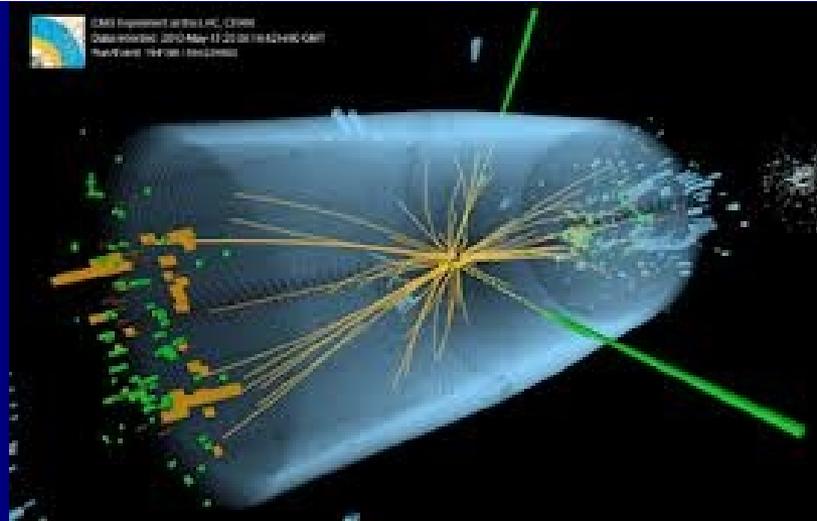


# Introdução às Medidas em Física



Material parcialmente preparado com base no material gentilmente cedido por N. Added e Paula Allegro

# Aula 2

- Estudo do pêndulo
  - Histogramas
- Densidade de probabilidade
  - Médias
  - Desvio-Padrão

# Limitações de uma Medida

Nenhuma medida é exata!

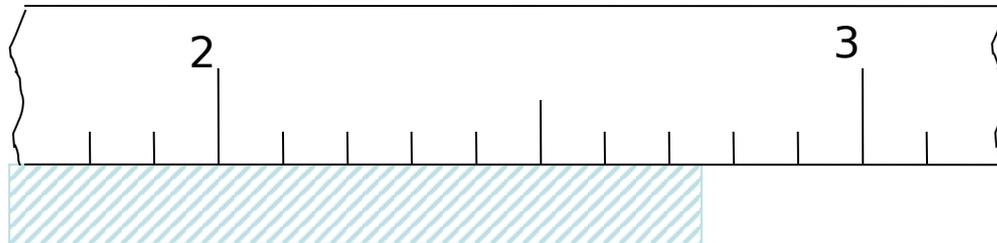
$$\diamond \text{ERRO} = \text{VALOR REAL} - \text{VALOR MEDIDO}$$

Como não conhecemos o valor real, o melhor que podemos fazer com o erro é estimá-lo → a incerteza é uma maneira probabilística de estimar o módulo do erro!

Fontes de erro: relacionadas à veracidade e à precisão

# Incerteza instrumental

## Algarismos significativos



$$(2,74 \pm 0,05) \text{ cm}$$

Dizemos que os algarismos 2, 7 e 4 são os algarismos significativos do valor da medida, sendo 4 o algarismo duvidoso;

E 5 é o único algarismo significativo da incerteza.

# O cronômetro

- A última casa mede centésimos de segundo: será esta a incerteza?



# O cronômetro

- A última casa mede centésimos de segundo: será esta a incerteza?
- Não!!!!



# O cronômetro

- Muitas vezes, o cronômetro possui capacidade de medir intervalos até mesmo menores que isso...
- O que determina a incerteza, então?



# O cronômetro

- O tempo de reação do usuário é da ordem de décimos de segundo!
- Como medir:
  - Clicar duas vezes: medida ruim, pois o seu cérebro já sabe que deve clicar duas vezes, porém dá pra ter uma idéia;
  - Utilizar um sinal intermitente (luminoso, sonoro, etc) com frequência conhecida com precisão superior à possível de ser obtida com o cronômetro.



# “Tipos de Incerteza”

- Estatística:
  - Não é possível prever ou controlar antes do experimento;
  - Diz respeito à própria flutuação dos dados, que pode referir-se à condições minimamente diferentes na tomada de dados;
- Sistemática:
  - Relacionada ao instrumento de medida;
  - Pode ser estimada *a priori* (em geral);
  - Faz parte dos erros sistemáticos da medida;
  - Um instrumento ideal não apresenta incerteza instrumental. Mas instrumentos ideais só existem na física teórica.

# Apresentação dos dados em tabelas

Identificação

Legenda

Cabeçalho

Unidades

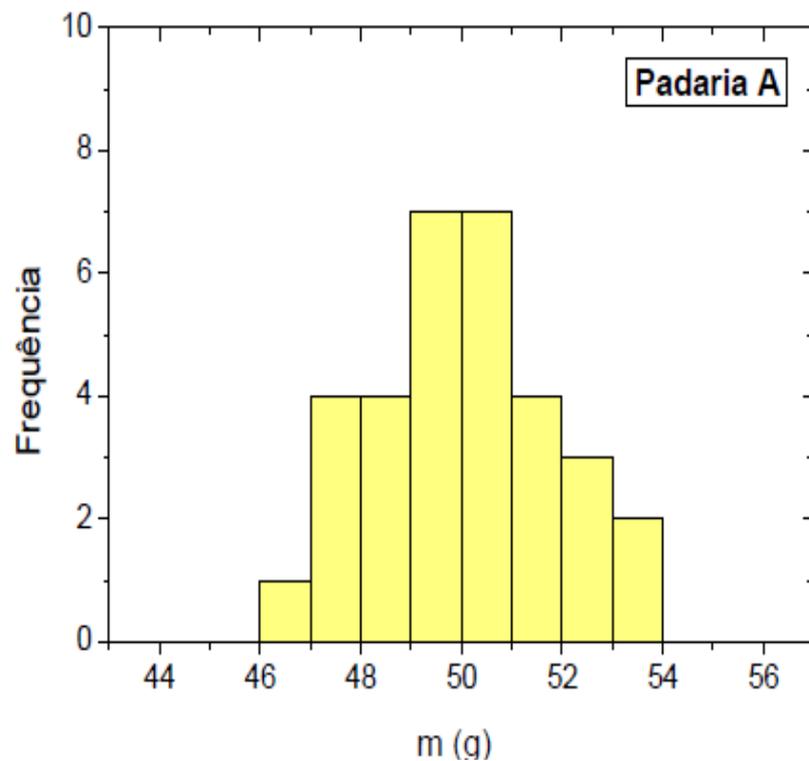
Incertezas

*Tabela III.1: Alguns valores experimentais para a constante de gravitação ao longo dos anos.*

| ano  | $G \pm \sigma$<br>( $10^{-11} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \text{ kg}^{-1}$ ) |
|------|---|
| 1798 | $6,75 \pm 0,05$   |
| 1930 | $6,670 \pm 0,005$   |
| 1988 | $6,67259 \pm 0,00085$   |

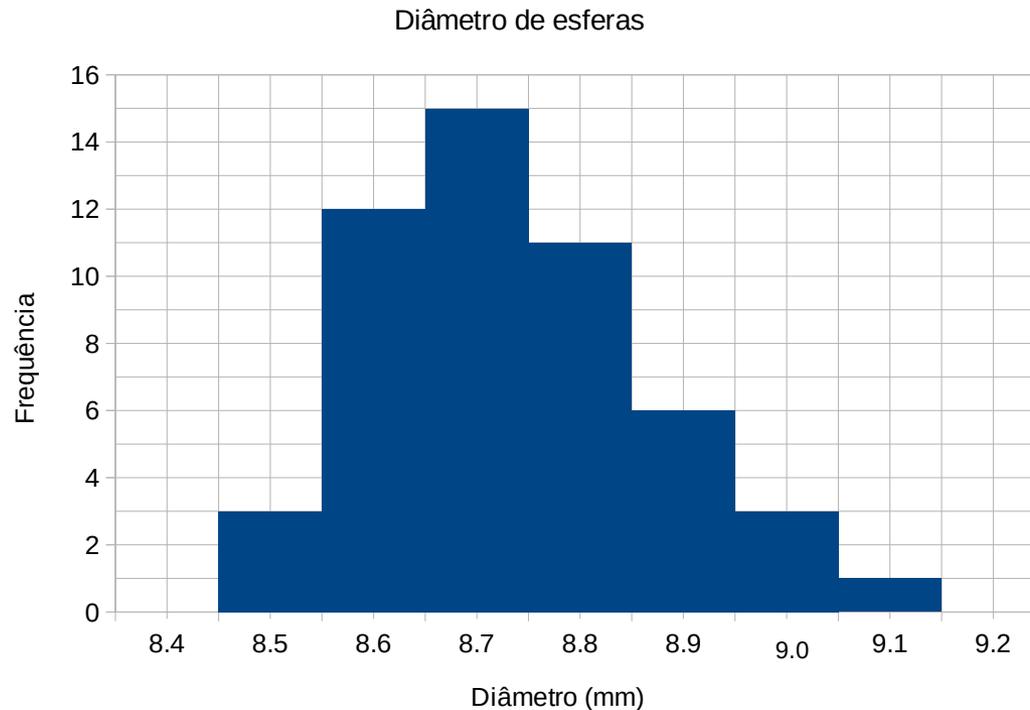
# Histogramas

O agrupamento dos dados em faixas de valores permite obter informação sobre um conjunto de dados relativos ao mesmo fenômeno nas mesmas condições de forma gráfica



# Histogramas

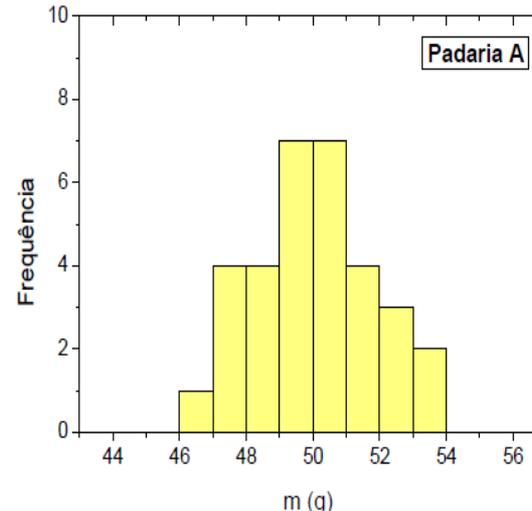
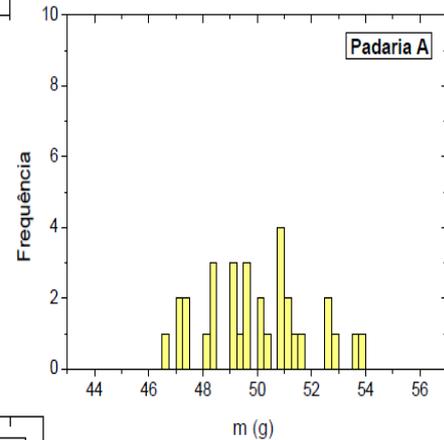
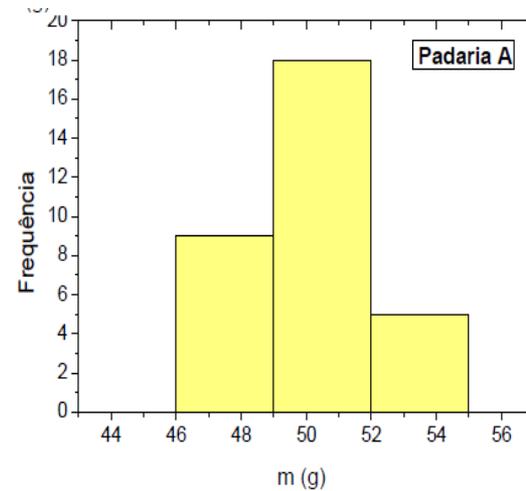
- Histogramas permitem visualizar como as medidas se distribuem



- Eixo x mostra intervalos de medidas, também chamados “canais” ou “bins”
- Eixo y mostra o número de ocorrências (frequência) ou a frequência relativa, dividindo-se o número de ocorrências pelo número total de dados  $N$ .

# Histogramas

A escolha dos intervalos (bins) deve ser feita de modo a não mascarar grupos diferentes de dados, mas evitando espaçamento que prejudique sua identificação



# Construindo Histogramas

1ª etapa : decidir a escala e a largura do canal do histograma

mínimo : 2 s

máximo: 7 s

largura do canal: 1 s

| <b>medida</b> | <b>período (s)</b> |
|---------------|--------------------|
| 1             | 2,4                |
| 2             | 5,3                |
| 3             | 5,8                |
| 4             | 6,1                |
| 5             | 5,5                |
| 6             | 4,7                |
| 7             | 4,1                |
| 8             | 5,2                |

# Construindo Histogramas

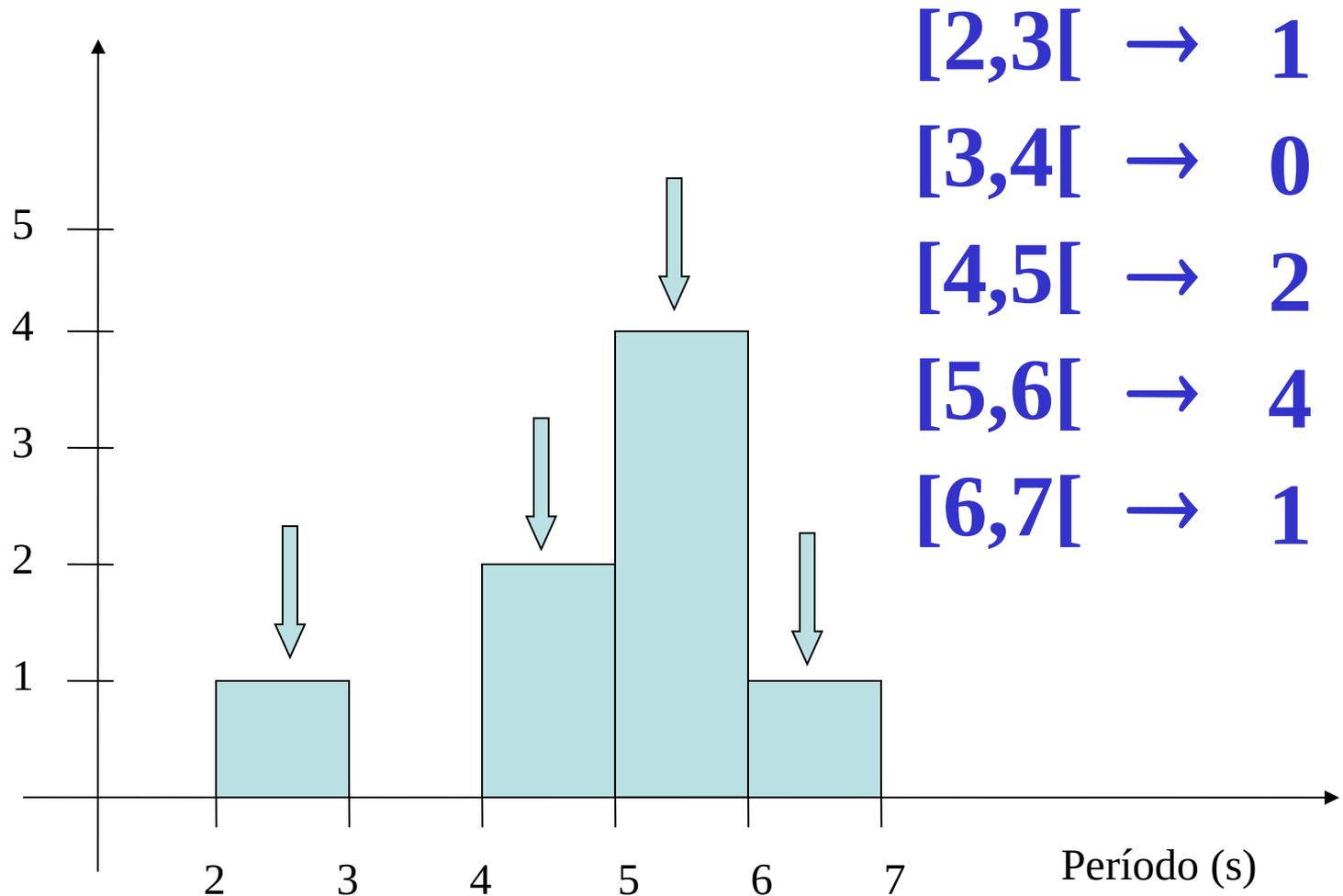
2ª etapa : calcular a frequência com que os dados aparecem em cada intervalo

3ª etapa : preencher o histograma

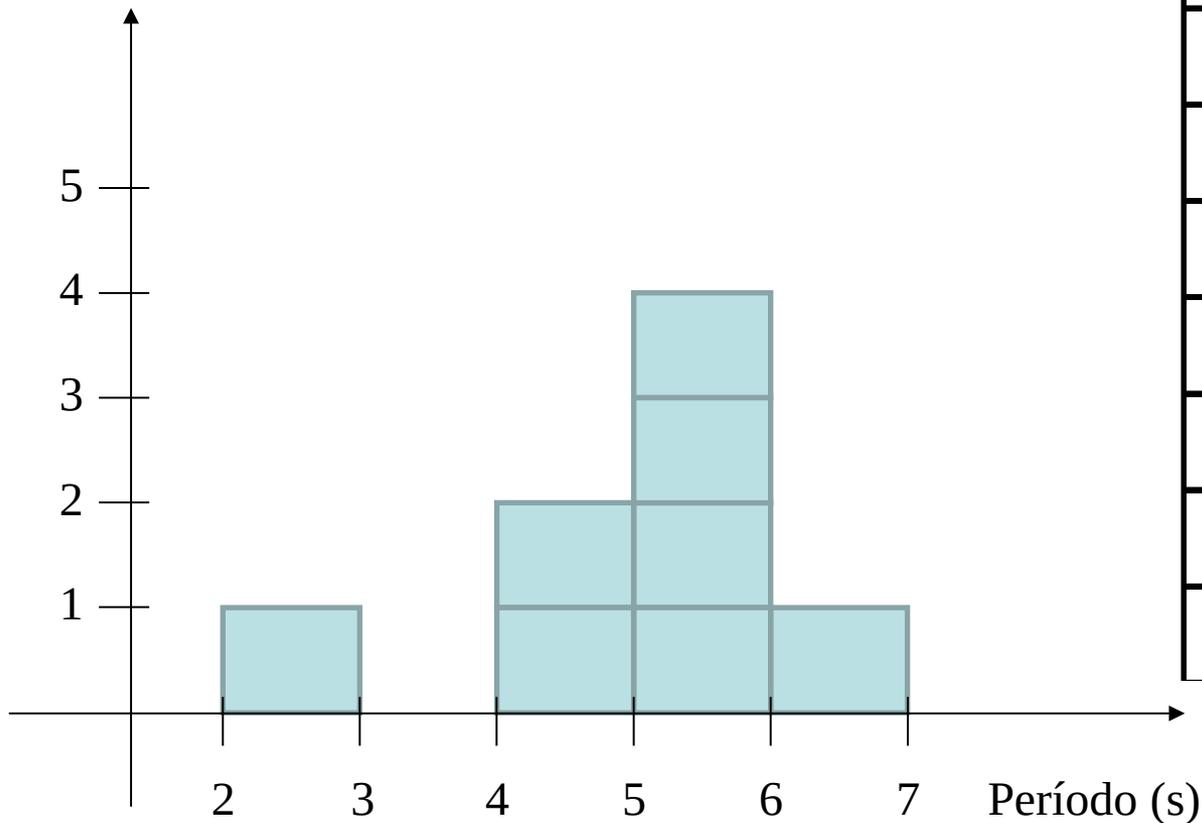
| <b>medida</b> | <b>período (s)</b> |
|---------------|--------------------|
| <b>1</b>      | <b>2,4</b>         |
| <b>2</b>      | <b>5,3</b>         |
| <b>3</b>      | <b>5,8</b>         |
| <b>4</b>      | <b>6,1</b>         |
| <b>5</b>      | <b>5,5</b>         |
| <b>6</b>      | <b>4,7</b>         |
| <b>7</b>      | <b>4,1</b>         |
| <b>8</b>      | <b>5,2</b>         |



# Construindo Histogramas



# Construindo Histogramas



| medida       | período (s) |
|--------------|-------------|
| <del>1</del> | 2,4         |
| <del>2</del> | 5,3         |
| <del>3</del> | 5,8         |
| <del>4</del> | 6,1         |
| <del>5</del> | 5,5         |
| <del>6</del> | 4,7         |
| <del>7</del> | 4,1         |
| <del>8</del> | 5,2         |

# Média

- Realizando-se  $N$  medidas de uma mesma grandeza de forma idêntica, o valor médio desse conjunto de medidas é calculado como a média aritmética simples

$$\bar{x} \equiv \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$$

- Lei dos grandes números: se o erro  $\epsilon$  associado a uma medida é aleatório e com média nula:  $N \rightarrow \infty$ ,  $\bar{x} \rightarrow x_0$

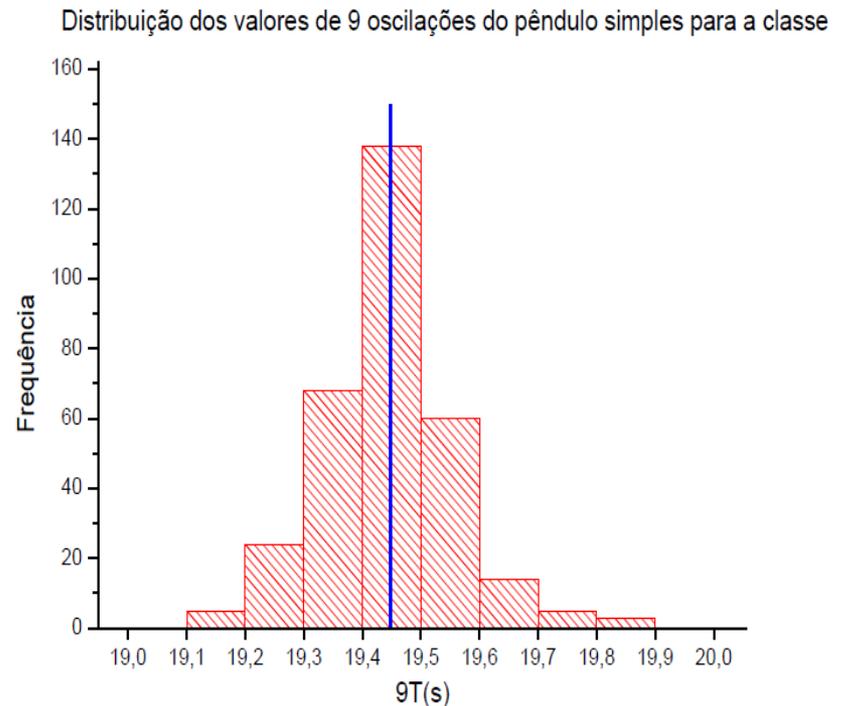
$$\textit{Medida} : x = x_0 + \epsilon$$

# Média

- Medida representativa do conjunto de dados:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$$

- Sem a medida da dispersão dos dados, não é trabalho científico!



# Medidas de Dispersão:

$$\textit{amplitude} = x_{\max} - x_{\min}$$

$$\textit{desvio médio} = \frac{\sum_{i=1}^N |x_i - \bar{x}|}{N}$$

$$\textit{variância} = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N}$$

# Dispersão das medidas

- Seja  $d_i$  a diferença entre cada medida  $x_i$  e o valor verdadeiro  $x_o$  (desconhecido):

$$d_i = x_i - x_o$$

- A média dos desvios tende a zero quando  $N \rightarrow \infty$  porque  $\bar{x} \rightarrow x_o$

$$\bar{d} \equiv \frac{\sum_{i=1}^N d_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - x_o)}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} - \frac{Nx_o}{N} = \bar{x} - x_o \rightarrow 0$$

**A média dos desvios não fornece uma informação relevante**

# Desvio Padrão

- Utilizamos o desvio quadrático para medir a dispersão:

$$d_i^2 = (x_i - \bar{x})^2$$

- O desvio padrão amostral é calculado como:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{(N-1)} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

**A média  $\bar{x}$  é a melhor estimativa do valor verdadeiro  $x_0$**

$$\bar{x} \rightarrow x_0 \text{ quando } N \rightarrow \infty$$

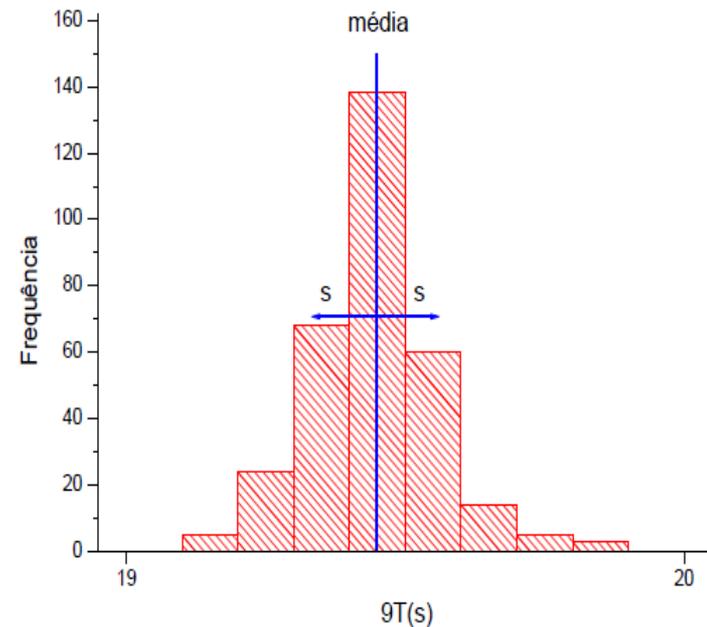
# Desvio-Padrão

- Nos dá a medida da dispersão dos dados em torno da média:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N-1}}$$

- É a principal medida de dispersão utilizada pois:
  - Considera todos os dados;
  - Possui a mesma unidade da média (e dos dados);
  - É mais prático do que trabalhar com módulos;

Distribuição dos valores de 9 oscilações do pêndulo simples para a classe



# Qual o significado do Desvio Padrão?

- É uma estimativa da dispersão das medidas em torno de seu valor médio
- Se você fosse realizar só mais 1 medida, já tem uma ideia do intervalo de valores esperado para essa medida
  - Se você conhece a média e o desvio padrão obtidos por outro pesquisador, e você nunca fez o experimento, pode ter uma estimativa dos valores esperados.
- O desvio padrão é a incerteza (de origem não-sistemática) associada a uma medida
  - Os valores medidos são diferentes entre si devido a flutuações estatísticas

# E o valor médio?

- Num experimento A utilizamos N medidas individuais para obtermos a média de uma certa grandeza x:

$$\bar{x}_A \equiv \frac{\sum_{i=1}^N x_i^A}{N}$$

- Se refizermos todo o experimento de forma idêntica, chamando de experimento B, obtemos:

$$\bar{x}_B \equiv \frac{\sum_{i=1}^N x_i^B}{N} \approx \bar{x}_A$$

# E o valor médio?

- Repetindo o experimento diversas vezes, obtemos valores de  $\bar{x}$  similares, mas não idênticos
- Há uma “dispersão” de valores médios  $\bar{x}$ , de forma análoga à dispersão entre medidas individuais (desvio padrão)
- Essa dispersão dos valores médios é o Desvio Padrão da Média:

$$\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

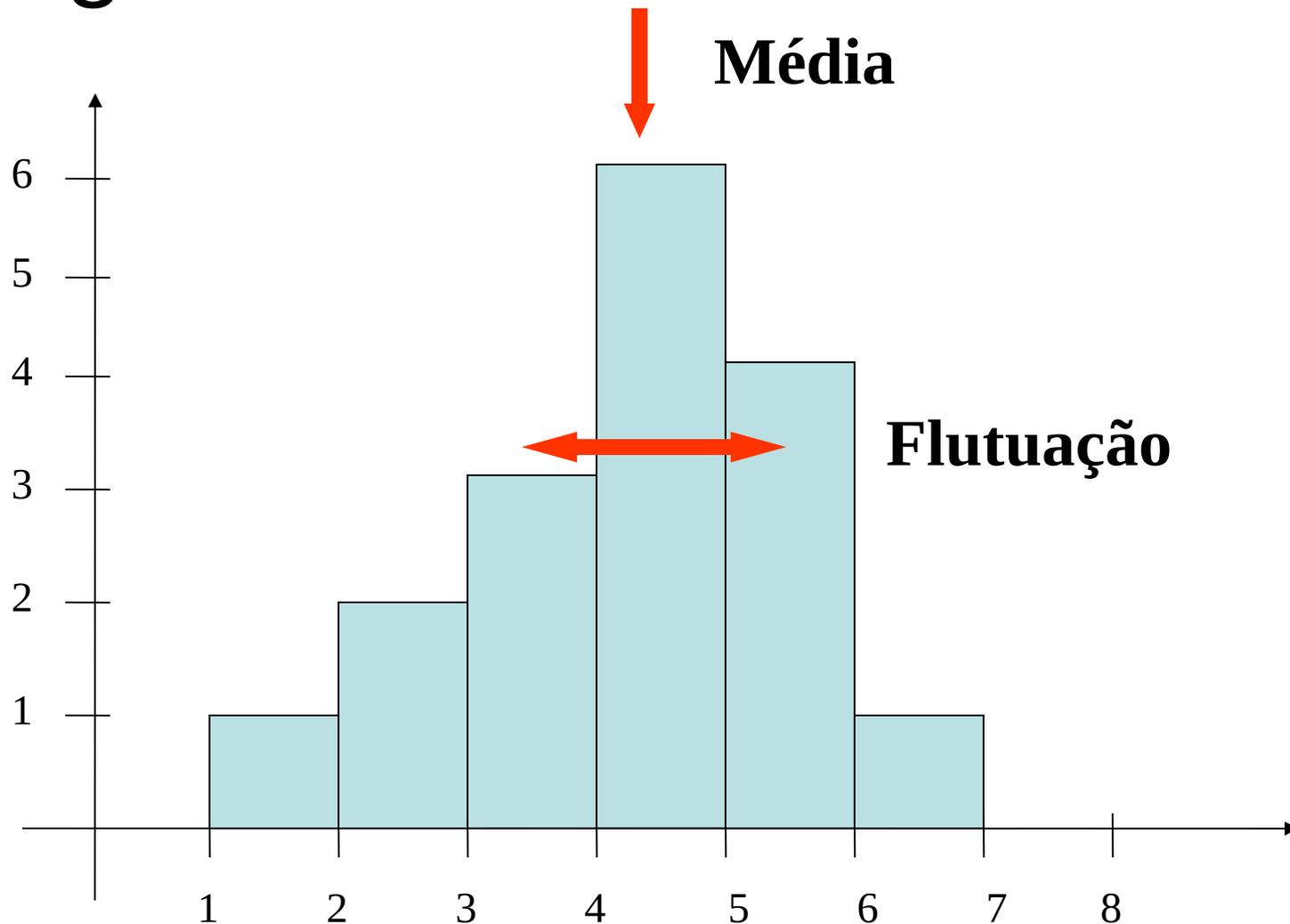
# Qual o significado do Desvio Padrão da Média?

- É uma estimativa da dispersão das médias de uma grandeza
- Se você fosse realizar todo o experimento de novo, já tem uma ideia do intervalo onde espera encontrar o valor médio
  - Se você conhece a média e o desvio padrão da média obtidos por outro pesquisador, e você nunca fez o experimento, pode ter uma estimativa da média que você pode obter se refizer o experimento.
- O desvio padrão da média é a incerteza estatística associada à média de uma grandeza
  - As médias obtidas em diversos experimentos idênticos são diferentes entre si devido a flutuações estatísticas

# Resumo

|                   | Desvio Padrão  | Desvio Padrão da Média   |
|-------------------|--|--|
| Notação           | $\sigma$   | $\sigma_m$   |
| Equação           | $\sigma = \sqrt{\frac{1}{(N-1)} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$ | $\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$   |
| Interpretação     | Dispersão das medidas efetuadas                                  | Dispersão das médias caso o experimento seja refeito   |
| Exemplo de uso I  | Estimar a incerteza estatística das medidas individuais          | Estimar a incerteza estatística da média de uma grandeza                                     |
| Exemplo de uso II | Estimar um intervalo de valores para uma próxima medida          | Estimar um intervalo de valores para a média de uma grandeza caso o experimento seja refeito |

# Representação dos Dados - Histogramas



# Como escrever o resultado final?

- Exemplo com medidas de intervalos de tempo:

Medidas: { 1,95; 1,97; 1,94; (...) 1,96} (segundos)

Média calculada: 1,96215263841 s

Desvio padrão calculado: 0,1172882618912 s

Desvio padrão da média calculado: 0,0052452905 s

# Como escrever o resultado final?

- Exemplo com medidas de intervalos de tempo:

Medidas: { 1,95; 1,97; 1,94; (...) 1,96} (segundos)

Média calculada: 1,96215263841 s

Desvio padrão calculado: 0,1172882618912 s

Desvio padrão da média calculado: 0,0052452905 s

Regra: a incerteza da média deve ter 1 algarismo significativo.

# Como escrever o resultado final?

- Exemplo com medidas de intervalos de tempo:

Medidas: { 1,95; 1,97; 1,94; (...) 1,96} (segundos)

Média calculada: 1,96215263841 s

Desvio padrão calculado: 0,1172882618912 s

Desvio padrão da média calculado: 0,0052452905 s

**Regra:** a incerteza da média deve ter 1 algarismo significativo.

Desvio padrão da média adequado: 0,005 s

# Como escrever o resultado final?

- Exemplo com medidas de intervalos de tempo:

Medidas: { 1,95; 1,97; 1,94; (...) 1,96} (segundos)

Média calculada: 1,96215263841 s

Desvio padrão calculado: 0,1172882618912 s

Desvio padrão da média calculado: 0,0052452905 s

Regra: a incerteza da média deve ter 1 algarismo significativo.

Desvio padrão da média adequado: 0,005 s

Regra: a média deve ser apresentada com o mesmo número de casas decimais que a sua incerteza.

# Como escrever o resultado final?

- Exemplo com medidas de intervalos de tempo:

Medidas: { 1,95; 1,97; 1,94; (...) 1,96} (segundos)

Média calculada: 1,96215263841 s

Desvio padrão calculado: 0,1172882618912 s

Desvio padrão da média calculado: 0,0052452905 s

Regra: a incerteza da média deve ter 1 algarismo significativo.

Desvio padrão da média adequado: 0,005 s

Regra: a média deve ser apresentada com o mesmo número de casas decimais que a sua incerteza.

Resultado final:

Intervalo de tempo de queda médio = 1,962(5)s

# Como escrever o resultado final?

- A média é “melhor conhecida” que as medidas originais

Apenas 1 medida:  $\Delta t = 1,95(1) \text{ s} \rightarrow 3$  significativos  
(considerando só a incerteza instrumental)

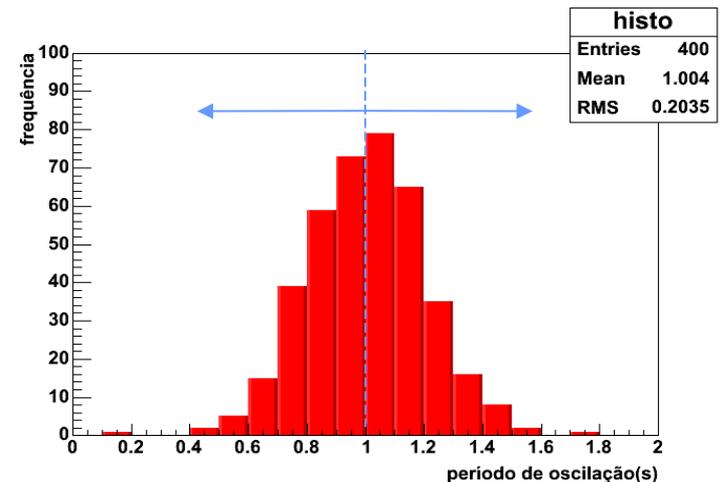
Média de N medidas:  $t\Delta = 1,962(5) \text{ s} \rightarrow 4$  significativos

- Usamos todas as N medidas para obter a média, ela representa mais informação acerca da grandeza que cada medida individual.

# Erros Estatísticos ou Aleatórios

Inicialmente, que características devemos esperar para a distribuição dos dados obtidos?

**Simétrica em torno de um certo valor, e decresce ao se afastar desse valor.**





# Frequência de ocorrência

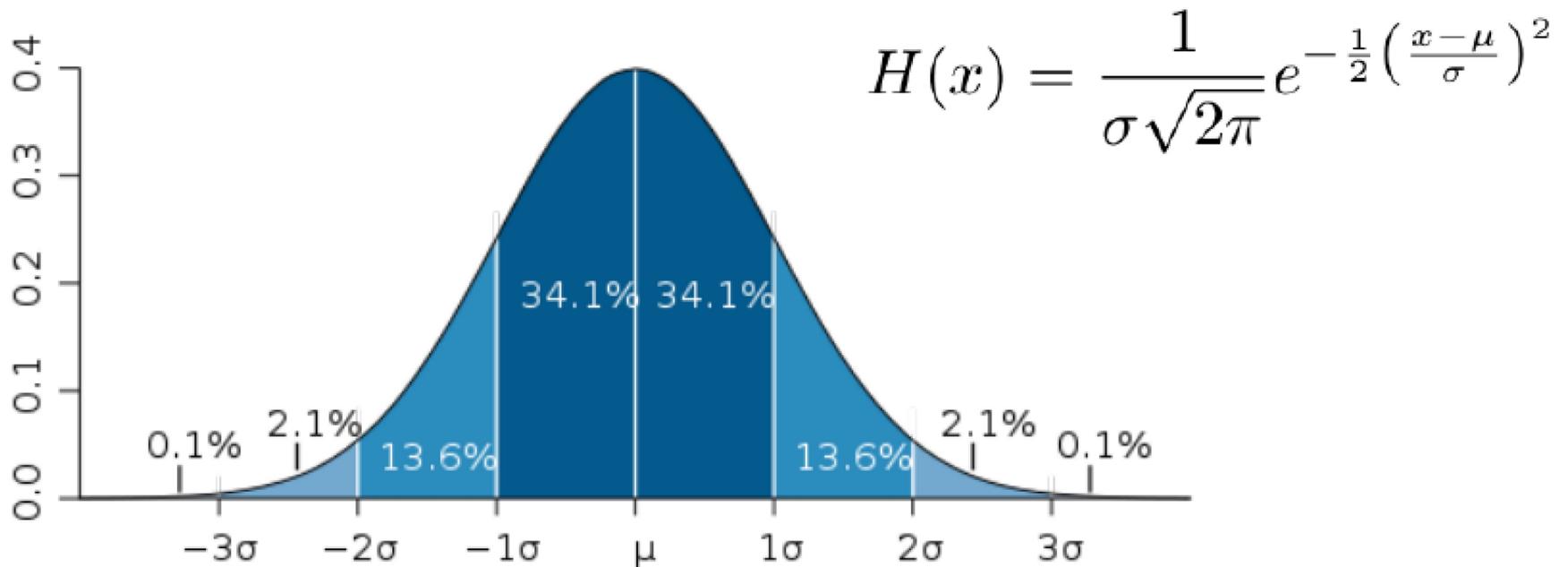
Qual o significado da frequência de ocorrência?

Podemos dizer que cada canal representa a probabilidade de se fazer uma medida entre o limite inferior e o limite superior do canal

# Distribuição Gaussiana ou Normal

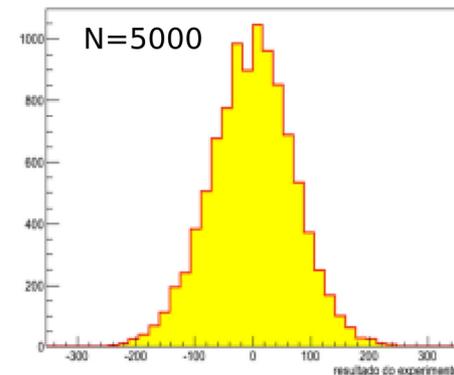
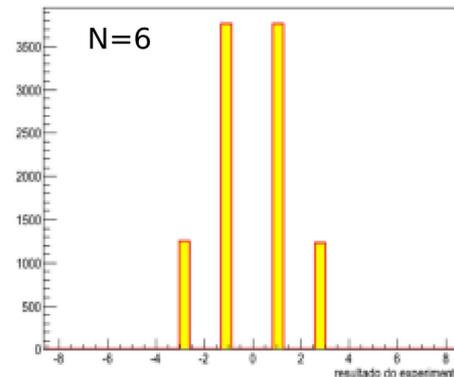
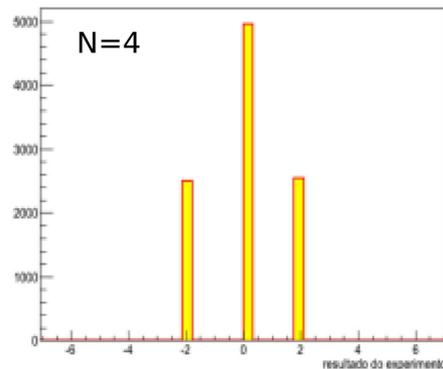
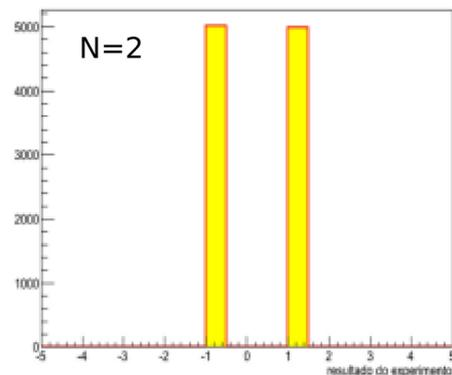
- Os efeitos aleatórios inerentes a qualquer sistema fazem com que qualquer medida resulte em diversos valores "x" diferentes;
- Como podemos avaliar qual desses "x"s obtidos é o(s) mais provável(is)?
- A Função Densidade de Probabilidade descreve, para um dado sistema, a probabilidade de se obter um determinado valor ou intervalo de valores;
- Uma infinidade de sistemas físicos de interesse se comportam de acordo com uma distribuição gaussiana de probabilidades;
- Em muitos casos, mesmo quando não seguem uma gaussiana, podem ser aproximados por uma;

# Distribuição Gaussiana ou Normal



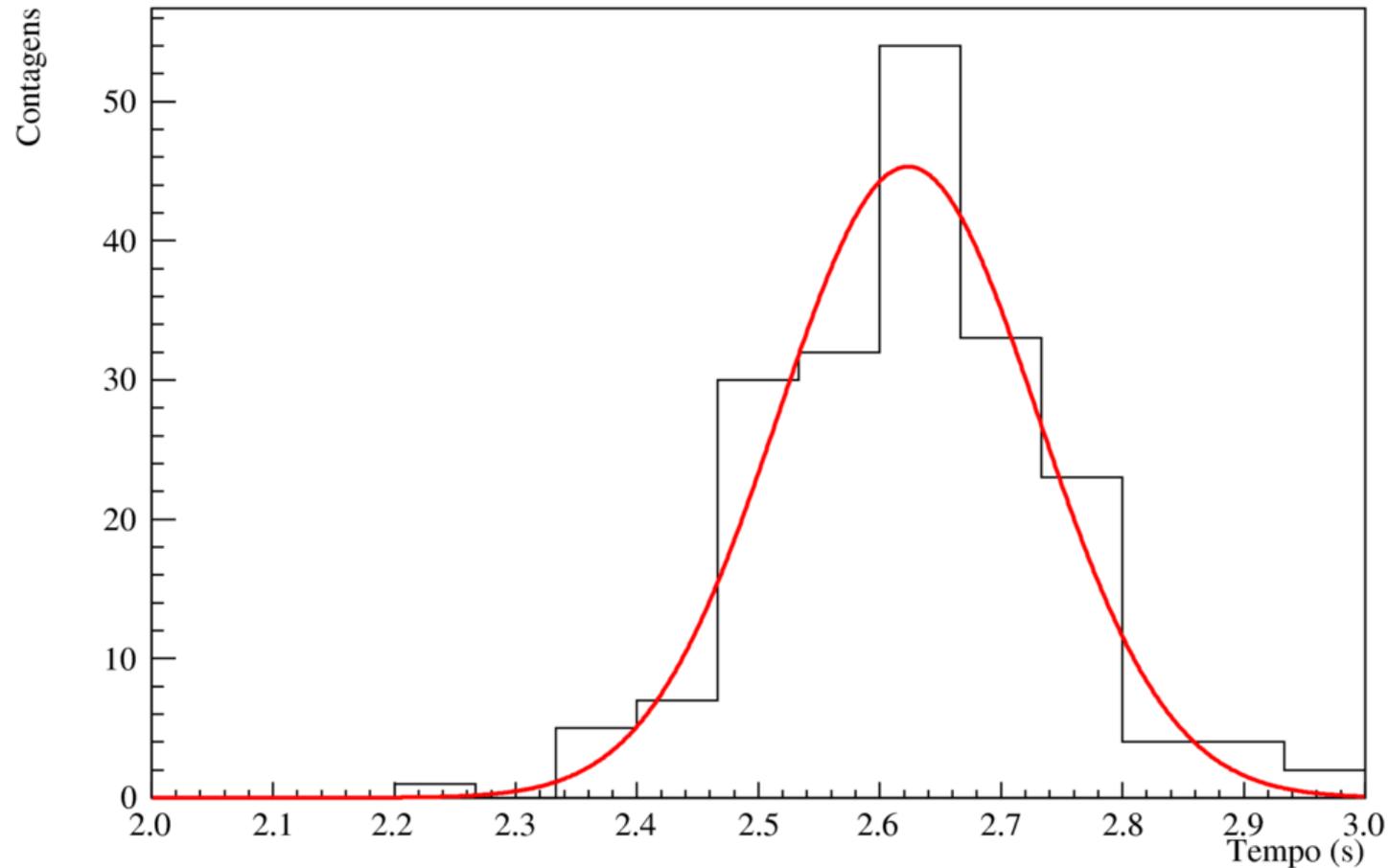
# Teorema do Limite Central

O agrupamento de muitos valores tende a uma distribuição gaussiana quando o número de valores é suficientemente alto (quando apenas erros aleatórios estão envolvidos!!!)

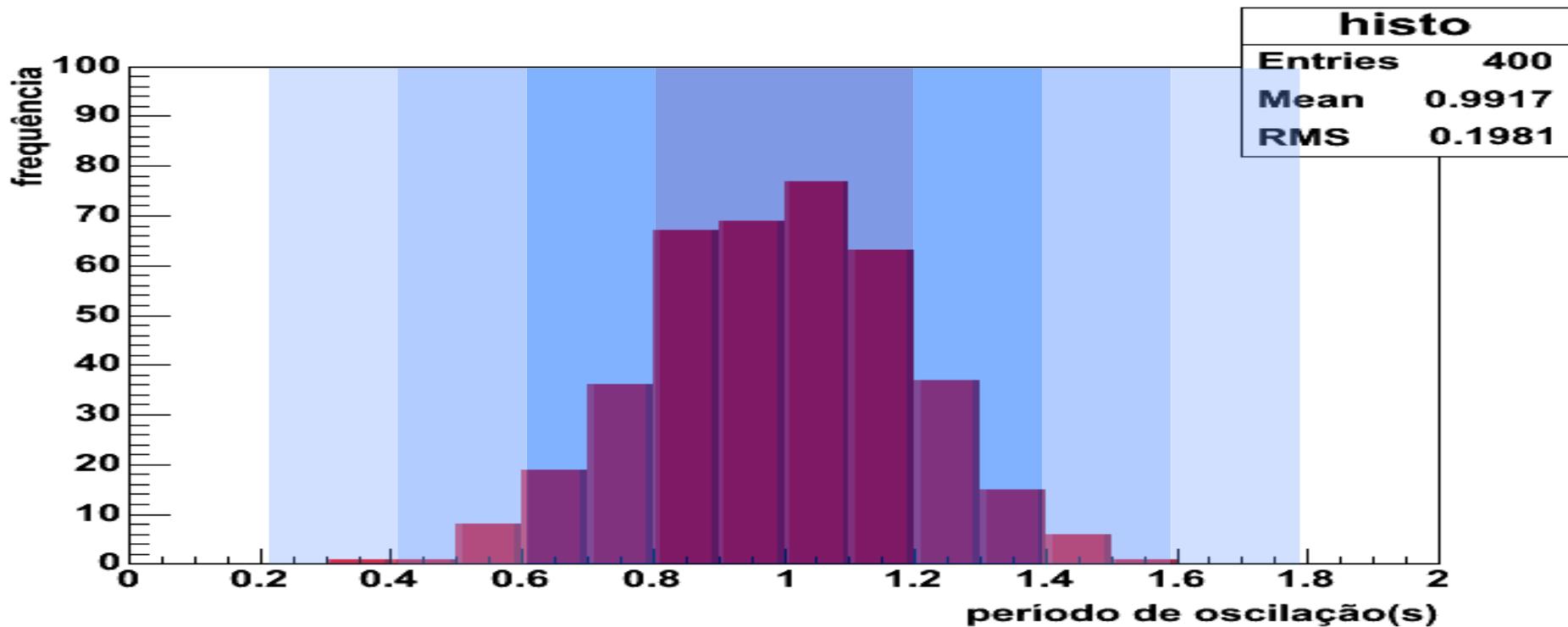


# Distribuição Gaussiana ou Normal

Tempos de queda

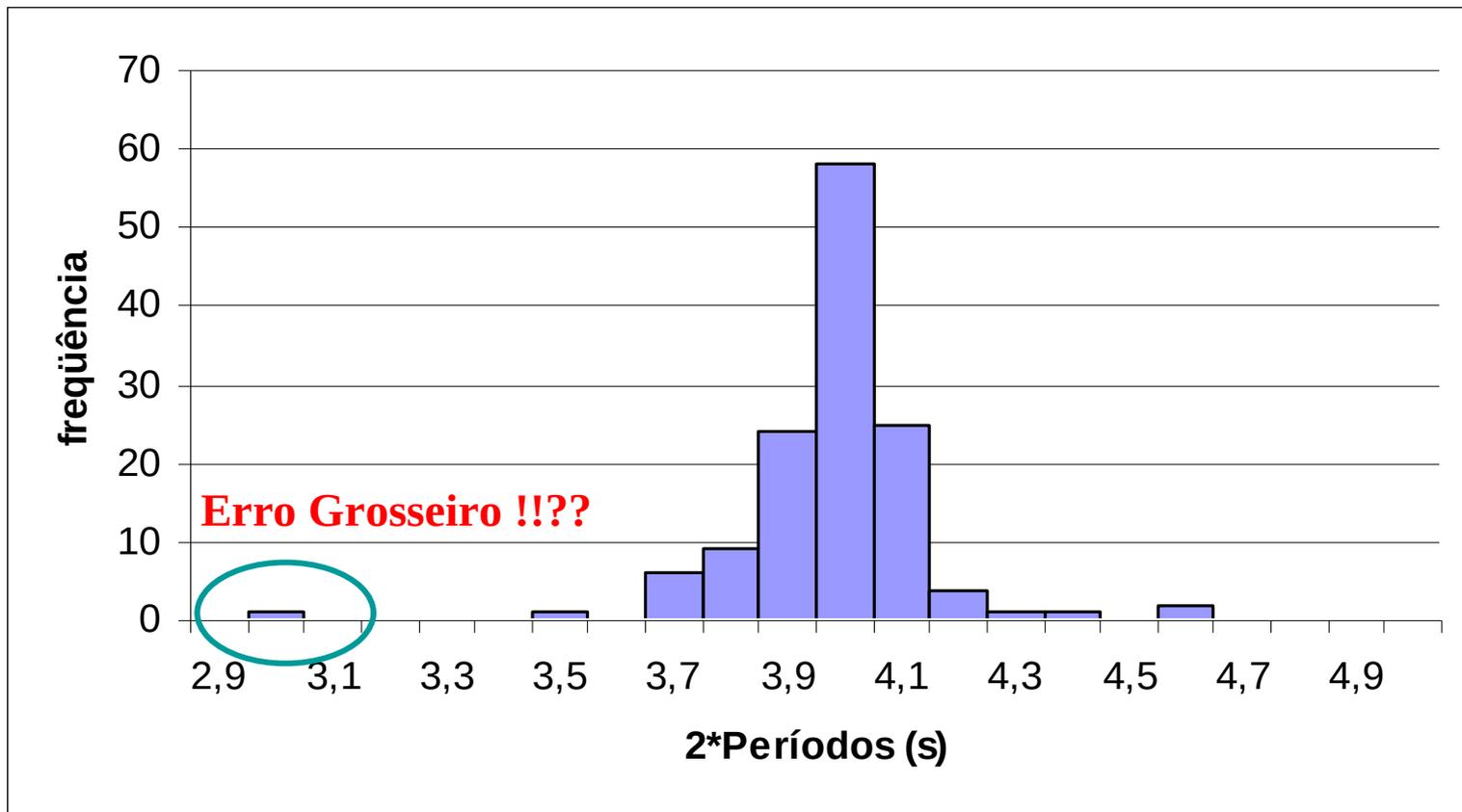


# Interpretação Estatística da Média e Desvio Padrão



Quase Impossível    Muito Pouco Provável    Pouco Provável    Provável    **Muito Provável**    Provável    Pouco Provável    Muito Pouco Provável    Quase Impossível

# Checando dados



# Graficamente

## Média

Valor mais provável

## Desvio Padrão (dist)

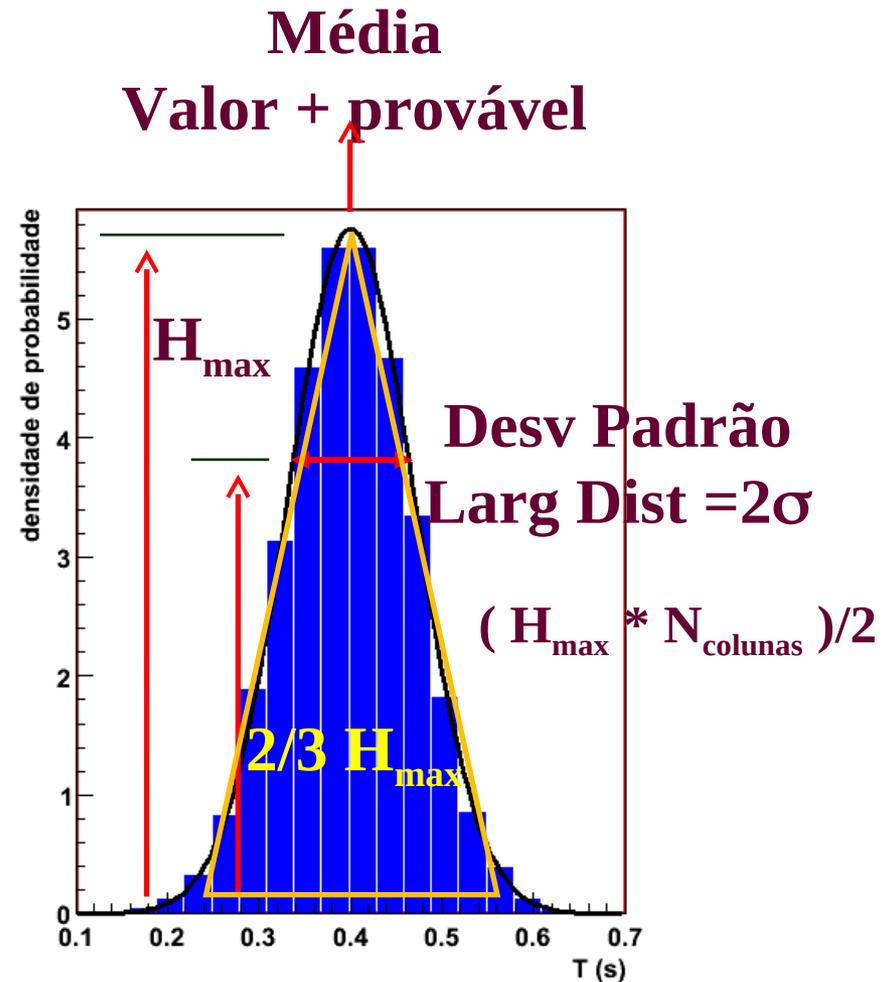
1/2 largura a 2/3 da altura máxima

## Incerteza da média

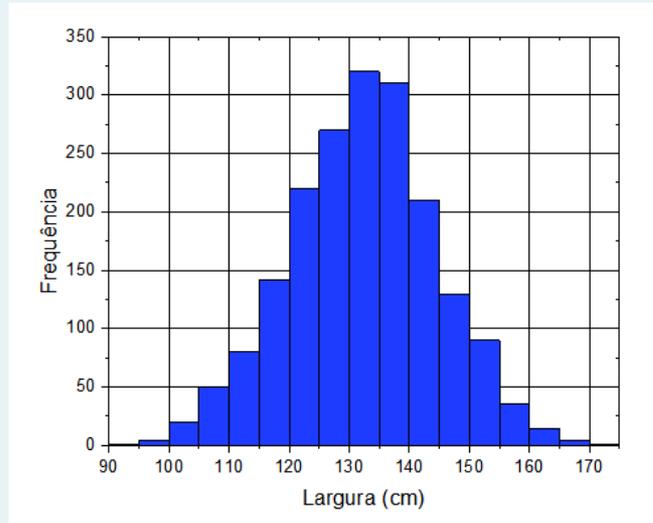
Incerteza estatística

Desvio padrão/raiz (N)

Área de triângulo para aproximação de N



Foram registradas diversas medidas da largura da lousa (realizada em palmos, mas convertida para centímetro) por diversas turmas de física experimental, e os dados foram organizados no histograma abaixo:



Estime de forma aproximada, usando informações lidas no histograma, os valores solicitados abaixo. Se necessário usar **virgula** para decimal.

Largura do canal desse histograma:  cm

Média da distribuição:  cm

Desvio Padrão da distribuição:  cm

Total aproximado de eventos:

Incerteza da média:  cm

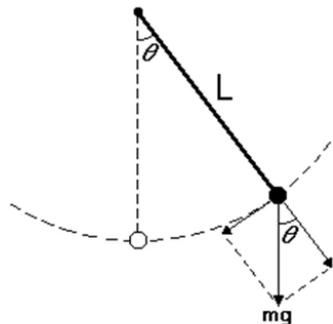
Verificar



Exercício  
em sala  
de aula

# O Pêndulo Simples

- Modelo para deduzir a relação entre o período de oscilação ( $T$ ) e o comprimento do fio ( $L$ ):



$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

- Hipóteses utilizadas:
  - O pêndulo é constituído por um ponto material suspenso por um fio inextensível e sem massa
  - Apenas as forças peso e tração agem sobre o ponto material
  - Utilizam-se ângulos de abertura pequenos ( $\theta < 15^\circ$ ), tal que seja válida a aproximação  $\sin(\theta) \approx \theta$  (em radianos), onde  $\theta$  é o ângulo entre o fio e a vertical, durante a oscilação.

# Aula de hoje:

## Medidas experimentais

- Medir comprimento do pêndulo.
  - Uma medida por grupo
- Medir o tempo para dez oscilações de um pêndulo simples usando um cronômetro:
  - 1) Situação 1: precisão de 0,01 s
  - 2) Situação 2: precisão de 1 s. **ARREDONDE o valor do cronômetro na casa dos segundos**
- Medida feita **por cada um** dos integrantes do grupo.
- Quantidade: **5 vezes** por integrante do grupo **PARA CADA SITUAÇÃO**.
- Anotar as medidas no **guia** e na **planilha de dados** ([https://drive.google.com/drive/folders/1KjwxSm-eWm0AoQBpjGQO2BpfPpwwsc0Ng?usp=share\\_link](https://drive.google.com/drive/folders/1KjwxSm-eWm0AoQBpjGQO2BpfPpwwsc0Ng?usp=share_link)).

# Análise de Dados

- Calcular média e desvio padrão **por grupo** - Uso de Planilhas
- Fazer 2 histogramas (dica de como fazer no excel: <https://youtu.be/ufQbAEixyuE>)
  - 1 para medidas **do grupo**
  - 1 para medidas **da sala**
- Calcule o valor esperado para o período T do pêndulo através da expressão:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

onde  $L$  é o comprimento do fio  $g$  é a aceleração da gravidade.

- Não esqueça de expressar a medida com o número correto de algarismos significativos



# Comparação com o modelo

- O valor medido experimentalmente e o valor obtido através da expressão matemática são iguais?
- Como é possível compará-los?
- A medida do comprimento tem incerteza?
- Como você acha que isso vai afetar o valor do período obtido pela expressão matemática?