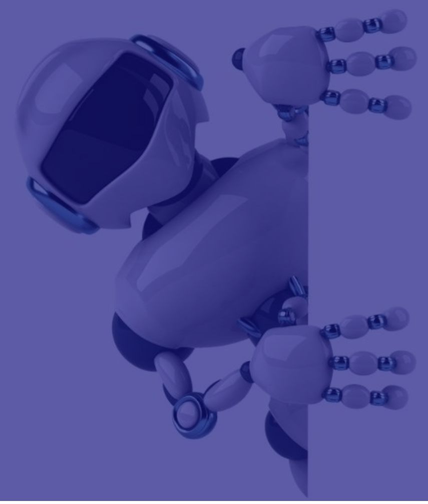


PMR 3302
Sistemas Dinâmicos I

AULA 06

ANÁLISE DE SISTEMAS DE SEGUNDA ORDEM

Ettore Barros eabarros@usp.br
Larissa Driemeier driemeie@usp.br
Arturo Forner- Cordero aforner@usp.br
Rafael Traldi Moura moura.gmsie@usp.br
Rodrigo Lima Stoeterau rodrigo.stoeterau@usp.br

NOSSA AGENDA

#	Data	Tópico
1	27/02	Introdução ao modelamento e uso do software; Introdução à programação em Octave/Matlab
2	01/03	Conceitos Básicos de Funções de Variáveis Complexas Resolução de Equações Diferenciais – Sistemas Lineares e Não Lineares
3	03/03	Transformada de Laplace e Funções de Transferência
4	06/03	Representação de sistemas dinâmicos por diagrama de blocos. Diagrama de Blocos: manipulação e aplicações.
5	07/03	Análise de Sistemas de Primeira Ordem
6	09/03	Análise de Sistemas de Segunda Ordem

PORQUE ESTAMOS AQUI?

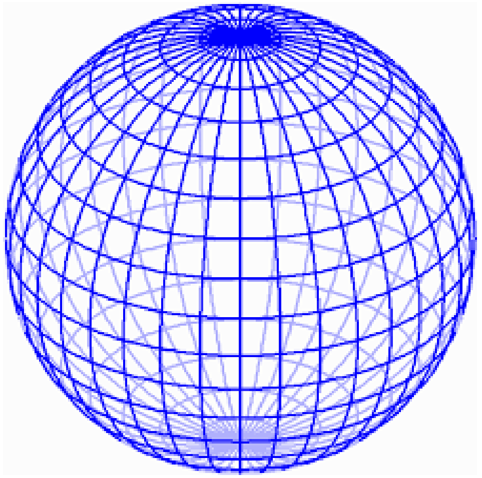
- Desejamos conhecer o comportamento do que nos cerca, como estruturas, circuitos elétricos, sistemas térmicos, etc. ;
- O mundo real é não linear, dinâmico, heterogêneo, com vazios (discordâncias), circuitos eletrônicos com componentes com 10% de erro, etc...
- Como Engenheiros, nós vamos aproximar. Então para conhecer o comportamento iremos:

1. Utilizar modelos simplificados, que sabemos (em teoria) descobrir a solução;
2. Identificar o comportamento do sistema utilizando estes modelos e suas respostas a diferentes entradas, como impulso, degrau, senoides, etc...

SISTEMAS DINÂMICOS - MODELAGEM

- Criar um modelo é uma arte.
- Apesar do que você já ouviu, não podemos modelar um cavalo...

...por uma esfera;

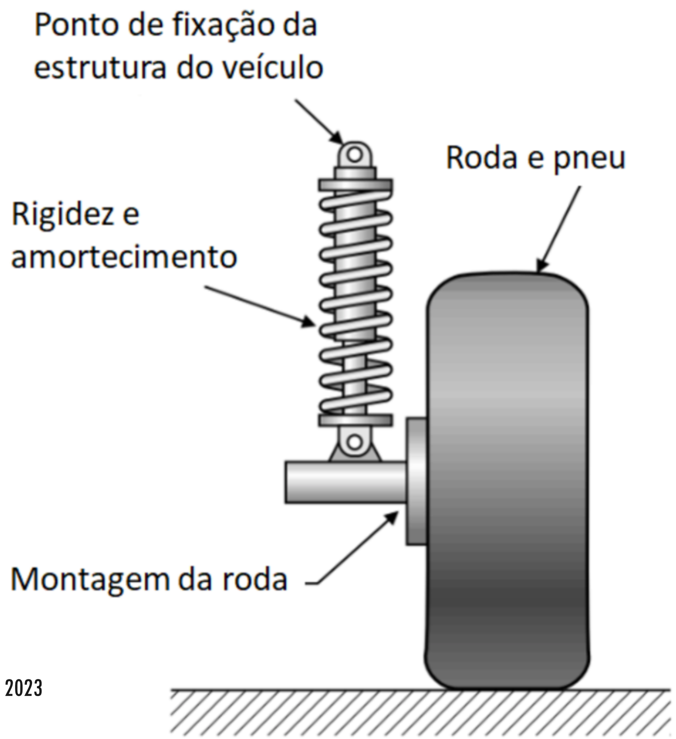


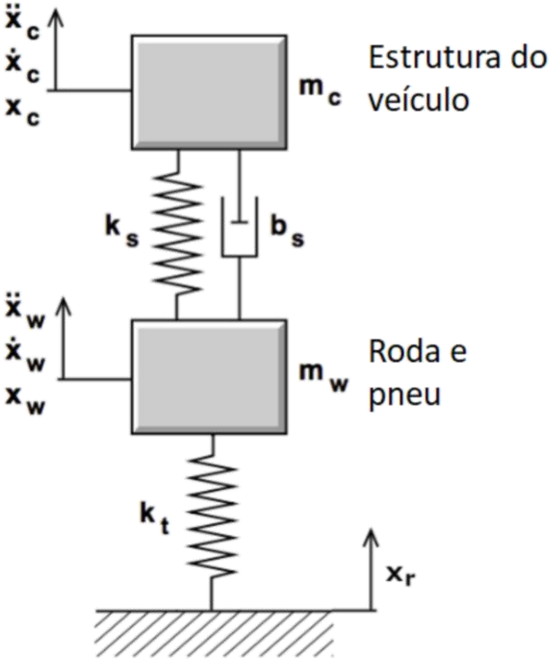
MODELAGEM

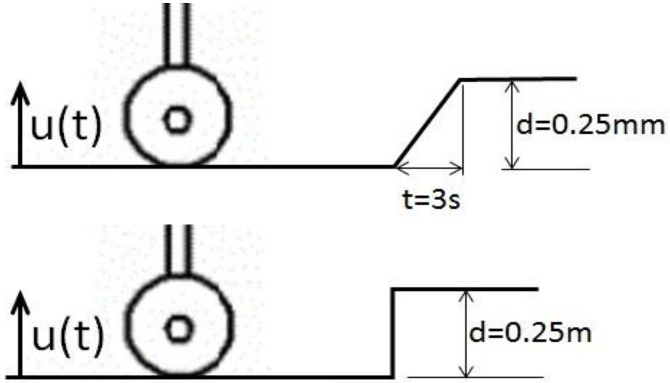
- Mas podemos modelar o trêm de pouso de um avião...

... por um sistema massa mola.

- E podemos modelar também os disturbios do asfalto.







SISTEMAS DINÂMICOS

Sistema: Conjunto de componentes interconectados, que apresentam certas relações de causa e efeito e que atuam como um todo, com um determinado objetivo.

Sistemas que não são estáticos, ou seja, seu estado evolui com respeito ao tempo.

Um sistema dinâmico é um sistema que muda:

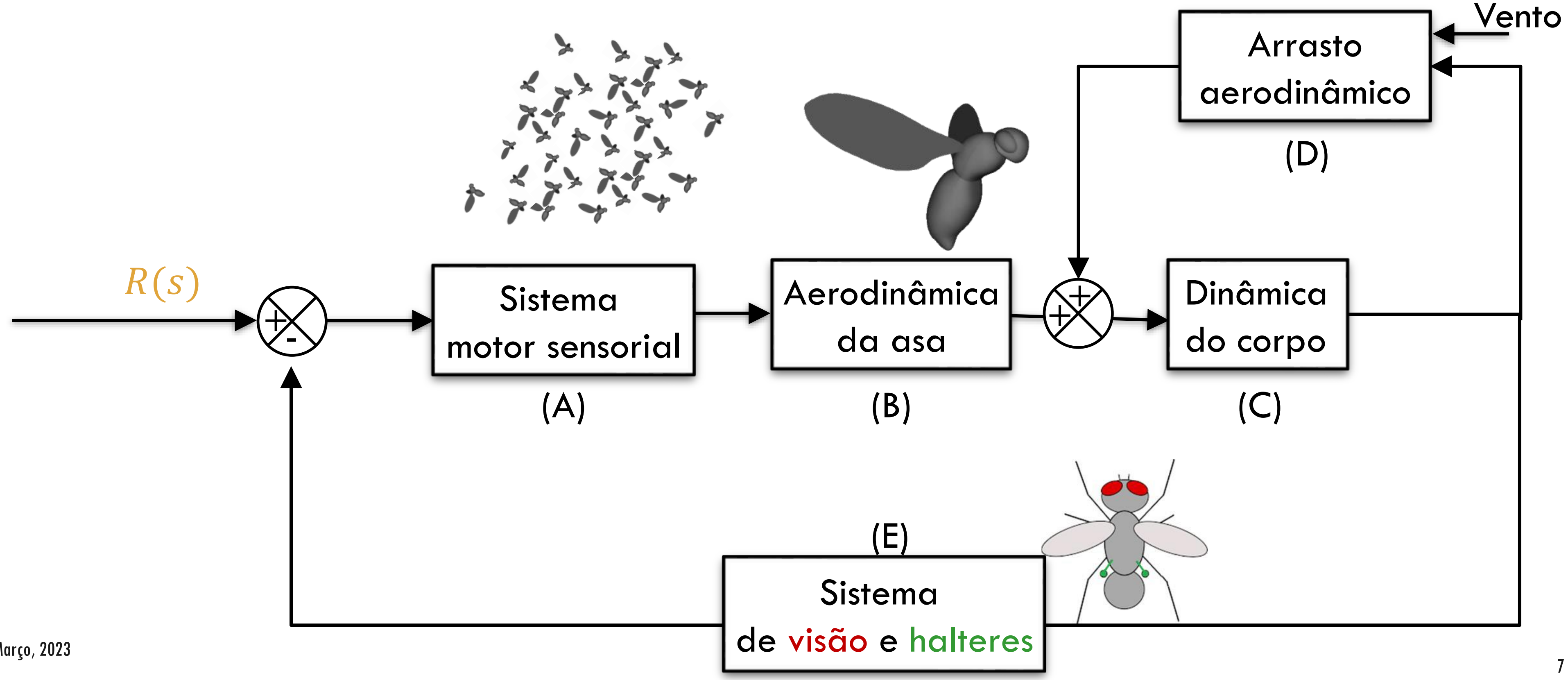
- sua trajetória → mudanças na aceleração, orientação, velocidade, posição;
- sua temperatura, pressão, volume, massa, etc.
- sua corrente, tensão, frequência, etc.

SISTEMAS DINÂMICOS – DIAGRAMA DE BLOCOS

Como alguns sistemas são muito complexos, é melhor atacar o sistemas por partes.

Ou seja, fazemos os modelos de pequenas partes do sistema e achamos o modelo final através de **DIAGRAMAS DE BLOCOS !!!!**

(A) Controle
(B) Atuador
(C) Planta
(D) Perturbação/Ambiente
(E) Sensor



SISTEMAS DINÂMICOS

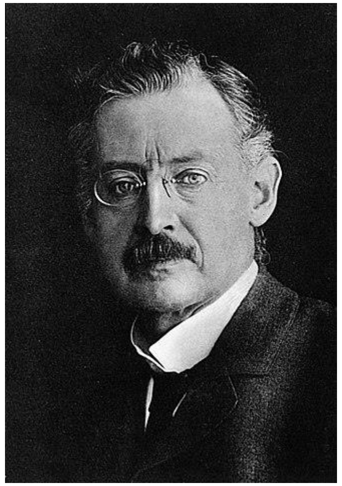
Os sistemas dinâmicos são descritos por equações diferenciais.

Um sistema, e suas respectivas equações diferenciais, pode ser representado por **Espaço de estados**!!!

Podemos resolver/analisar esses sistemas de equações diferenciais através de:

1. Transformadas de LaPlace;
2. Transformadas de Fourier;
3. Métodos numéricos:
    - Função `lsim` do octave;
    - Função `ode45` do octave (usa Runge-Kutta);
    - Elementos finitos, volumes finitos, etc.

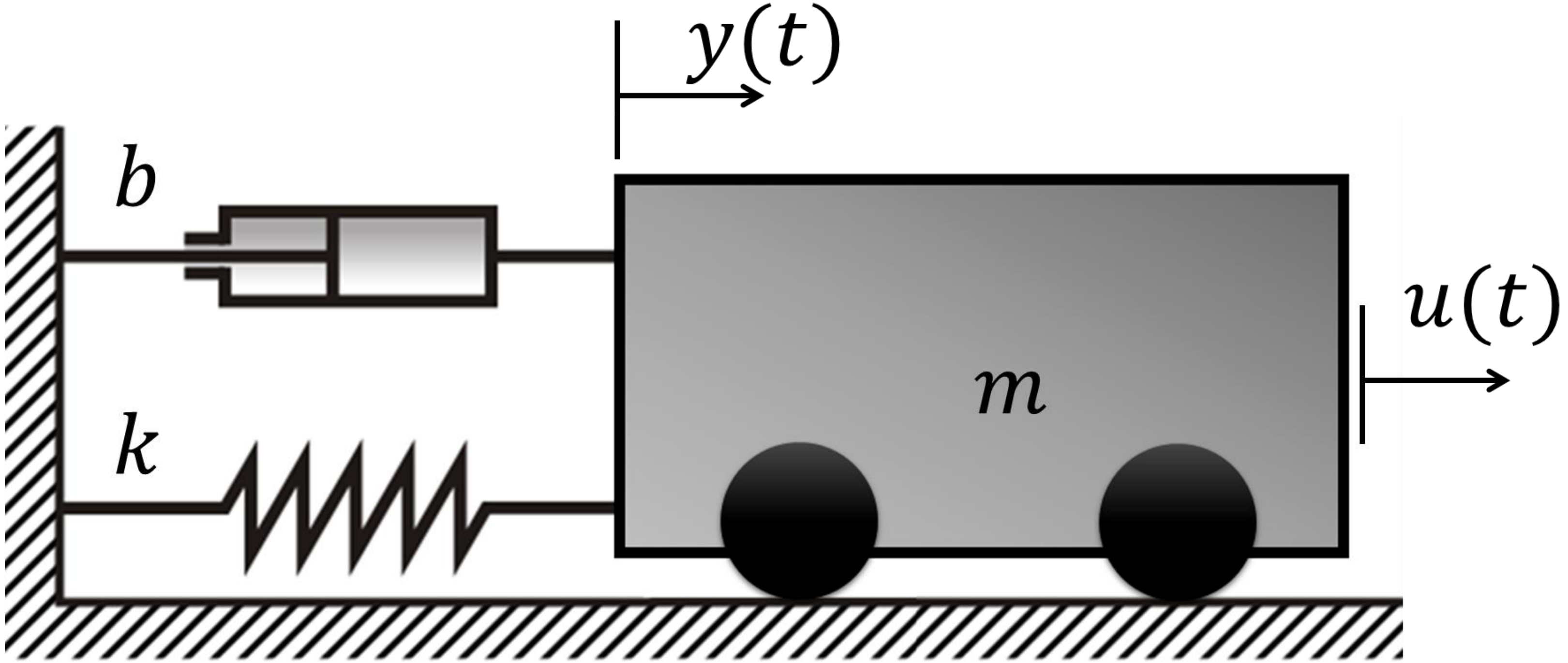
C. Runge



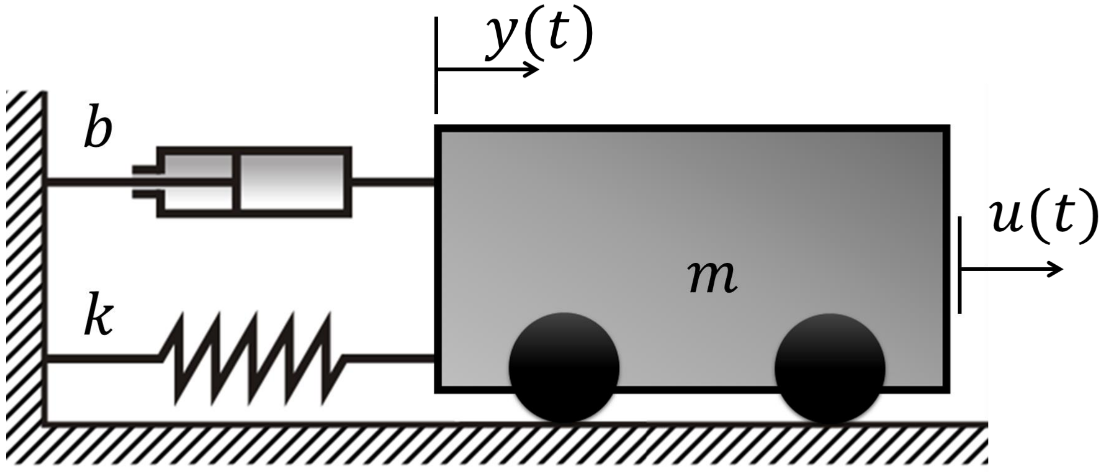
M. W. Kutta

SISTEMA DE 2ª ORDEM

- Para facilitar nossa análise, vamos pensar em um sistema que temos intuição (ou deveríamos ter) de seu funcionamento.
- Todos vocês, em teoria, passaram na FUVEST. Que sempre tem uma questão sobre mola.
- Mas como estamos na Poli, vamos complicar adicionando uma massa e um amortecedor!



SISTEMA DE 2ª ORDEM



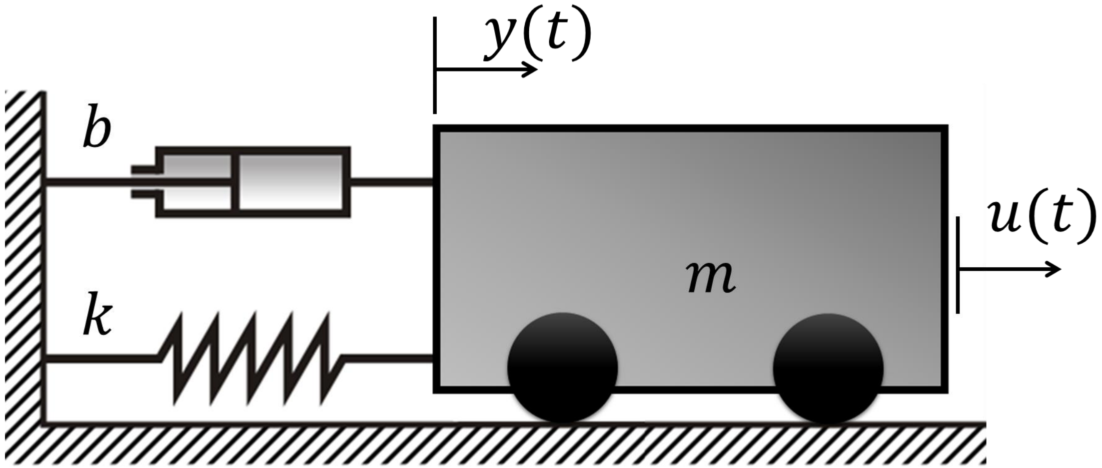
$$\Sigma F = ma = m\ddot{y}(t)$$

- Para descobrir o sinal da **força da mola**, podemos fazer o seguinte raciocínio:

Um incremento em $y(t)$ irá estender a mola, gerando uma força para a esquerda. Como $y(t)$ é positivo para a direita, a força da mola é dada por:

$$-\boldsymbol{ky(t)}$$

SISTEMA DE 2ª ORDEM



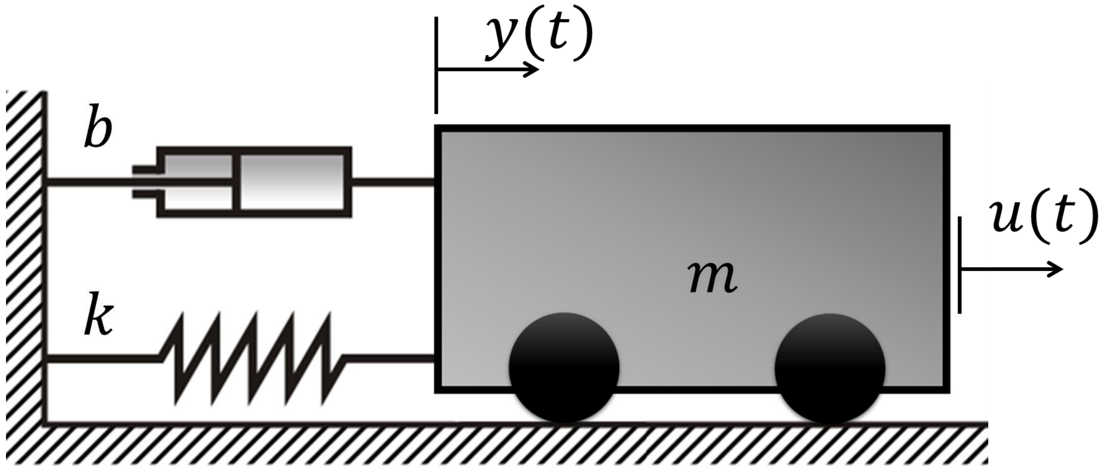
$$\Sigma F = ma = m\ddot{y}(t)$$

- Para descobrir o sinal da **força da amortecedor**, podemos fazer o seguinte raciocínio:

Um incremento em $y(t)$ irá resultar em uma velocidade $\dot{y}(t)$ para a direita. A força do amortecedor irá sempre se opor ao movimento, ou seja, para a esquerda nesse caso. Como $y(t)$ é positivo para a direita, a força do amortecedor é dada por:

$$-b\dot{y}(t)$$

SISTEMA DE 2ª ORDEM

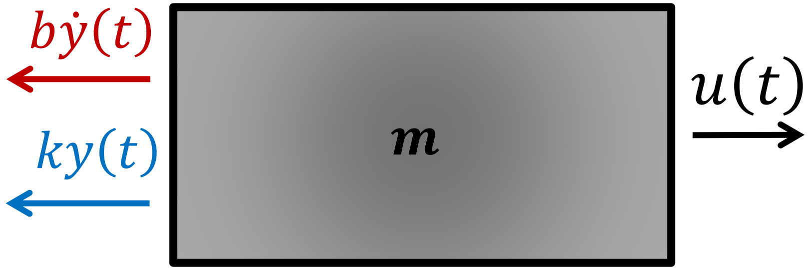


$$\Sigma F = ma = m\ddot{y}(t)$$

- Como a **Força Externa $\boldsymbol{u(t)}$** está no mesmo sentido de $y(t)$, a mesma tem sinal positivo.
- Desta forma, podemos escrever:

$$u(t) - b\dot{y}(t) - ky(t) = m\ddot{y}(t)$$

$$\boxed{m\ddot{y}(t) + b\dot{y}(t) + ky(t) = u(t)}$$



ESPAÇO DE ESTADOS

Define-se como estado $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$, o menor conjunto de variáveis que determinam completamente o comportamento do sistema para qualquer instante t.

As variáveis de entrada $u_1(t), u_2(t), \ldots, u_m(t)$ são geradas por agentes externos (fontes) que alteram as condições de energia do sistema.

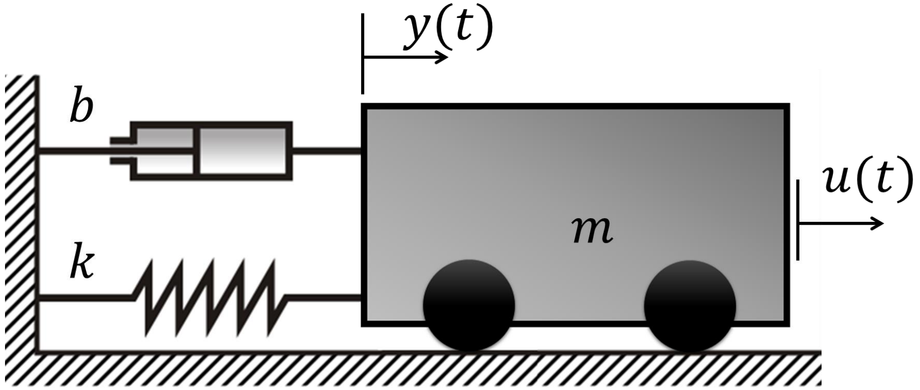
As variáveis de saída $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_p(t)$ são medidas por sensores instalados no sistema, são as variáveis controladas.

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \qquad \text{equação dos estados}$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \qquad \text{equação de saída}$$

SISTEMA DE 2ª ORDEM

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$
$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$$



$$\boxed{m\ddot{y}(t) + b\dot{y}(t) + ky(t) = u(t)}$$

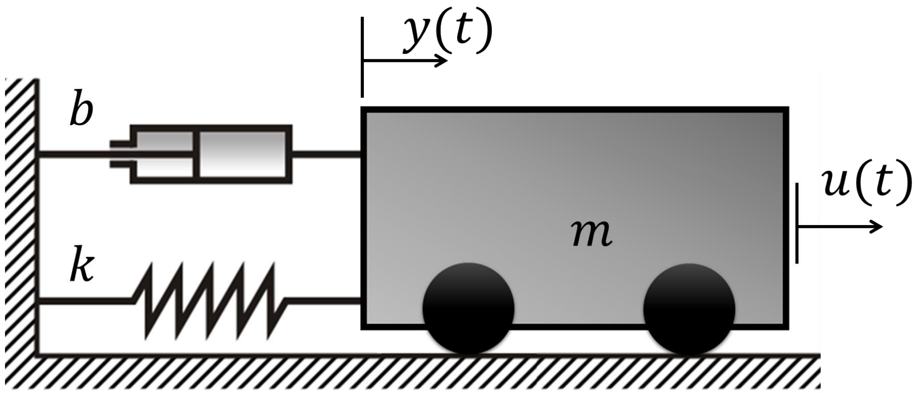
$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix}$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{bmatrix} \qquad \ddot{y}(t) = \frac{1}{m}u(t) - \frac{b}{m}\dot{y}(t) - \frac{k}{m}y(t)$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ (1/m)u(t) - (b/m)\dot{y}(t) - (k/m)y(t) \end{bmatrix}$$

SISTEMA DE 2ª ORDEM

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$
$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$$



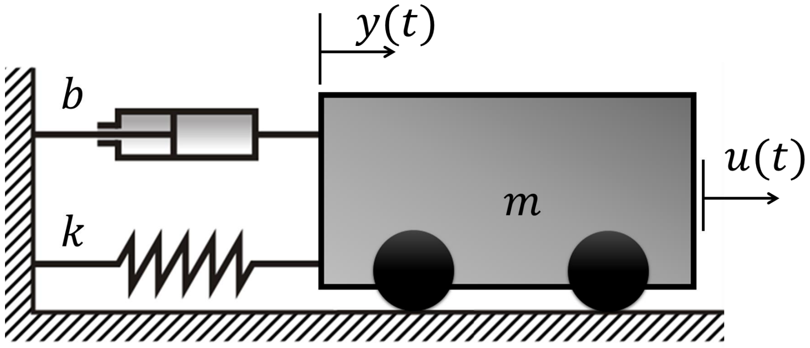
$$\boxed{m\ddot{y}(t) + b\dot{y}(t) + ky(t) = u(t)}$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ (1/m)u(t) - (b/m)\dot{y}(t) - (k/m)y(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(k/m) & -(b/m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ (1/m) \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + [0]u(t)$$

NO OCTAVE



Existe uma classe própria no OCTAVE para sistema lineares descritos na forma do espaço de estado criada pela função `ss` (que representa, em inglês, *state space*) e definida pelas matrizes A, B, C e D.

Vamos pensa em um caso com amortecimento baixo (`b=0,01`), massa de 1kg, mola de 1N/m, sem força externa.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(k/m) & -(b/m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ (1/m) \end{bmatrix} u(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -0{,}01 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + [0]u(t)$$

```
>> A = [0 1; -1 -0.01];
>> B = [0; 1];
>> C = [1 0];
>> D = [0];
>> sys = ss(A,B,C,D);
```

RESPOSTA AO IMPULSO

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases}$$

```
» impulse(sys);
```

simular a resposta a um impulso unitário

```
» impulse(sys,10);
```

valor em segundos para o tempo final de simulação

```
» [y t] = impulse(sys,10);
```

armazenar os vetores do tempo de simulação (criado automaticamente pelo OCTAVE) e da resposta do sistema

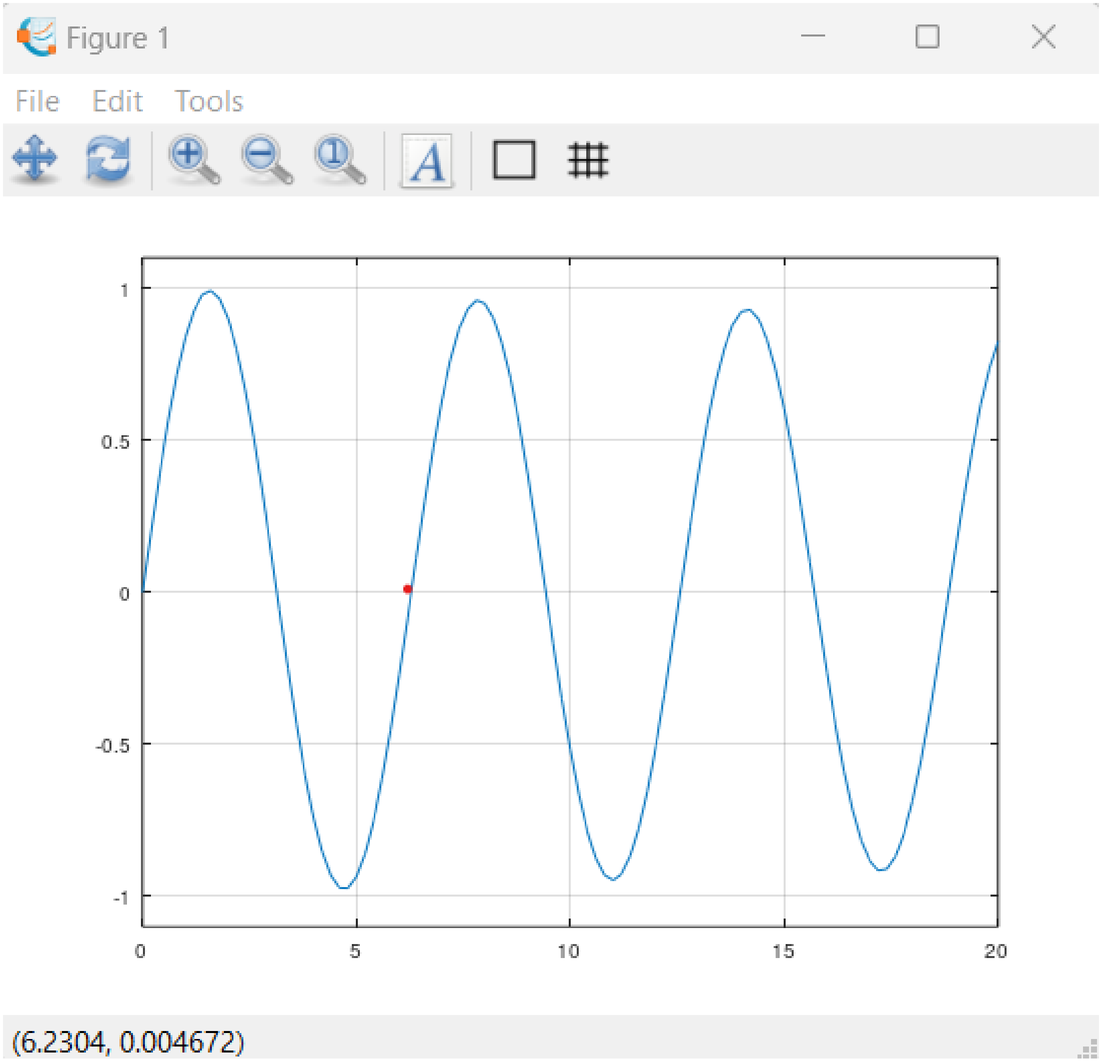
https://octave.sourceforge.io/control/function/impulse.html

RESPOSTA AO IMPULSO

Para o sistema anterior, qual a resposta ao impulso por 20 seg?

Com o mouse na figura, descubra o valor do período.

```
clear all;close all;clc;
pkg load control
m = 1;
k = 1;
b = 0.01;
t_max = 20;
A = [0 1; -k/m -b/m];
B = [0; 1/m];
C = [1 0];
D = [0];
sys = ss(A,B,C,D);
[y t]=impulse(sys,t_max);
figure
plot(t,y)
grid on
axis([0 t_max -1.1 1.1])
```



Calcule a frequência e o período por

$$2\pi f = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$f = 0.159hz$$

$$T = \frac{1}{f}$$

$$T = 6.28s$$

RESPOSTA AO IMPULSO – PARA FAZER AGORA

Ainda para o sistema anterior, verifique a resposta para os seguintes valores de b: 0.1 , 0.5 , 1 , 2, 5, 10, 100.

Verifique no gráfico os períodos nestes casos.

O que aconteceu com a vibração?

O que aconteceu com os períodos?

RESPOSTA AO DEGRAU

A simulação da resposta a uma entrada em degrau unitário é feita pela função `step`,

```
» step(sys);
```

simular a resposta a um degrau unitário

```
» [y t] = step(sys,10);
```

valor em segundos para o tempo final de simulação

```
» t = 0:0.01:15;
  step(sys,t);
```

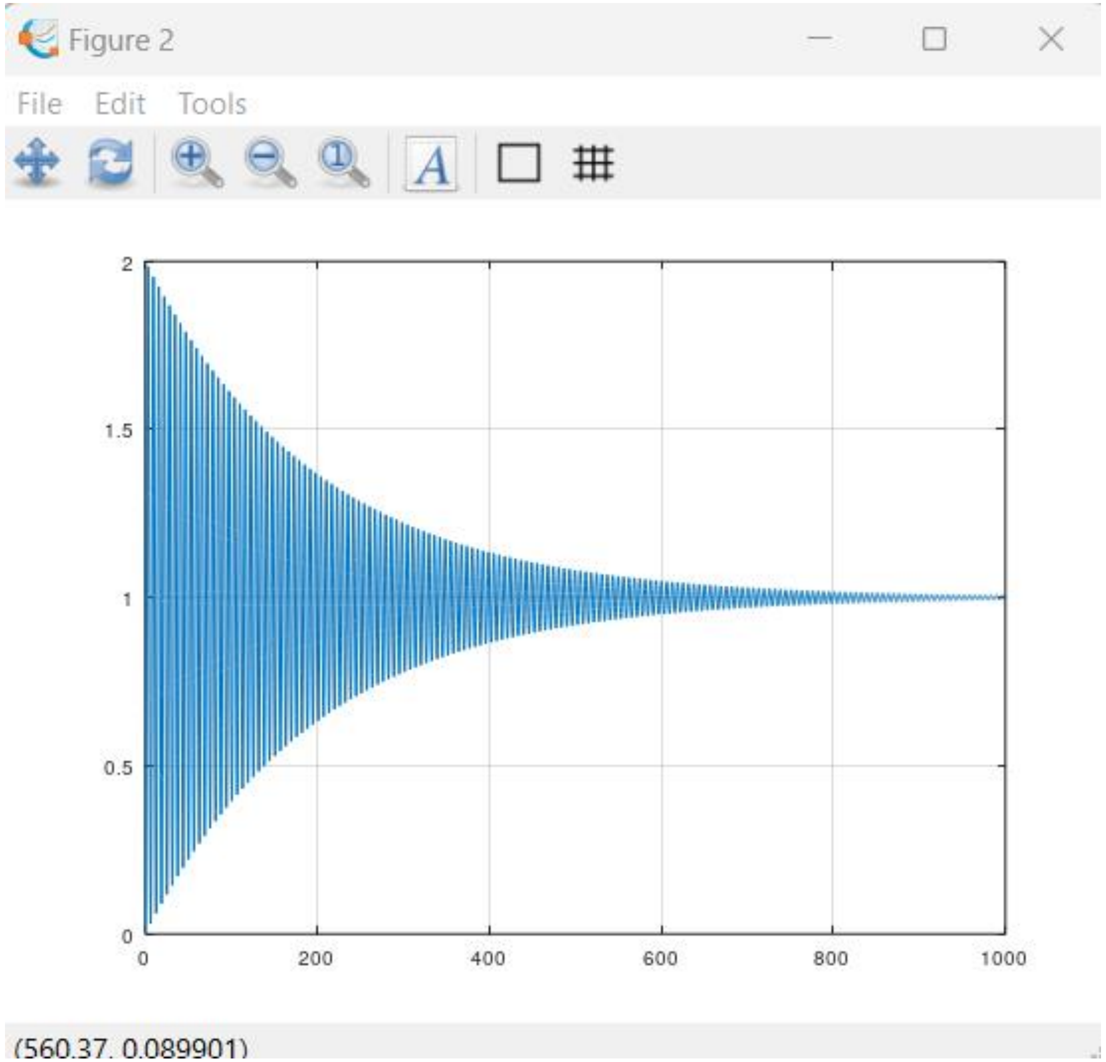
armazenar os vetores do tempo de simulação (criado automaticamente pelo OCTAVE) e da resposta do sistema

https://octave.sourceforge.io/control/function/step.html

RESPOSTA AO DEGRAU

Para o sistema anterior, qual a resposta ao degrau por 20 seg?
Aumento o tempo para ver o sistema estabilizar. Qual o valor de $y(t)$ após a estabilização?

```
clear all;close all;clc;
pkg load control
m = 1;
k = 1;
b = 0.01;
t_max = 20;
A = [0 1; -k/m -b/m];
B = [0; 1/m];
C = [1 0];
D = [0];
sys = ss(A,B,C,D);
[y t]=step(sys,t_max);
figure
plot(t,y)
grid on
axis([0 t_max 0 2])
```



Calcule a frequência e o período por

$$F = ky$$

$$y = \frac{k}{F}$$

$$y = \frac{1}{1} = 1m$$

RESPOSTA AO DEGRAU – PARA FAZER AGORA

Verifique o comportamento do sistema para, pelo menos, 3 valores diferentes de k, validando a resposta em regime permanente por $y = \frac{k}{F}$.

Ainda para o sistema anterior, também verifique a resposta para os seguintes valores de b: 0.1 , 0.5 , 1 , 2, 5, 10, 100.

Em $t = 200\ s$, o sistema atingiu o valor de regime permanente em todos os casos? Porque?

RESPOSTA A UMA ENTRADA SENOIDAL

Utilizando a função `lsim` podemos obter a resposta do sistema para qualquer entrada genérica.

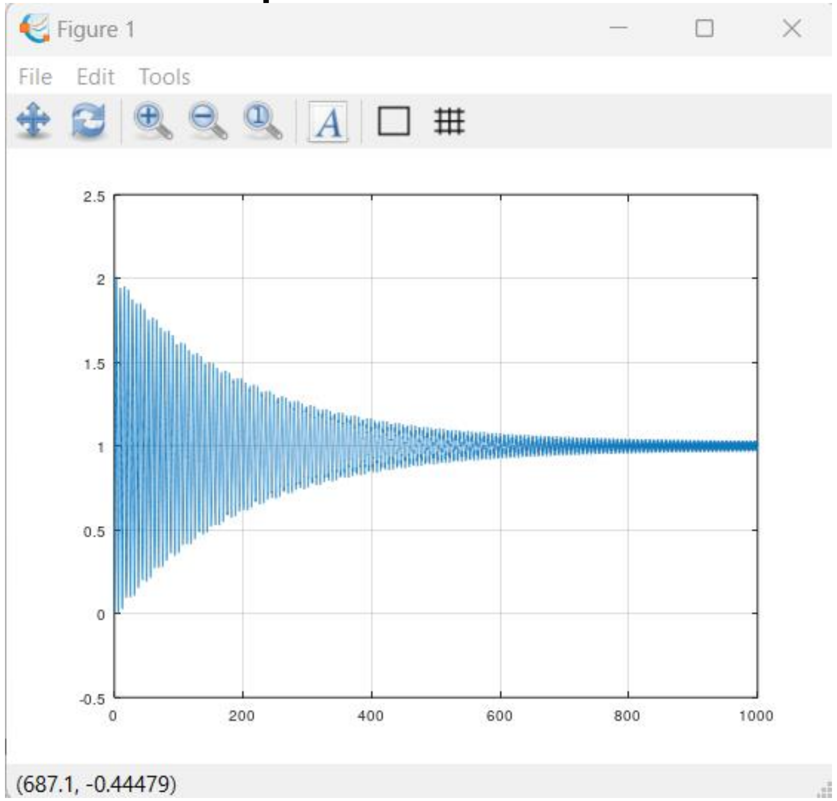
```
Frequencia_da_forca_Hz = 1;
t = 0:0.01:t_max;
u = sin(2*pi*Frequencia_da_forca_Hz*t)+1;
x0 = [0 0];
[y]=lsim(sys,u,t,x0);
```

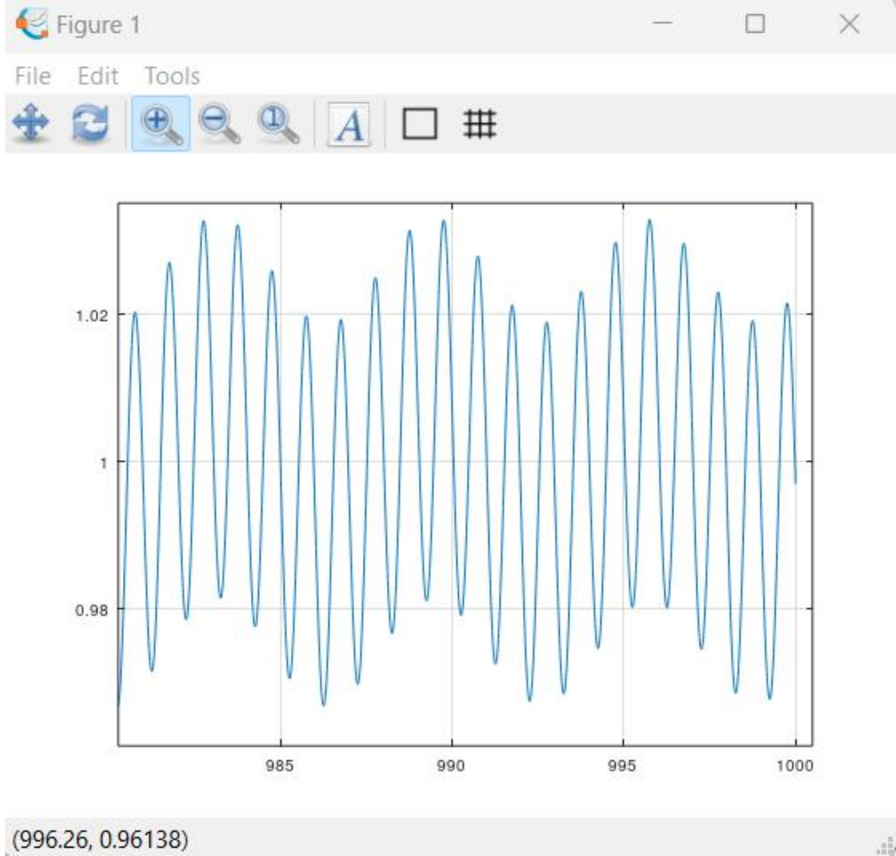

https://octave.sourceforge.io/control/function/step.html

RESPOSTA AO DEGRAU

Para o sistema anterior, qual a resposta a um seno de 1Hz + degrau por 1000 seg? Analise a resposta entre os instantes 980s e 1000s . Quais as frequências dos dois senos sobrepostos?

```
clear all;close all;clc;
pkg load control
pkg load control
m = 1;
k = 1;
b = 0.01;
t_max = 1000;
Frequencia_da_forca_Hz = 1;
A = [0 1; -k/m -b/m];
B = [0; 1/m];
C = [1 0];
D = [0];
sys = ss(A,B,C,D);
t = 0:0.01:t_max;
u = sin(2*pi*Frequencia_da_forca_Hz*t)+1;
x0 = [0 0];
[y]=lsim(sys,u,t,x0);
figure
plot(t,y)
grid on
```





RESPOSTA AO DEGRAU – PARA FAZER AGORA

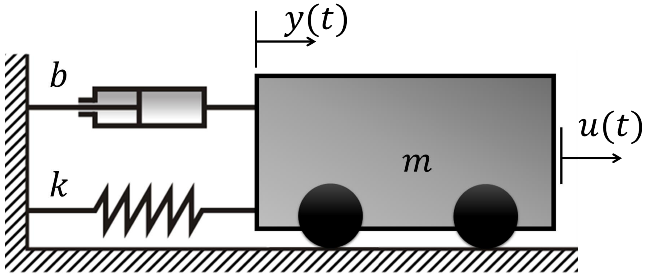
Verifique o comportamento do sistema para os seguintes valores de frequência de força: 100Hz , 50Hz, 10Hz, 1Hz, 0.2Hz, 0.17Hz e 0.159154943091895 Hz.
O que está acontecendo com a resposta do sistema nestes casos? Porque?

SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS NÃO LINEARES

Existem diversas funções, chamadas solucionadores, do inglês *solvers*, que utilizam o método Runge-Kutta em passo variável para resolver equações diferenciais numericamente. Os dois solucionadores mais utilizados são a `ode45` e a `ode15s`. A função básica, e que deve ser sempre testada primeiro, é a `ode45`, que utiliza combinação dos métodos de Runge-Kutta de quarta e quinta ordem. Se a solução da equação com esse solucionador apresentar problema de convergência ou erro, então utilize a função `ode15s`.

ODE45

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x_1}\,(t) \\ \dot{x_2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ (1/m)u(t) - (b/m)\dot{y}(t) - (k/m)y(t) \end{bmatrix}$$

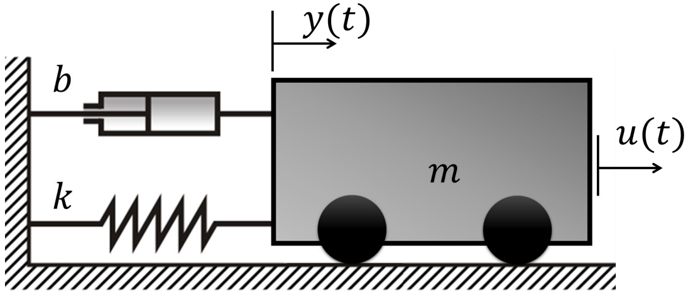



```
pkg load control
m = 1;
k = 1;
b = 0.01;
t_max = 1000;
Frequencia_da_forca_Hz = 1;
y0 = [0 0];
dy_dt = @(t,y) [y(2);
   -(b/m)*y(2)-(k/m)*y(1)+(1/m)*(sin(2*pi*Frequencia_da_forca_Hz*t)+1)];

[t,y]=ode45(dy_dt,[0 t_max],y0);
figure
plot(t,y(:,1))
grid on
```

REARRANJANDO

$$m\ddot{y}(t) + b\dot{y}(t) + ky(t) = u(t)$$



$$\ddot{y}(t) + \frac{b}{m}\dot{y}(t) + \frac{k}{m}y(t) = \frac{1}{m}u(t)$$

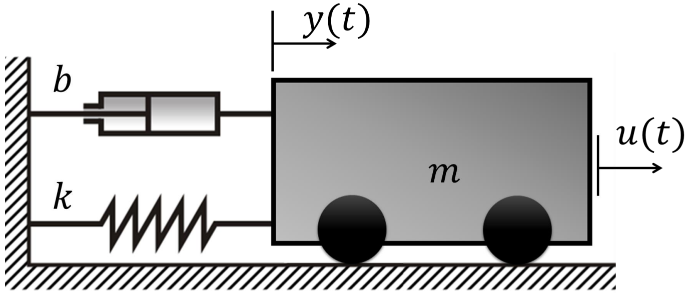
$$w_n^2 = \frac{k}{m}$$

$$2\zeta w_n = \frac{b}{m}$$

$$K = \frac{1}{k} \Rightarrow K w_n^2 = \frac{1}{k}\frac{k}{m} = \frac{1}{m}$$

$$\boxed{\ddot{y}(t) + 2\zeta w_n \dot{y}(t) + w_n^2 y(t) = K w_n^2 u(t)}$$

FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA



$$\boxed{\ddot{y}(t) + 2\zeta w_n \dot{y}(t) + w_n{}^2 y(t) = K w_n{}^2 u(t)}$$

$$s^2Y(s) + 2\zeta\omega_n sY(s) + \omega_n^2 Y(s) = K\omega_n^2 U(s)$$

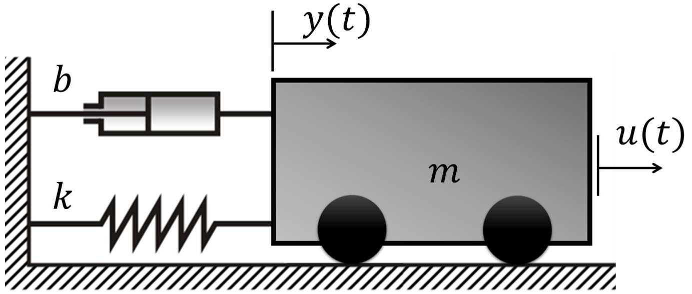
$$(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)Y(s) = K\omega_n^2 U(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n\, s + \omega_n^2}$$

Diagrama de blocos

$$\xrightarrow{U(s)} \boxed{\frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n\, s + \omega_n^2}} \xrightarrow{Y(s)}$$

RESPOSTA NO TEMPO



$$\boxed{\ddot{y}(t) + 2\zeta w_n \dot{y}(t) + w_n{}^2 y(t) = K w_n{}^2 u(t)}$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n\, s + \omega_n^2}$$

$$\boldsymbol{U(s)} \longrightarrow \boxed{\frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n\, s + \omega_n^2}} \longrightarrow \boldsymbol{Y(s)}$$

Equação característica:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n\, s + \omega_n^2 = 0$$

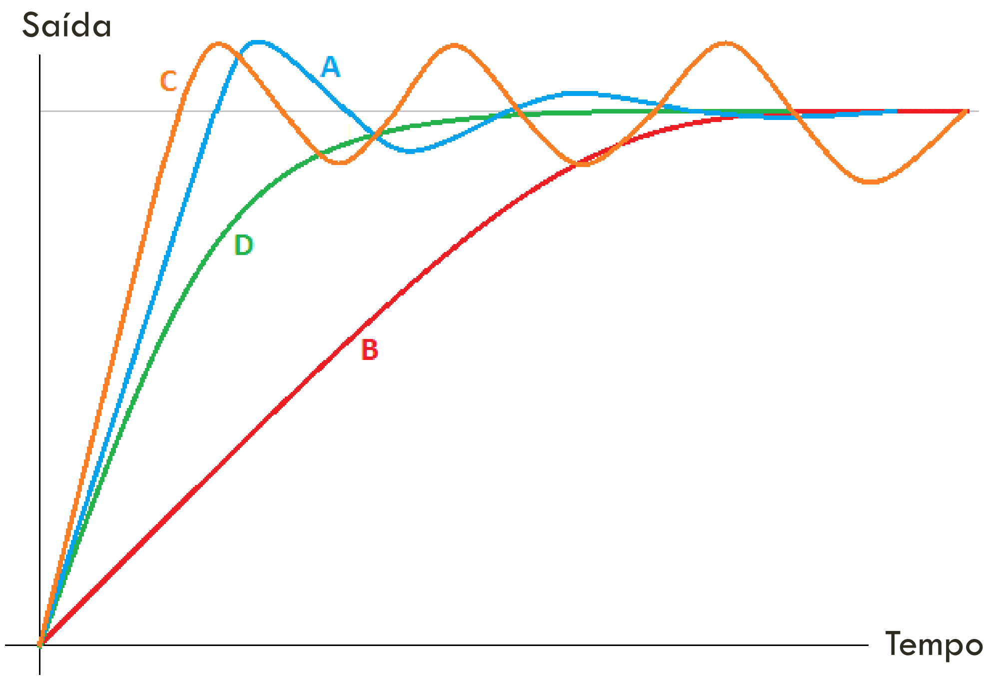
$$\Delta = 4\zeta^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2$$

$$\Delta = 4\omega_n^2(\zeta^2 - 1)$$

$\Delta > 0 \rightarrow \zeta^2 - 1 > 0 \rightarrow \zeta^2 > 1 \rightarrow \zeta > 1$ Sobreamortecido

$\Delta = 0 \rightarrow \zeta^2 - 1 = 0 \rightarrow \zeta^2 = 1 \rightarrow \zeta = 1$ Amortecido crítico

$\Delta < 0 \rightarrow \zeta^2 - 1 < 0 \rightarrow \zeta^2 < 1 \rightarrow \zeta < 1$ Subamortecido



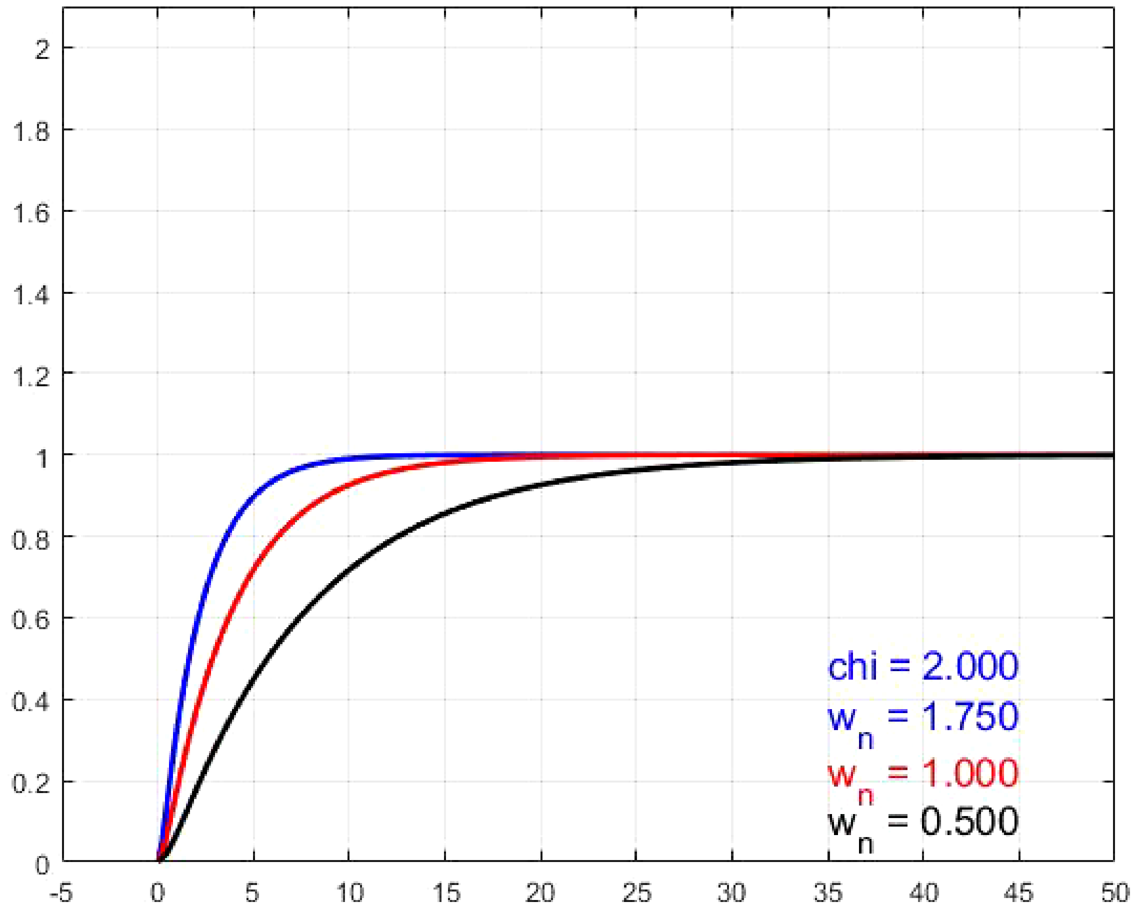
VENDO GRAFICAMENTE E COM MOVIMENTO!!!

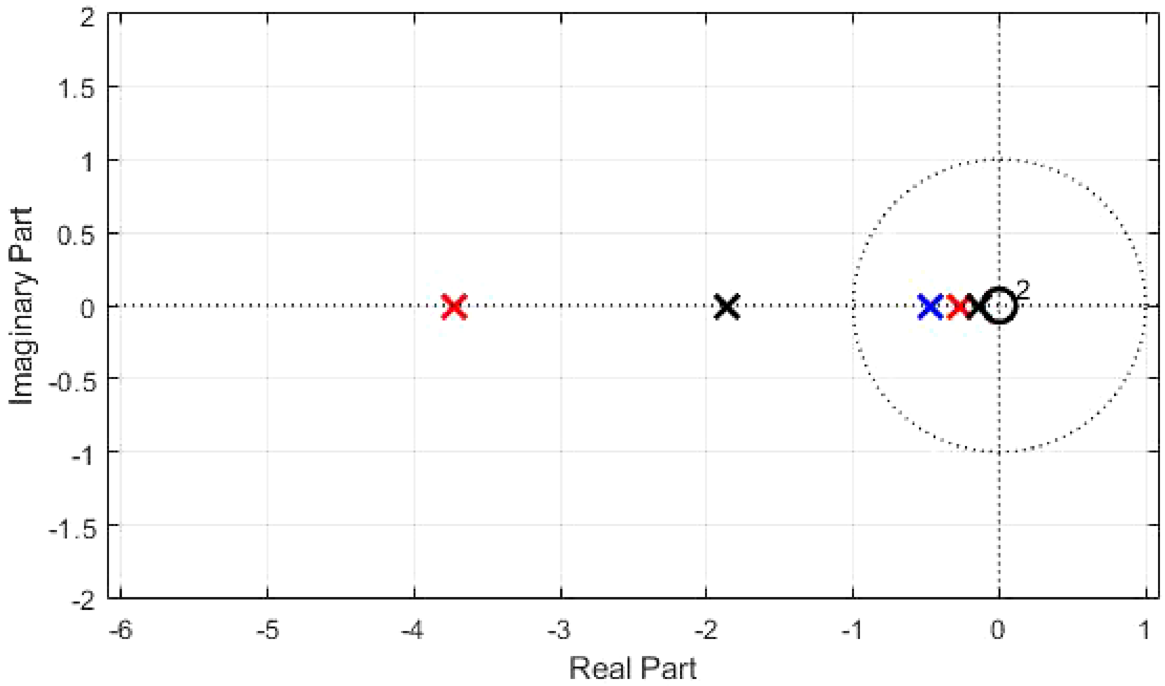
$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n\, s + \omega_n^2}$$

$$\Delta = 4\omega_n^2(\zeta^2 - 1)$$

$$-\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$$-\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} = \sigma \pm j\omega_d$$





RESPOSTA SUPERAMORTECIDA

Polos reais distintos. Sistema estável e superamortecido.

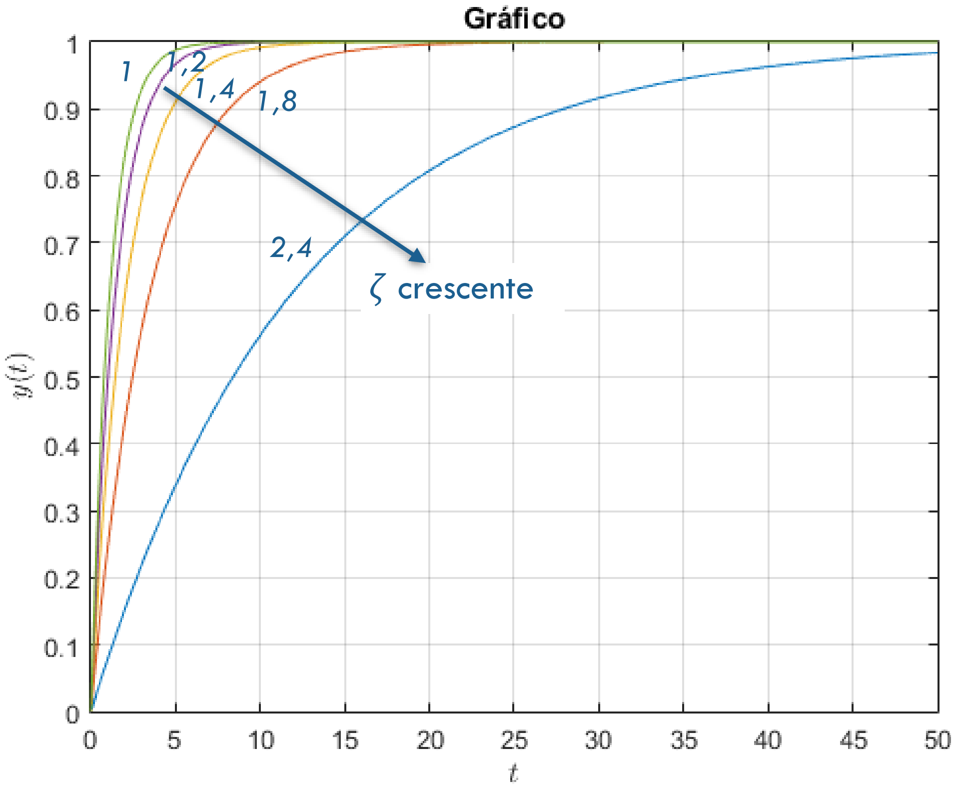
$$y(t) = KA\left[1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}}\left(\frac{e^{-s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{-s_2 t}}{s_2}\right)\right]$$

$$s_1 = \left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n$$

$$s_2 = \left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n$$

$$y_{ss} = K$$

observe que a resposta é não-oscilatória e sem overshoot, e se torna mais lenta à medida que ζ aumenta



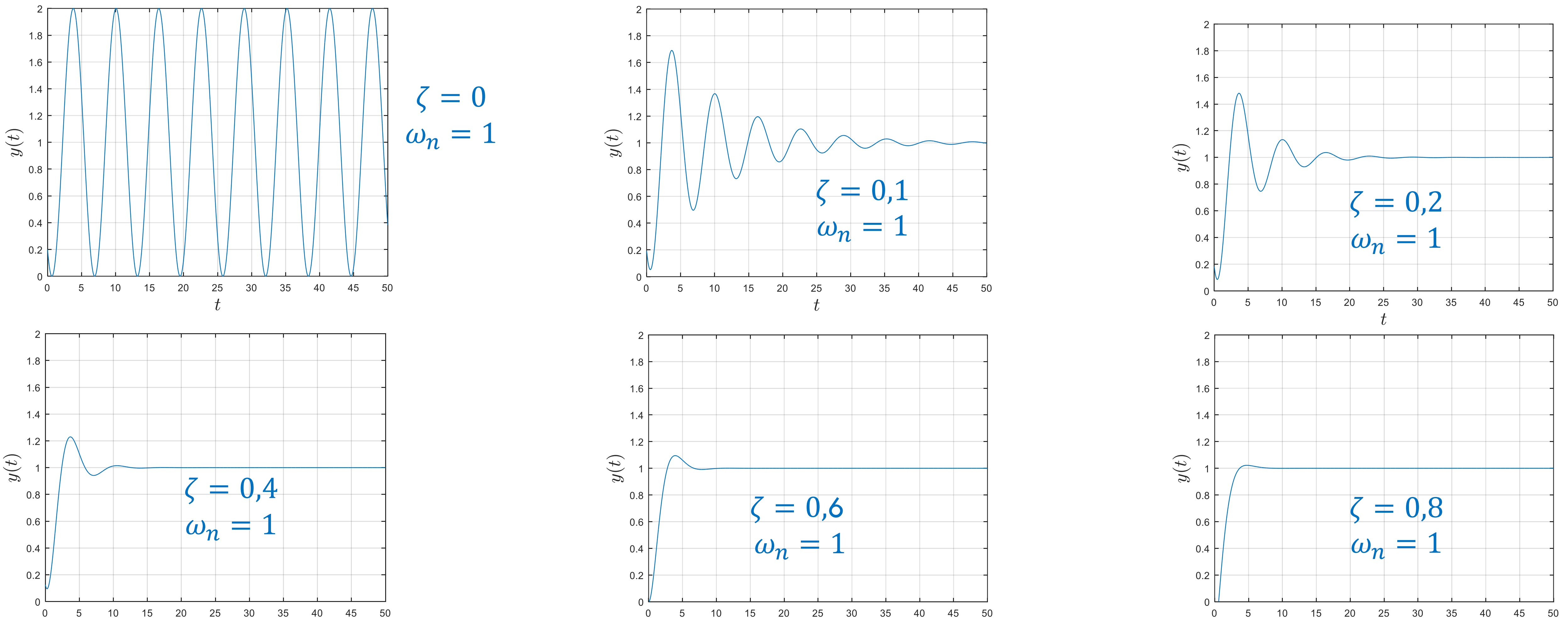
RESPOSTA SUBAMORTECIDA

Polos complexos (conjugados simétricos). Sistema estável e subamortecido.

$$y(t) = K\left\{1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left[\cos\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t\right) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t\right)\right]\right\}$$

$$y_{ss} = K$$

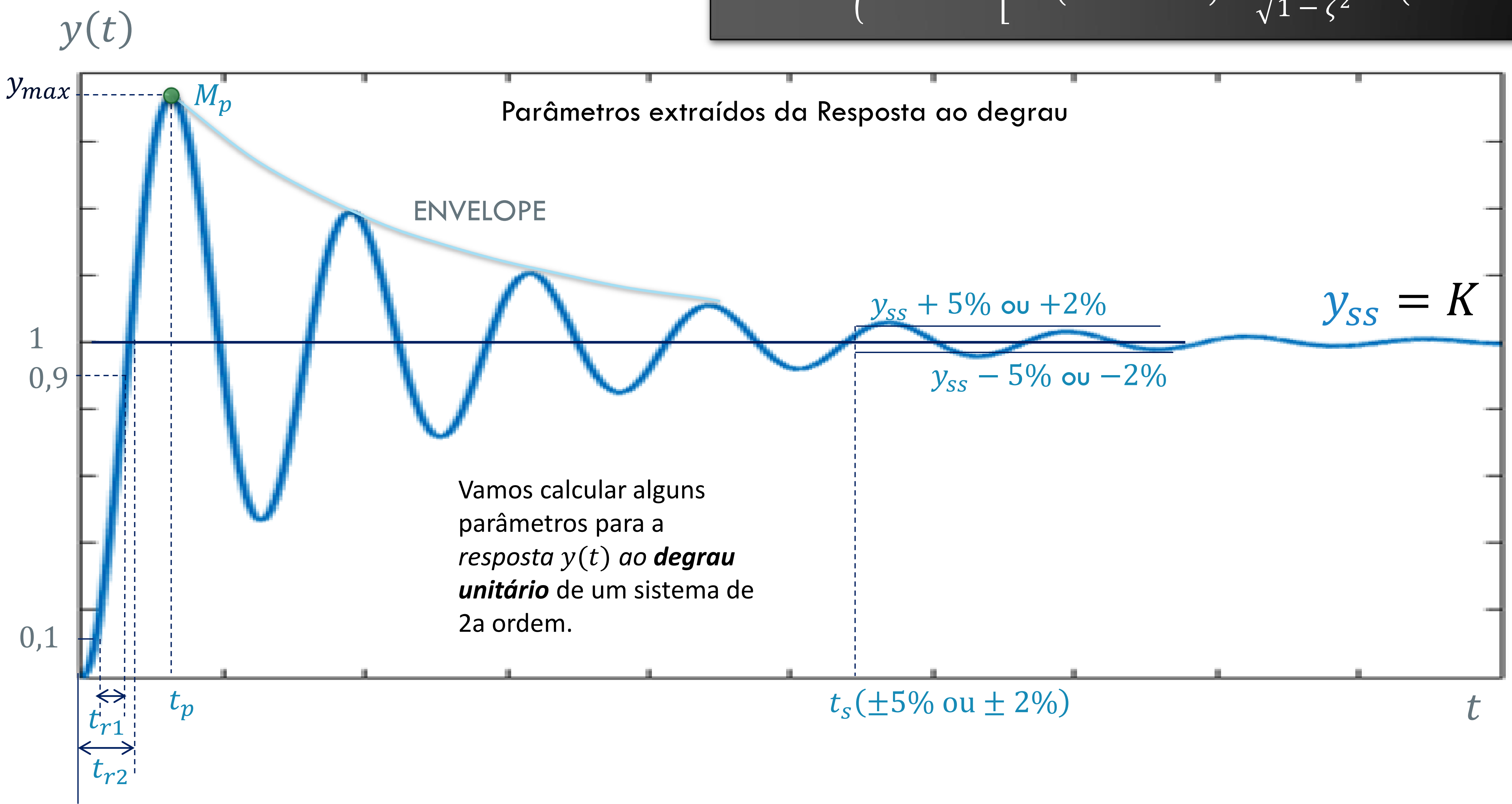
$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$



RESPOSTA SUBAMORTECIDA

Polos complexos (conjugados simétricos). Sistema estável e subamortecido.

$$y(t) = K\left\{1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left[\cos\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t\right) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t\right)\right]\right\}$$



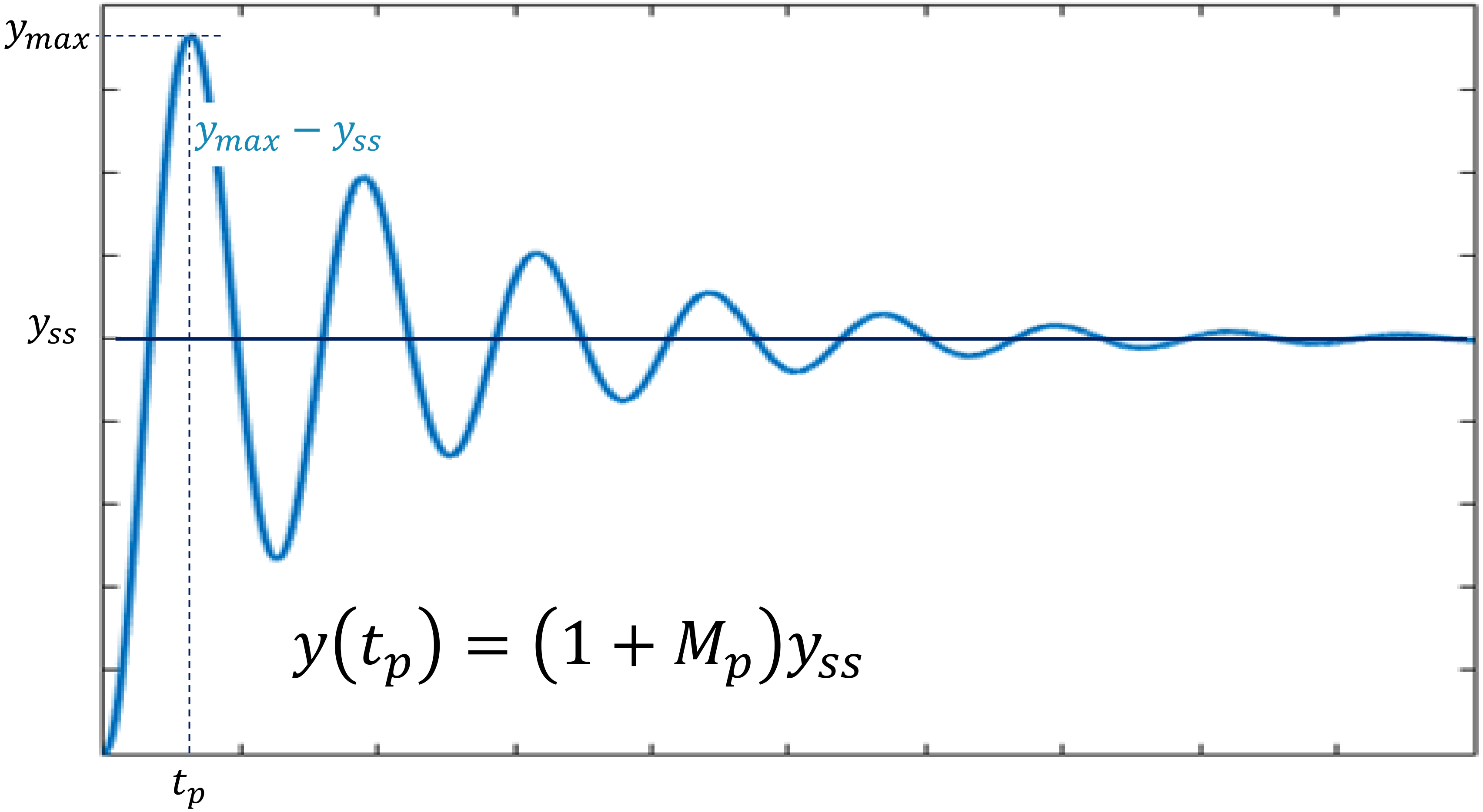
Vamos calcular alguns parâmetros para a *resposta* $y(t)$ *ao* ***degrau unitário*** de um sistema de 2a ordem.

SOBRESSINAL MÁXIMO M_p (OVERSHOOT)

$$y(t_p) = y_{max} \qquad M_p = \frac{y_{max} - y_{ss}}{y_{ss}}$$

M_p é a diferença entre o valor de pico e o valor final y_{ss}. É usual a indicação em termos percentuais.

$$M_p = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$



$$y(t_p) = (1 + M_p)y_{ss}$$

INSTANTE DE PICO t_p (PEAK TIME)

$$y(t_p) = y_{max}$$

Diminuir $t_p \rightarrow$ Aumentar ω_d.
Aumentar $\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$.

$$M_p = \frac{y_{max} - y_{ss}}{y_{ss}}$$

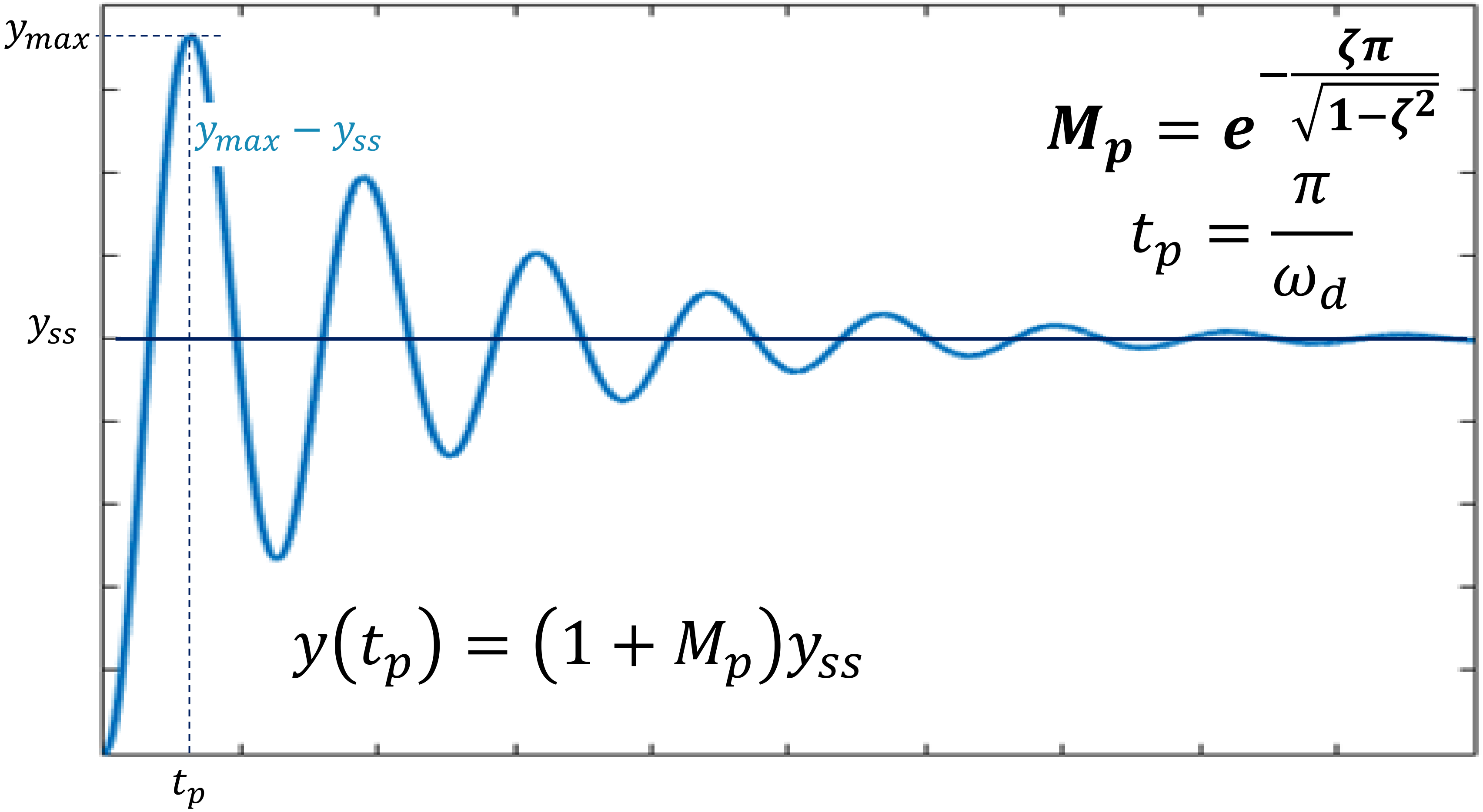
É o instante em que a reposta ao degrau $y(t)$ atinge o primeiro pico.

$$\frac{dy(t)}{dt} = 0$$

$$\sin(\omega_d t) = 0$$

$$\omega_d t = 0, \pi, 2\pi, \ldots = n\pi$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$



$$\boldsymbol{M_p = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}}$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

$$y(t_p) = (1 + M_p)y_{ss}$$

TEMPO DE SUBIDA t_r (RISE TIME)

$\boldsymbol{t_{r1}}$ - Para sistemas superamortecidos ou com amortecimento crítico, é a mesma definição usada em sistemas de primeira ordem, i.é, o tempo necessário para que a resposta ao degrau, $y(t)$, vá de $0{,}1$ a $0{,}9$ do valor final $y_{ss} = y(\infty)$.

$\boldsymbol{t_{r2}}$ - Definido para sistemas de segunda ordem subamortecidos, é o tempo necessário para que a resposta ao degrau, $y(t)$, atinja o valor final $y_{ss} = K$ pela primeira vez.

$$y(t) = K = K\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t_{r2}}\cos(\omega_d t_{r2} - \varphi)\right]$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t_{r2}}\cos(\omega_d t_{r2} - \varphi) = 0$$

$$\cos(\omega_d t_{r2} - \varphi) = 0 \rightarrow \omega_d t_{r2} - \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$t_{r2} = \frac{\frac{\pi}{2} + \varphi}{\omega_d} = \frac{\operatorname{atan}\left(-\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}\right)}{\omega_d} = \frac{\frac{\pi}{2} + \sin^{-1}\zeta}{\omega_d}$$

Diminuir $t_r \longrightarrow$ Aumentar ω_n. Na verdade, t_r também pode ser diminuído diminuindo ζ, mas isso causa um overshoot maior.

TEMPO DE ESTABILIZAÇÃO t_s (SETTLING TIME)

t_s é tempo necessário para a resposta ficar dentro de uma faixa do valor final, em geral de $\pm 2\%$ a $\pm 5\%$;

$$y(t) = K\left[1 - \boxed{\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}}\cos\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t - \varphi\right)\right]$$

Para t_s com $\pm 2\%$ de tolerância,

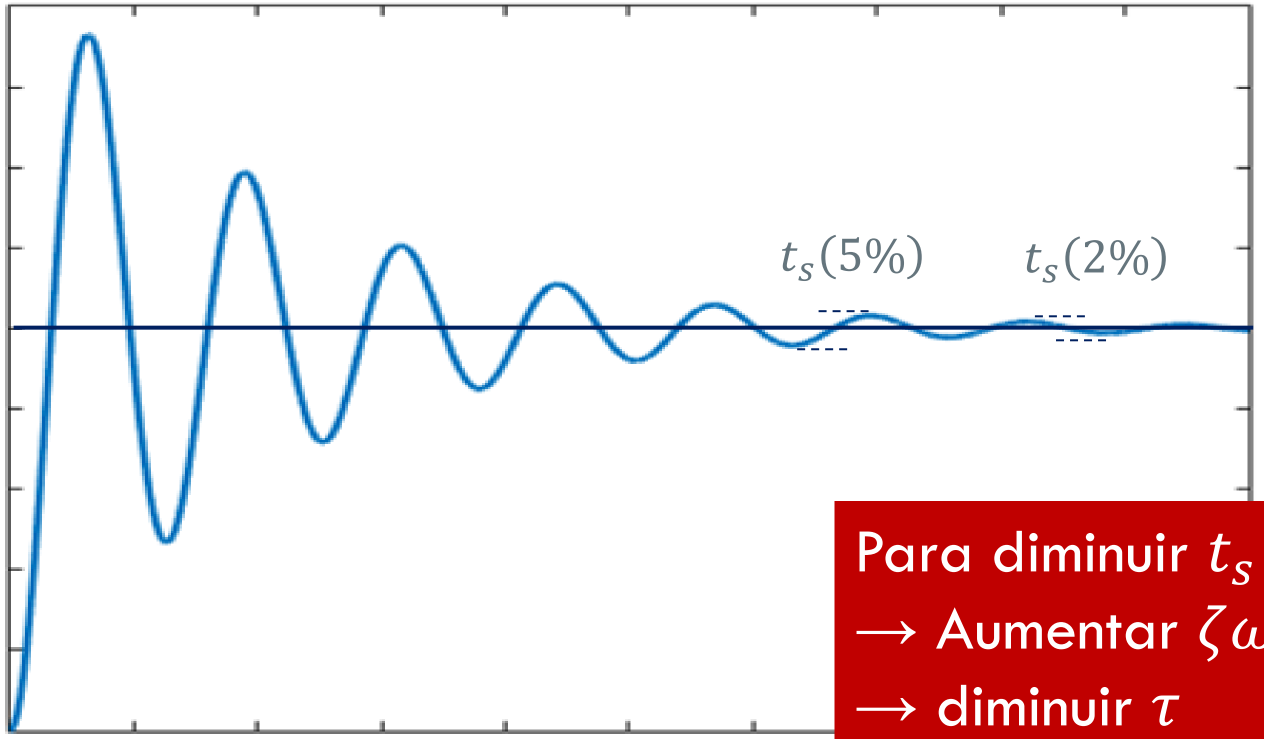
$$\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\sigma t_s} = 0{,}02$$

$$t_s \cong \frac{4}{\sigma} \cong 4\tau, \qquad \tau = \frac{1}{\zeta\omega_n}$$

Para t_s com $\pm 5\%$ de tolerância,

$$\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\sigma t_s} = 0{,}05$$

$$t_s = \frac{3}{\sigma}$$



Para diminuir t_s
$\longrightarrow$ Aumentar $\zeta\omega_n$
$\longrightarrow$ diminuir τ

RESUMO

Diminuir $t_p \rightarrow$ Aumentar ω_d. Aumentar $\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$.

Diminuir $t_r \rightarrow$ Aumentar ω_n. Na verdade, t_r também pode ser diminuído diminuindo ζ, mas isso causa um overshoot maior.

Para diminuir $t_s \rightarrow$ Aumentar $\zeta\omega_n \rightarrow$ diminuir $\tau = \frac{1}{\zeta\omega_n}$

$$Y(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$	
Instante de pico	$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$
Sobressinal	$$M_p = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$
Tempo de estabilização	$$t_{s,2\%} = \frac{-\ln\left(0{,}02\sqrt{1-\zeta^2}\right)}{\zeta\omega_n} \cong \frac{4}{\sigma} = 4\tau = 4\frac{1}{\zeta\omega_n}$$
Tempo de subida	$$t_r = \frac{\frac{\pi}{2} + \sin^{-1}\zeta}{\omega_d} \cong \frac{\pi}{2\omega_n}$$
Resposta em estado estacionário	$$y_{ss} = K$$

NO OCTAVE

```
clear all; close all; clc;

pkg load control
pkg load signal
num=[16];
den=[1,3,16];
%Função de transferência
sys = tf(num, den)

%Parâmetros básicos do sistema de segunda ordem
omega_n=sqrt(den(3)/den(1));
K=(num(1)/omega_n^2)/den(1);
Zeta = (den(2)/(2*omega_n))/den(1);
a = sprintf("Fator de amplificação: %d, Fator de amortecimento: %d, Frequência natural: %d",K,Zeta,omega_n)
[z,p,k]= tf2zp(num,den)
pzmap(sys);
```

```
Transfer function 'sys' from input 'u1' to output ...

            16
 y1:  --------------
      s^2 + 3 s + 16

Continuous-time model.
a = Fator de amplificação: 1, Fator de amortecimento: 0.375, Frequência natural: 4
z = [](0x1)
p =

  -1.5000 + 3.7081i
  -1.5000 - 3.7081i

k = 16
>> |
```

PARA FAZER AGORA

EXERCÍCIO 01

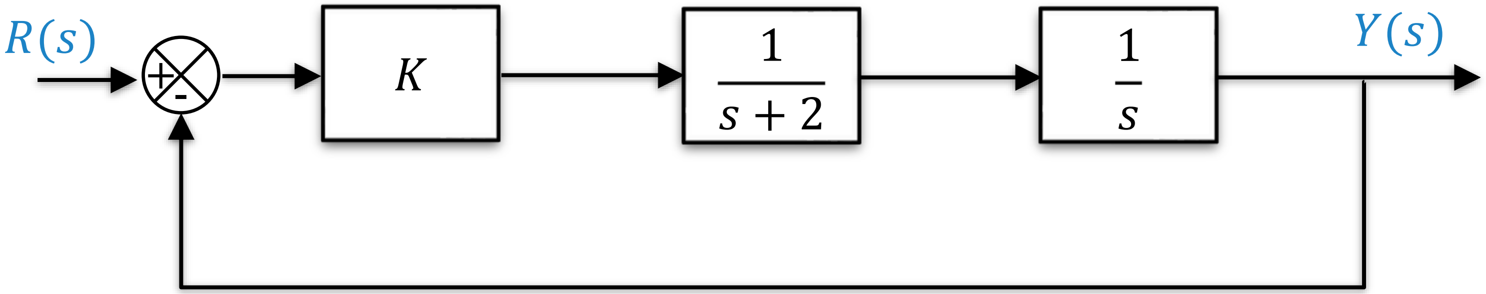
- Para cada sistema de segunda ordem abaixo, encontre $\zeta, \omega_n, \omega_d, t_s, t_p, t_r, M_p$

a) $T(s) = \dfrac{16}{s^2+3s+16}$

b) $T(s) = \dfrac{0.04}{s^2+0.02s+0.04}$

c) $T(s) = \dfrac{1.05 \times 10^7}{s^2+1.6 \times 10^3 s+1.05 \times 10^7}$

EXERCÍCIO 02



- Para o sistema acima:

a) O ganho estático do sistema em cadeia fechada depende de K?

b) Determine K para que a resposta do sistema em cadeia fechada a uma entrada degrau de amplitude unitária e sobressinal de 20%.

c) Para o valor de K definido no item anterior, qual é o tempo de estabilização da resposta a 5% ?

EXERCÍCIO 03

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Dada a função de transferência de um sistema dinâmico, proponha uma **região de alocação para o par de polos** de modo a atender as seguintes especificações de desempenho para resposta ao degrau unitário:

1. $t_r \leq 0{,}9s$
2. $M_p \leq 16\%$
3. $t_{s,2\%} \leq 3s$

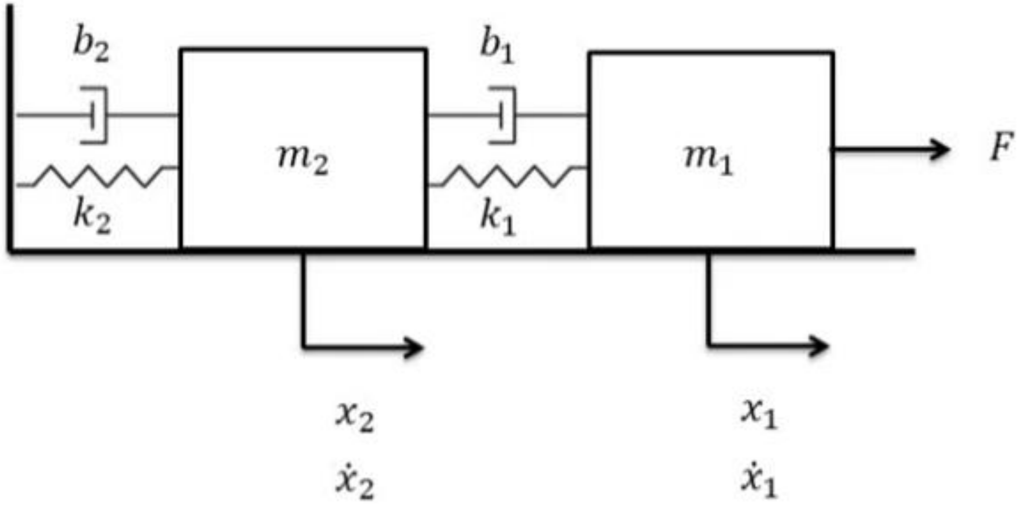
ENTREGAR CÓDIGO E RELATÓRIO SIMPLES EM UM .ZIP

EXERCÍCIO PARA ENTREGAR NO MOODLE

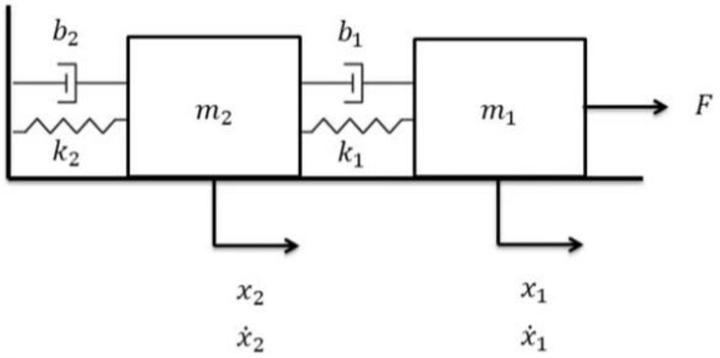
EXERCÍCIO PARA ENTREGA NO MOODLE 01

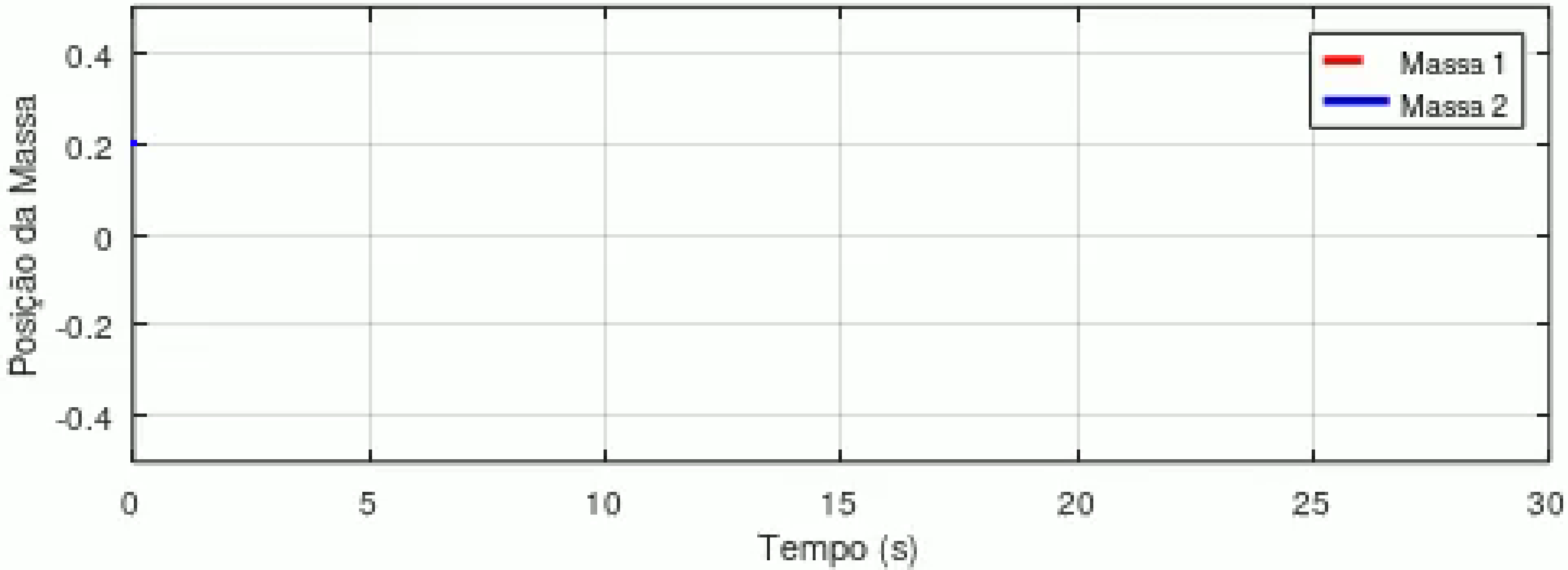
Para o sistema ao lado:

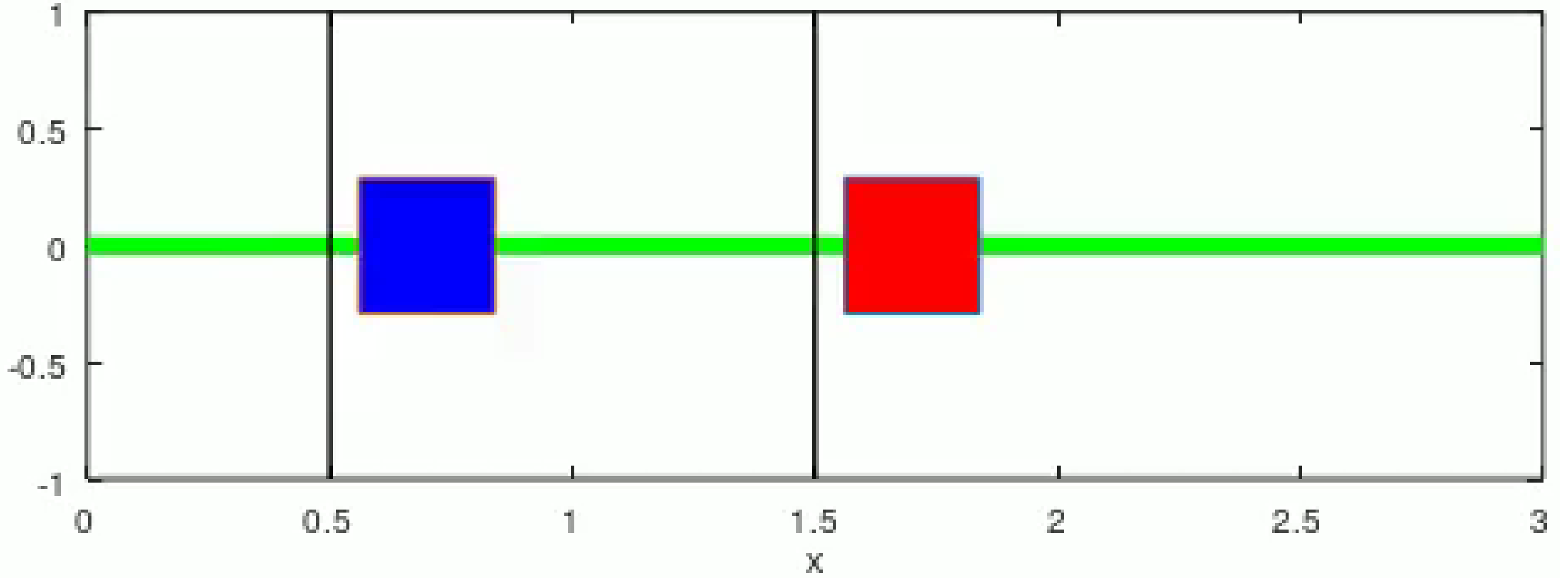
1. Obtenha as equações diferenciais que regem o sistema para: $m_1 = 40$; $m_2 = 40$; $k_1 = 16$; $k_2 = 16$; $b_1 = 2$; $b_1 = 2$.
2. Obtenha a resposta do sistema, **por espaço de estado**, para um deslocamento inicial de $x_1(0) = x_2(0) = 0{,}2$ e força $\mathrm{F} = 0$;
3. Obtenha a resposta do sistema, **por ODE45**, para um deslocamento inicial de $x_1(0) = x_2(0) = 0{,}2$ e força $\mathrm{F} = 0$;



EXERCÍCIO PARA ENTREGA NO MOODLE 01







EXERCÍCIO PARA ENTREGA NO MOODLE 02

O sistema abaixo é a modelagem de um impacto de um veículo. Simule o sistema, de 0 a 0,2s, em duas situações: velocidade inicial de 40Km/h e de 50km/h. Plote ambas acelerações do ocupante no tempo, em múltiplos de gravidade.

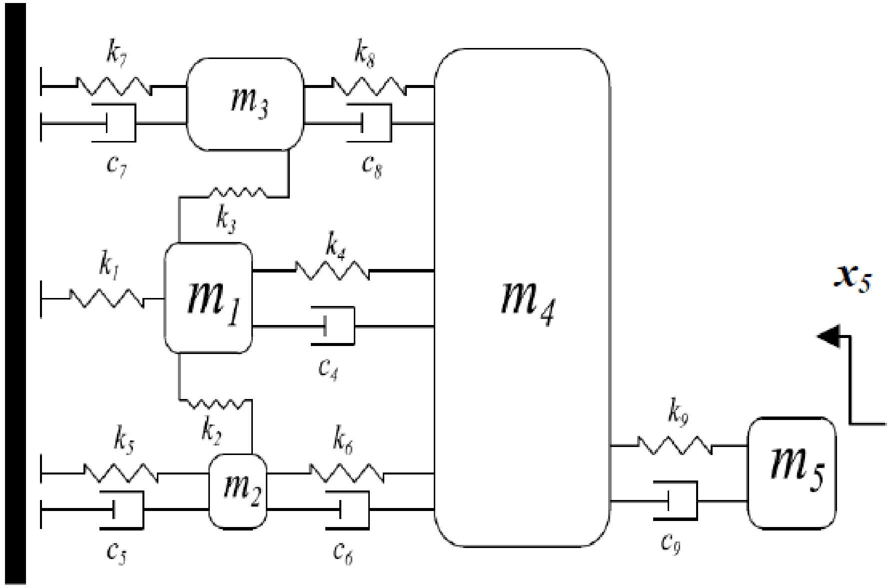


TABLE IV. MASS PROPORTION FOR 5-DOF LH MODEL.

LH Model Mass No.	Lumped Components	Mass (kg)
m_1	Engine and Radiator	300
m_2	Suspension and Front Rails	120
m_3	Engine Cradle and Shotguns	150
m_4	Fire Wall and Part of Body on Its Back	700
m_5	Occupant	80

TABLE VII. VALUE OF PARAMETERS OF BOTH MODE

Parameter	LH Model	Serial Model
c_1	-	19919388.21
c_2	-	19917598.56
c_3	-	0.18304
c_4	0.8981	19777.1246
c_5	33114.21	810.8301
c_6	1.7284	-
c_7	6764.6574	-
c_8	8648277.61	-
c_9	1595.52	-
k_1	48.8660	1341925.08
k_2	915522.58	1333105.21
k_3	1206875.43	1117990.69
k_4	1178694.84	1.91805
k_5	36.7265	572047.24
k_6	136.4661	-
k_7	38.6678	-
k_8	4761249.39	-
k_9	389232.42	-