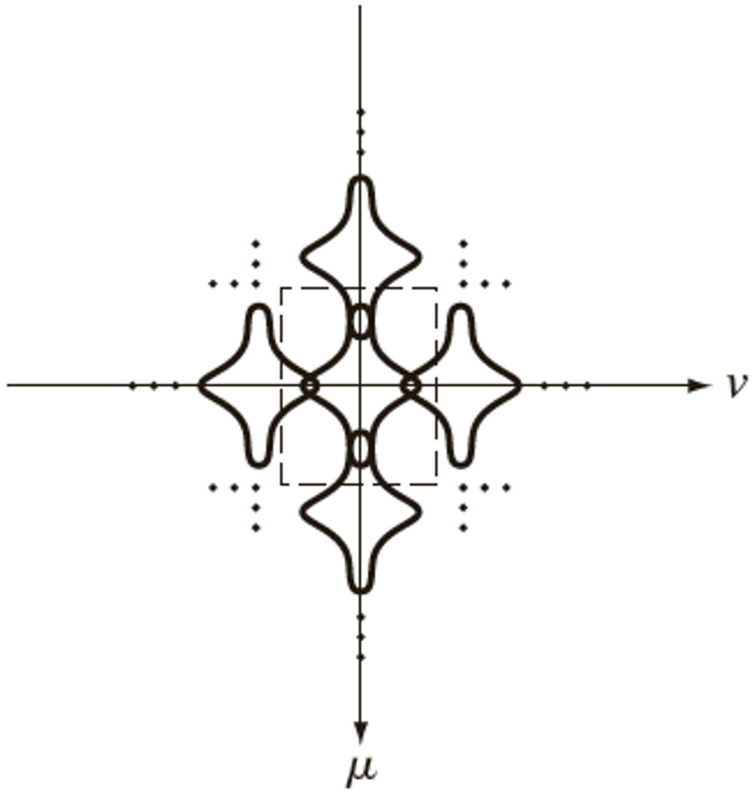




Trem de impulsos 2-D

Aliasing 2-D


Footprint of an ideal lowpass (box) filter
μ_{max}
ν_{max}
ν
μ

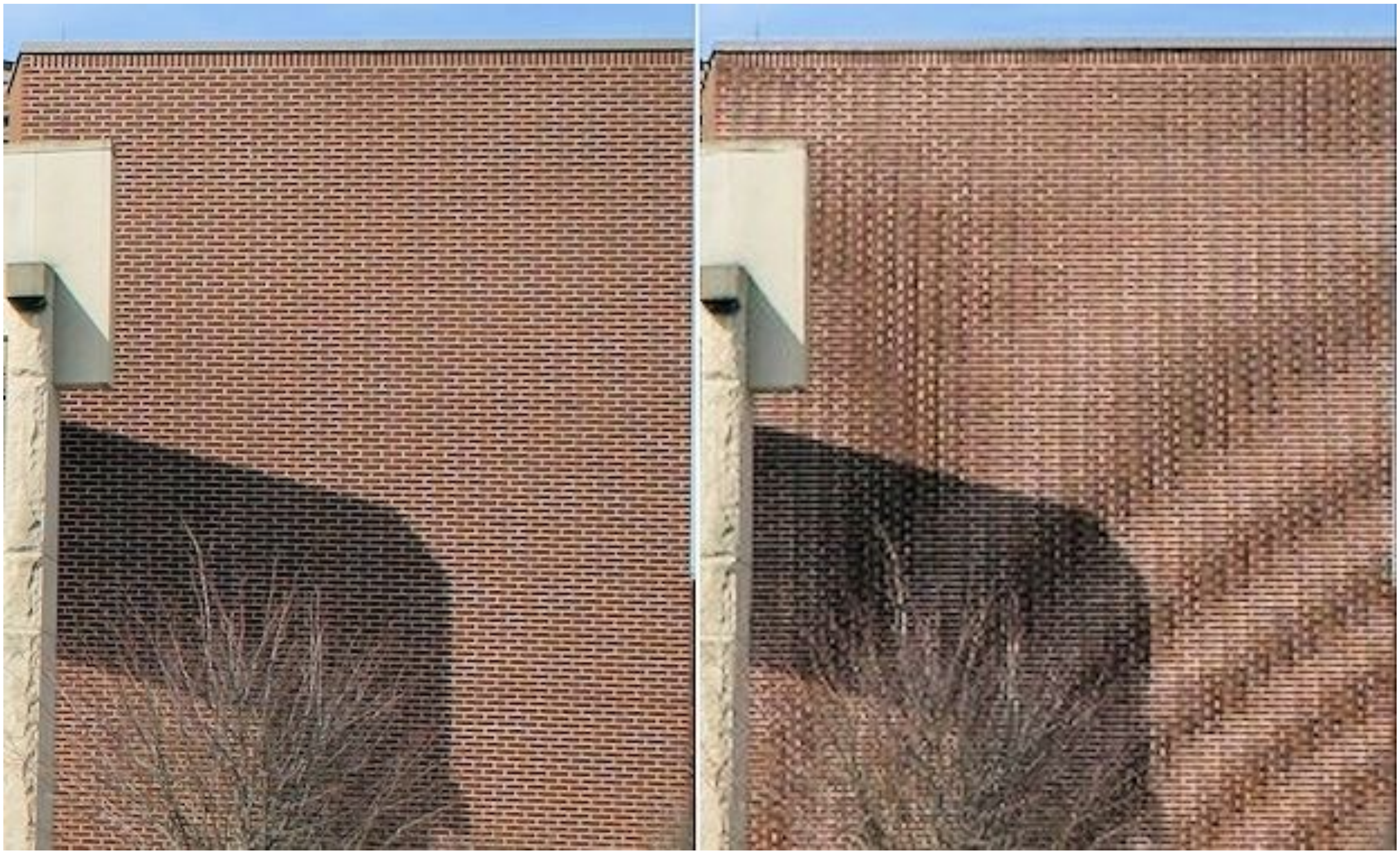

ν
μ

Aliasing em imagens

O número de pixels da imagem da direita foi reduzida em 50% (menor resolução espacial)

Note as interferências de “falsas” frequências

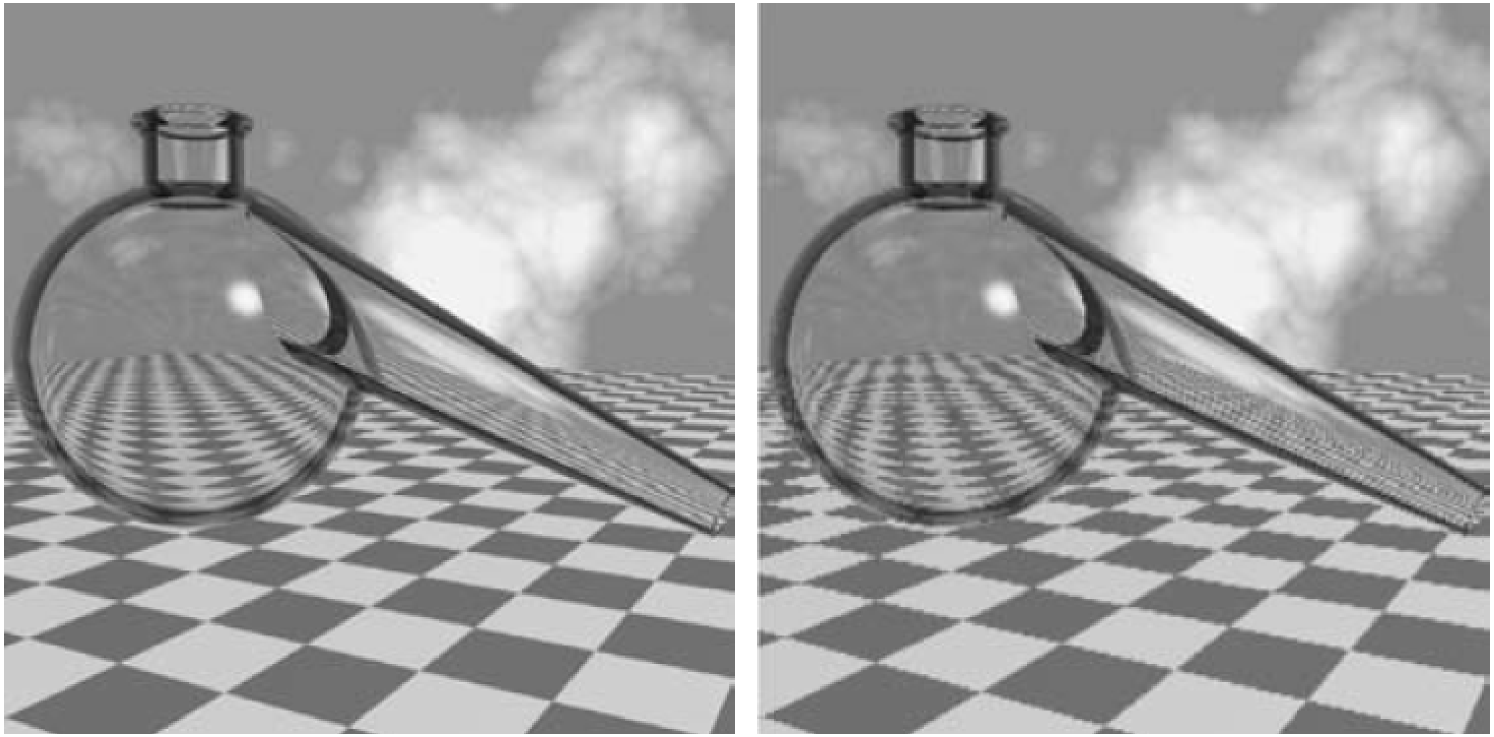
Aliasing em imagens



Aliasing em imagens

Aliasing em imagens

Aliasing em imagens



O número de pixels da imagem da direita foi reduzida em 50% (menor resolução espacial)

Note o efeito de serrilhamento (*jaggies*)

Filtros Anti-Aliasing

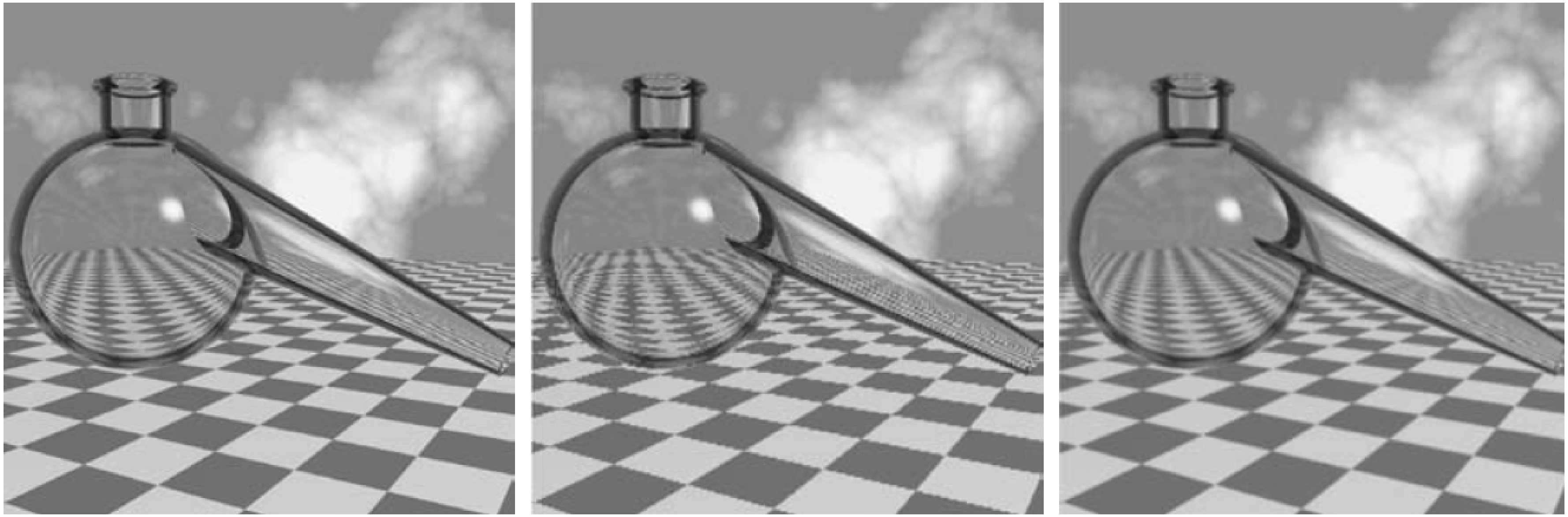
- Sempre ocorrerá *aliasing* em imagens digitais
- Para reduzir o efeito de *aliasing*, geralmente usa-se um filtro de suavização (passa-baixa) antes da digitalização
- Dessa forma, as altas frequências são atenuadas e o efeito de *aliasing* também
- Deve ser feito ANTES da digitalização
- Não existe filtro *anti-aliasing* “real” que elimine o *aliasing* após a digitalização
- O que geralmente é feito é uma filtragem passa baixa e uma re-amostragem da imagem, mas isso não elimina o *aliasing* que já foi gerado na digitalização, apenas suaviza o efeito.
- Existem câmeras fotográficas com filtros *anti-aliasing* reais embutidos (nas lentes os nos sensores)

Filtros Anti-Aliasing

A imagem da direita foi suavizada por um filtro da média 3 x 3 antes da redução do número de pixels.

O efeito de *aliasing* foi reduzido, apesar do borramento

Filtros Anti-Aliasing



A imagem da direita foi suavizada por um filtro da média 5 x 5 antes da redução do número de pixels.

O efeito de *aliasing* foi reduzido, apesar do borramento

Filtros Anti-Aliasing

A Transformada Rápida de Fourier - FFT

O número de multiplicações e adições complexas necessárias para implementar a DFT-1D (Transformada Discreta de Fourier Unidimensional) é proporcional a N^2

$$\boxed{F(u) = \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1} f(x)\exp[-j2\pi ux/N]}$$

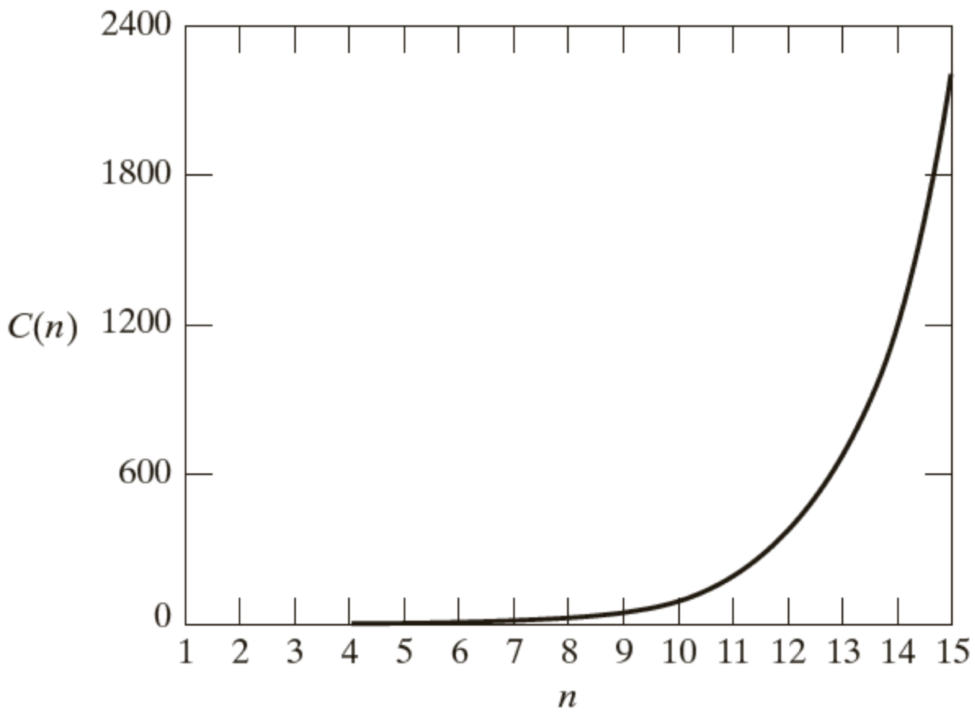
A decomposição adequada desta equação pode tornar o número de multiplicações e adições proporcional a $N\log_2 N$.

Este procedimento é denominado de algoritmo da **Transformada Rápida de Fourier (FFT).**

Vantagem Computacional da FFT

N	**N^2** **(DFT)**	**$N\log_2 N$** **(FFT)**	Vantagem Computacional ($N/\log_2 N$)
2	4	2	2,00
4	16	8	2,00
8	64	24	2,67
16	256	64	4,00
32	1024	160	6,40
64	4096	384	10,67
128	16384	896	18,29
256	65536	2048	32,00
512	262144	4608	56,89
1024	1048576	10240	102,40
2048	4194304	22528	186,18
4096	16777216	49152	341,33
8192	67108864	106496	630,15

Vantagem Computacional da FFT



Se uma máquina gasta 5s para fazer a FFT de um vetor de 8192 pontos, A mesma máquina levará cerca de 600 vezes mais (50 min) para computar a DFT.

FIM